

# О некоторых формах интеграции предметной и логической составляющих образовательной области «Математика»

Пайсон Б.Д.

Математическая подготовка учащихся общеобразовательной школы имеет две основные задачи.

Во-первых, это собственно предметная подготовка, призванная обеспечить высокий уровень математических знаний и умений учащихся, достаточный для продолжения образования и получения в дальнейшем профессии, связанной с фундаментальными и математическими исследованиями или приложениями математики. Указанная подготовка учащихся осуществляется в ходе реализации предметной составляющей курса математики.

Во-вторых, математическая подготовка, являясь частью общего образования, должна способствовать формированию интеллектуальных качеств личности обучаемых — умений организации умственной деятельности, структурирования информации, развитию доказательного мышления и т.п. Названные качества являются неотъемлемой частью образованности личности, необходимы любому человеку, независимо от его социальной роли, как для успешного выполнения им своих профессиональных задач, так и для обеспечения личностного комфорта в условиях современного крайне перенасыщенного информационного пространства.

Важнейшую роль в решении как предметных, так и общекультурных образовательных задач играет логическая подготовка, осуществляемая в ходе обучения математике.

Под логической подготовкой будем понимать полученные в процессе обучения знания некоторых наиболее распространённых закономерностей традиционной логики в сочетании с устойчивыми умениями применять эти закономерности как при изучении учебных предметов, так и в любой интеллектуальной деятельности. При этом важно, чтобы систематическая и целенаправленная работа в этом направлении начиналась достаточно рано и продолжалась в ходе всего процесса обучения.

При этом предполагается привитие учащимся начальных логических знаний и умений, которые можно разделить на два блока:

*Языковой блок:*

- умение выделить логическую структуру сложного предложения (конъюнктивную, дизъюнктивную, имплицативную) и определить его истинностное значение;
- умение выделить необходимые и достаточные условия математического явления;
- понимание специфики общих и частных предложений; осознанное представление о кванторах общности и кванторных словах, способах доказательства и опровержения общих и частных предложений на основе примеров и контрпримеров;
- понимание сущности математического определения как специфического предложения языка, логических требований к корректному определению.

*Операционный блок:*

- преобразования (переформулировки) предложений на основе законов логики;
- построение отрицаний предложений сложной логической структуры;
- отрицание общих и частных (кванторных) предложений;
- построение логически правильных и выявление логически неправильных умозаключений.

Целью указанной работы является общая логическая подготовка школьников. Она способствует их общему развитию, формируя качества интеллекта, необходимые каждому образованному человеку [1]. Специфика математической науки а, следовательно, и предметной области «математика» в общеобразовательной школе позволяет эффективно осуществлять на ее основе такую логическую подготовку. С другой стороны, для успешного овладения содержанием школьного курса математики требуется достаточно развитое логическое мышление учащихся. Поэтому логическая подготовка в ходе изучения математики имеет

и «внутреннюю» цель: способствовать качественному усвоению учащимися собственно математического материала.

Опыт практической работы автора в математических классах Алтайского краевого педагогического лицея, гимназий №№40 и 123 г. Барнаула, изучение опыта других учителей позволили определить некоторые формы осуществления логической подготовки учащихся на базе логической составляющей школьного курса математики. Назовем две основные формы.

1. Изучение элементов математической логики и теории множеств как специальной составной части предметной области «математика». Эта форма имеет место, как правило, в виде различного рода спецкурсов в классах с углубленным изучением математики. Автору принадлежат программа и разработка спецкурса [2], по которой систематически ведутся занятия в упомянутых выше и других учебных заведениях г. Барнаула и Алтайского края.

2. Наиболее перспективной представляется интеграция предметной и логической составляющих при изучении единой математической дисциплины. Сущность ее в том, что компоненты логической составляющей явно вводятся в «обычном» курсе математики при изучении наиболее подходящего для этого основного материала и продолжают активно использоваться в дальнейшем.

В гимназии №123 г. Барнаула в течение ряда лет нами ведется целенаправленная работа по логической подготовке учащихся профильных физико-математических классов в тесном сочетании с изучением ими математических дисциплин. Этому предшествовали выделение основных компонентов логической составляющей школьного математического материала [3], основных логических умений, которыми должны овладеть учащиеся, а также выбор средств, приемов и форм обучения этим умениям. В результате мы пришли к выводу, что в контексте математической подготовки целесообразно сосредоточиться на выработке следующих логических умений:

правильно употреблять логические связки «и», «или», «если...то...», «неверно, что...»; выделить логическую структуру и определить истинность сложного высказывания; переформулировать утверждение в соответствии с основными законами логики; правильно употреблять кванторные слова и кванторы «для любого...» и «существует...»; распознавать истинность и строить отрицания общих и частных утверждений; правильно приводить контрпримеры; понимать смысл и правильно применять категории «необходимое и достаточное условие».

Все названные умения наиболее эффективно формируются у учащихся при помощи минимального набора специальных средств, включающих в себя некоторые начальные элементы математической логики и теории множеств. Изучение этих элементов может происходить в специальном курсе, тесно связанном с основным курсом математики специализированных классов. В гимназии №123 такой спецкурс проводится по программе [3] в 8-х классах, ориентированных на физико-математический профиль. Он включает в себя следующие вопросы:

Высказывания, их истинностные значения. Операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание. Таблицы истинности. Логическая структура сложных высказываний.

Формулы логики высказываний. Таблицы истинности для формул. Равносильность формул. Законы логики. Преобразование формул. Применение законов логики в естественном языке. Логический анализ предложений математического и естественного языков; переформулировка предложений.

Решение задач средствами логики высказываний.

Множество; элемент множества. Способы задания множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение. Подмножество. Равенство множеств. Множества точек на координатной прямой и координатной плоскости.

Предикаты. Множество истинности предиката. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание. Множества истинности сложных предикатов.

Кванторы. Истинность общих и частных утверждений. Кванторные законы логики. Численные кванторы, ограниченные кванторы. Символическая запись предложений математиче-

ского и естественного языков; их преобразование; построение отрицаний.

Общий вид всеобщего условного математического предложения, его составные части: разъяснительная часть, условие, заключение. Контрпримеры и их применение.

Предложения обратные, противоположные, контрапозиционные к данному предложению; связи между ними.

Необходимые и достаточные условия.

Программа спецкурса рассчитана на изучение в течение одного полугодия. Материал курса может изучаться как компактно, так и рассредоточено во времени, «привязываясь» к наиболее подходящим темам основного курса. Число учебных часов может варьироваться, начиная от 20 часов, исходя из конкретной обстановки в классе.

Другой формой изучения логического и теоретико-множественного материала является его непосредственная инсталляция в курс математики. Вопросы логики и теории множеств рассматриваются при изучении тех тем основного курса, в которых они наиболее эффективно могут быть востребованы. Например, логические операции, законы логики могут быть введены в рамках темы «Модуль действительного числа»; кванторы, всеобщие условные математические предложения, правило контрпримера, необходимые и достаточные условия — при изучении понятия функции и ее основных свойств (четность, монотонность и др.) В течение 5 лет в физико-математических классах гимназии №123 автором проводилась работа по осуществлению такой интеграции предметной и логической составляющих курса алгебры и начала анализа.

Приобретенные логические знания и умения сразу же находят непосредственное применение в основном курсе. Умение видеть логическую составляющую математического материала и работать с ним, опираясь на соответствующие законы логики, позволяет учащимся более глубоко и прочно усваивать такие математические понятия и факты, которые в силу своей сложной и громоздкой логической структуры плохо поддаются усвоению на интуитивном уровне. К таким понятиям и фактам относятся определения и свойства четности и монотонности функций, доказательства некоторых свойств модуля числа, необходимые и достаточные условия дифференцируемости и экстремума функции, следование и равносильность уравнений и неравенств, решение их систем и совокупностей и другие традиционные и традиционно достаточно сложные вопросы школьного курса математики.

Приведем пример. При изучении понятия четной функции учащиеся, прежде всего, должны сознательно усвоить формулировку определения: «Четной функцией называется функция  $f$ , область определения которой симметрична относительно начала координат и  $f(-x) = f(x)$  для любого значения  $x$ ». При решении вопроса, какая функция не является четной, целесообразно явно использовать логические правила построения отрицаний. В результате ученик может сконструировать следующее правильное утверждение: «Функция не является четной, если ее область определения не симметрична относительно начала координат или существует такое значение аргумента  $x$  из области определения, при котором  $f(-x) \neq f(x)$ ». Таким образом оказывается сразу «заблокированным» ошибочное мнение, что функция, не являющаяся четной — обязательно нечетная. Кроме того, заметив, что у некоторой функции область определения не симметрична относительно начала координат, учащиеся могут сразу сказать, что функция не является четной (как, впрочем, и нечетной). Наконец, становится гораздо яснее, что функции по данному основанию делятся не на два класса (четные и нечетные), а на три (четные, нечетные и «ни те, ни другие»).

Положительное влияние изучения элементов логики на глубину усвоения названных вопросов можно было наблюдать два года подряд на зимних экзаменах в 10-х классах (учителя Т.В. Мальченко и автор статьи).

Из сказанного следует, что изучение соответствующего логического и теоретико-множественного материала (в какой бы то ни было форме) не является самоцелью. Основная задача описанной работы — выработка указанных выше общелогических умений. При этом изучение собственно логико-математических и теоретико-множественных понятий происходит как на текущем материале основного курса математики, так и на ранее изученном математиче-

ском, а также на нематематическом материале. Это способствует более эффективной актуализации изучаемых в спецкурсе фактов, соединению вновь приобретаемых логических знаний и умений с личным опытом обучаемых. Тем самым создаются условия для повышения их общелогического и, следовательно, общеинтеллектуального уровня.

## **Литература**

1. Никольская И.Л. О единой линии воспитания логической грамотности при обучении математике// Преемственность в обучении математике. — М.: 1978. — с. 24–36.
2. Особенности преподавания математики в педагогическом лицее// Брейтигам Э.К., Былкова Т.Л., Пайсон Б.Д. и др. — Математика: Приложение к газете «Первое сентября», 1994, №18.
3. Пайсон Б.Д. О логической составляющей образовательной области «Математика»// Математика в школе. 2003. №2. с. 10–14.