Способы введения математических понятий

Владимирцева С.А.

Одна из главных задач обучения математике в школе — формирование научных понятий. Автор статьи придерживается следующей точки зрения на категорию понятия: математическое понятие — это система логически взаимосвязанных упорядоченных суждений, высказанных о некотором математическом объекте. Эти суждения называются свойствами и признаками понятия. Они составляют содержание понятия. Формирование понятия тесно связано с усвоением математического объекта. Так, понятие «треугольник» содержит все научные знания о математическом объекте «треугольник», который возник в результате абстрагирования и обобщения свойств предметов реальной действительности, имеющих треугольную форму.

Усвоение математического объекта приводит к возникновению общего представления, которое тесно связано с наглядным его образом (знаковым символом). Усвоение понятия — это усвоение системы знаний о некотором объекте, умение использовать эти знания в деятельности. Общее представление не совпадает с научным понятием, но оказывает существенное влияние на его формирование.

Учеников 11-х классов двух школ спросили: что вы знаете о биссектрисе угла треугольника? Ответ был единодушным: биссектриса делит угол треугольника пополам. Оказалось, никаких других свойств или признаков биссектрисы, кроме определяющего, ученики не знают. А ведь в разное время изучалось, что:

— все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник;

— каждая точка биссектрисы угла треугольника равноудалена от сторон треугольника, содержащих угол;

— основное свойство биссектрисы угла треугольника: биссектриса делит сторону, к которой проведена биссектриса, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Таким образом, в сознании учащихся понятие «биссектриса» сформировалось на уровне математического объекта, содержание понятия содержит лишь один признак. Вряд ли, имея только представление о биссектрисе угла, можно успешно решать задачи.

Не лучше обстоит дело и с другими понятиями алгебры и геометрии. Чаще всего ребята называют те свойства и признаки, о которых речь шла в соответствующих пунктах учебника, т.е. только те, которые были специальным объектом изучения. Другие свойства и признаки школьных понятий ученики не включают в их содержание, хотя они рассматривались при выполнении упражнений, в контексте изучения других понятий.

Всё это приводит к мысли, что если суждения из содержания понятия не становятся объектом специального изучения, то учащиеся усваивают их как отдельные факты, вне связи с понятием, тем более если понятие уже изучалось. Школьники вспоминают непосредственно факты, но самостоятельно выделить новые свойства понятий (объектов) часто не могут. Кроме того, они не знают приёмов деятельности, которые позволяют успешно рассуждать, решать задачи, т.е. использовать понятие в деятельности.

Рассуждения в математике составляют основное содержание деятельности как учёного, так и школьника, изучающего математику. На вопрос: «Какие дополнительные построения полезно выполнить, когда решаешь задачу «на равнобедренную трапецию»?» только около трети учащихся назвали проведение двух высот из вершин меньшего основания. Других приёмов, способствующих успешному решению задач о равнобедренной трапеции, они не знали или не смогли вспомнить.

Такое положение сложилось, на наш взгляд, потому, что в школьной практике формирование понятий как целенаправленный процесс организован слабо. Анализ конспектов уроков учителей показал, что «формирование понятия» как цель урока (или серии уроков) учителями даже не ставится. Ставятся более узкие цели: изучить теорему, учить решать некоторые виды задач. Уроки систематизации и обобщения знаний, целью которых должно быть, прежде всего, обобщение и систематизация знаний о формируемых понятиях, их логическое упорядочение, чаще всего превращаются в уроки повторения по данной теме. В конечном счёте, это (и многое другое) ведёт к фрагментарности знаний, неумению применять знания на практике.

Одна из причин такого положения — неверное представление о понятии и его формировании, сложившееся в методике обучения математике в последние несколько десятилетий, когда математический объект и математическое понятие не различались, а формирование понятия связывалось с его определением. Эти представления не искоренены в методической науке и школьной практике до сих пор.

На самом деле определением начинается построение теории, результатом усвоения которой является формирование нового понятия. Определение математического объекта становится фундаментом этой теории. Введение определений новых математических объектов — ответственный этап в формировании математического понятия, хотя, как будет показано далее, не главный. В методике обучения математике этот этап называется введением нового понятия.

Под введением математического понятия будем понимать этап ознакомления учащихся с новым математическим ***объектом****, который заканчивается его определением.*

В методической литературе до недавнего времени рассматривалось два подхода к введению математических понятий: конкретно-индуктивный (от частного к общему, от примеров к определению) и абстрактно-дедуктивный (от общего к частному, от определения к примерам).

Основное достоинство конкретно-индуктивного подхода заключается в том, что при введении нового понятия учитель опирается на жизненный опыт и знания учащихся, что само по себе предполагает их активное участие в работе. Конкретно-индуктивный подход положительно воздействует на формирование, прежде всего, индуктивного мышления учащихся.

В методической практике сложилось неверное представление о том, что определение можно «открыть». «Открытие» определения должно стать результатом конкретно-индуктивного подхода к введению понятия. По этому поводу Г. Фройденталь писал: «Как можно определить нечто, коль скоро не знают, что определяют?». А.С. Мищенко по поводу открытия определения заметил, что внешне деятельность «по открытию определения» на уроке «выглядит вполне современно, побуждает детей к анализу ситуации, как говорят, «актуализирует» их мыслительную деятельность. В действительности, «…приведённый способ «введения понятия» утомляет детей, не говоря уж о том, что он создаёт неверное представление о всей математике в целом».

По мнению А.С. Мищенко, все усилия при введении нового понятия должны быть направлены на то, чтобы закрепить употребление понятий и терминов, их обозначение, а также их свойства в строгих математических формулировках для того, чтобы опираться на них в процессе математических рассуждений». Основная роль определений в математике — служить начальным звеном в дедуктивном упорядочении суждений о некотором понятии. «Определения не задумываются заранее, чтобы нечто вывести из них, а как раз и являются последним штрихом упорядочения. И это тоже не следует утаивать от ребёнка».

Абстрактно-дедуктивный подход используется чаще всего, когда определение нового объекта несложно по структуре, а сам объект знаком ученикам. В этом случае определяющий признак легко обнаруживается у объектов, которые приводятся в качестве примера. Абстрактно-дедуктивный подход — самый экономичный по времени, но после введения нового определения сложной структуры требуется определённая (часто значительная по времени) работа по его усвоению. Часть определений геометрии и математического анализа школьники усваивают только после целенаправленной работы, основанной на изучении структуры этого определения. Например, распознавание прямой, перпендикулярной плоскости, несложно: есть жизненные представления о вертикальном расположении столба относительно плоскости земли. Затруднения при изучении данной темы связаны, прежде всего, с изображением пространственного объекта на плоскости, и сложностью структуры самого определения. Это определение содержит квантор общности: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в плоскости. Поэтому усвоение определения, точнее, его применение при рассуждениях, вызывает значительные затруднения.

Абстрактно-дедуктивный подход можно использовать при введении любого понятия. Принято считать, что такой подход к введению понятия развивает теоретическое мышление школьников.

Рассмотренные выше подходы к введению нового понятия основаны на абстракции отождествления. В логике «абстракцией отождествления называется процесс отвлечения от исходных, различающихся свойств предметов и одновременно выделения одинаковых, тождественных свойств. В результате такого отвлечения создаётся возможность образовывать понятия». Рассмотренные подходы в достаточной мере обеспечивают реализацию ориентировочной функции понятия, которая даёт возможность конкретные объекты уверенно подводить под понятия. Ведущую роль в формировании понятий играет наглядно-образный компонент.

Однако приведённые выше примеры показывают, что методика формирования понятий, начиная с их введения, имеет существенные недостатки.

В пособии[1] описаны другие способы введения нового понятия: деятельностный и исследовательский. (Возможно, названия подходов не в полной мере соответствуют их содержанию!). Охарактеризуем каждый из них.

[1] Владимирцева С.А. Теория и методика обучения математике. Общая методика: Учеб. пособие для студентов пед. вузов. Барнаул, 2005.

Характеристика деятельностного подхода к введению математических понятий

Суть этого подхода заключается в том, что, взяв за основу некоторое свойство (или несколько свойств) математического объекта в качестве основания классификации, ученики под руководством учителя проводят классификацию математических объектов по данному основанию. В результате присваивается некоторый термин одному из получившихся классов и даётся определение объектов данного класса, т.е. начинается формирование нового понятия.

Рассмотрим, как применяется деятельностный подход при введении понятия «параллелограмм».

Обозначения:
— Учитель
— Ожидаемый ответ ученика

— Из каких элементов состоит четырёхугольник?
— Из сторон и углов
— Какие отношения можно рассматривать для отрезков — сторон четырёхугольника?
— Отношения равенства, параллельности, перпендикулярности
— Наша задача — изучить четырёхугольники с точки зрения наличия параллельных сторон. Существует ли четырёхугольник с одной парой параллельных сторон?
— Да
— Как это доказать?
— Построением такого четырёхугольника
— Кто построит такой четырёхугольник?
— Ученик строит на доске. Остальные — в тетрадях
— Существует ли четырёхугольник с двумя парами параллельных сторон?

— Да
— Кто построит такой четырёхугольник?
— Ребята строят на доске и в тетрадях
— Можно ли построить четырёхугольник с тремя и более парами параллельных сторон?
— Нет
— Почему?
— Так как смежные стороны пересекаются, то параллельными могут быть только противоположные стороны. А их две пары
— Существует ли четырёхугольник, у которого нет параллельных сторон?
— Существует. (Ребята строят на доске и в тетрадях)

Таким образом, получилось всего три различных четырёхугольника: с одной парой параллельных сторон — трапеция, с двумя парами — параллелограмм, и четырёхугольник, не имеющий ни одной пары параллельных сторон — у него названия нет.

После этого учитель вводит термины «параллелограмм» и «трапеция», рассказывает о том, что эти четырёхугольники изучались с древности. Они имеют много интересных свойств. Поэтому нужно ввести строгие определения этих новых понятий. Школьники без труда отвечают на вопрос: «Какой четырёхугольник называется параллелограммом?», поскольку знают основание классификации. Здесь же даётся и определение трапеции. После этого изучаются свойства и признаки введённых понятий.

Деятельностный подход способствует пониманию метода научного познания действительности, учит основам классификации, предполагает активное участие школьников в познавательной деятельности. Но этот метод требует немалых затрат времени. Кроме того, деятельностный подход даёт хороший результат лишь там, где классификация объектов по определяющему признаку нового понятия возможна и целесообразна. Так, деятельностный подход уместен, когда вводится отношение между объектами, например: угол, вписанный в окружность; смежные углы; взаимное расположение прямой и окружности; взаимное расположение прямой и плоскости и т.п.

Если рассмотренные выше подходы позволяют лишь ввести новый объект (понятие), то подход, который мы назвали исследовательским, направлен на формирование понятия в целом, на формирование понятия как системы взаимосвязанных логически упорядоченных суждений. При этом можно спроектировать познавательную деятельность учащихся таким образом, чтобы воспроизвести (с некоторой долей достоверности!) деятельность учёного-математика, направленную на изучение нового объекта и образование понятия.

Характеристика исследовательского подхода к формированию математического понятия

При этом подходе совместная деятельность учителя и учеников проходит по следующим этапам:

• постановка цели деятельности;

• эмпирическое изучение нового математического объекта; поиск его свойств;

• формулирование его свойств в виде гипотез;

• начало построения теории понятия: введение термина, определение математического объекта;

• проверка истинности высказанных предположений путём приведения дедуктивных доказательств;

• поиск признаков исследуемого объекта (доказательство обратных утверждений);

• уточнение логических связей между суждениями; схематизация содержания нового понятия; усвоение содержания понятия;

• обучение использовать новое понятие в деятельности: решение опорных задач; выделение общих приёмов деятельности, способствующих применению понятия (например, отыскание эвристик);

• применение понятия в нестандартных ситуациях.

Рассмотрим этот подход на примере изучения понятия «равнобедренная трапеция» (8-й класс).

Понятие «равнобедренная трапеция», как правило, вводится в теме «Трапеция». Но подробное рассмотрение понятия можно отложить до того момента, когда будет изучена теорема Пифагора. Именно в этой теме понятие широко используется при решении задач.

Учитель начинает беседу с рассмотрения чертежа равнобедренной трапеции, который он раздал ученикам (либо каждому, либо один на группу).

Обозначения:
— Учитель
— Ожидаемый ответ ученика

Учитель
— Назовите основные элементы трапеции.
— Стороны, углы, диагонали
— Сегодня на уроке мы попробуем изучить данный четырёхугольник, как, возможно, много веков назад это сделали учёные-математики. Вспомните, что, прежде всего, интересует геометров при изучении фигур?
— Соотношения между сторонами и углами данной фигуры
— Так кто же сформулирует цель нашего исследования?
— Цель — выявить соотношения между элементами фигуры, то есть между сторонами и углами. А также изучить и другие её особенности
— Математики уже в древности знали немало свойств и признаков этого четырёхугольника. Возьмите в руки линейки, транспортиры. Сравните стороны, углы трапеции, её диагонали. Сформулируйте гипотезы о свойствах этих элементов трапеции.
— Ребята работают самостоятельно или в группах
— Каким свойством обладают боковые стороны трапеции?
— Они равны
— Каким свойством обладают углы этой трапеции?
— Углы при каждом основании трапеции равны
— Каким свойством обладают диагонали трапеции?
— Они равны
— Какие ещё особенности этой трапеции вы заметили?

Школьники могут назвать и свойства, которыми обладает любая трапеция, не только равнобедренная. Учитель даёт соответствующие пояснения и не включает эти свойства в список. Тем не менее, можно добавить следующие суждения:

— данная трапеция симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию;

— высоты трапеции, опущенные из вершин верхнего основания, отсекают равные прямоугольные треугольники;

— при пересечении диагоналей образуются два равнобедренных треугольника;

— два треугольника, образованные при пересечении диагоналей, прилежащие к боковым сторонам, равны.

Попытки учащихся сформулировать утверждения, используя термин «равнобедренная трапеция», успехом не увенчались, поскольку им запрещено использовать этот термин: его ещё нет. Некоторые ученики стали предлагать суждения типа: «Если две стороны трапеции равны, то её углы при основаниях также равны; если диагонали трапеции равны, то и стороны её также равны».

В этом случае учитель должен обратить внимание школьников на большое количество утверждений. Кроме того, он должен обратить внимание на тот факт, что некоторые утверждения следуют из других. Например, если окажутся верными утверждения:

если две стороны трапеции равны, то и углы при основании равны;
если углы при основании трапеции равны, то её диагонали равны,
то верно и утверждение:
если две стороны трапеции равны, то её диагонали равны.

— Можно ли считать, что мы с вами изучили данную фигуру, то есть построили теорию?
— Нет. Пока это только гипотезы
— Что же нужно сделать дальше?
— Нужно их доказать
— Но учёные доказывают теоремы. Сформулируйте хотя бы одну из них.

— Как же нам теперь упорядочить этот набор свойств трапеции? Как поступают учёные?
— Нужно строить теорию этого четырёхугольника, но не хватает определения и названия
— Учитель рассказывает сам, что необходимо этот объект как-то назвать и выбрать его определение
— Даётся определение, обычное для равнобедренной трапеции
— Соберём все полученные данные, выдвинутые гипотезы в схему

Трапеция имеет равные боковые стороны.
Диагонали трапеции равны
Углы при основании
трапеции равны
Треугольники, образованные боковыми сторонами трапеции и отрезками диагоналей, равны.
При пересечении диагоналей образуется пара равнобедренных треугольников.
Треугольники, отсечённые высотами, проведёнными из вершин верхнего основания, равны

Далее, с учётом подготовки учащихся, группам даётся задание: «Сформулировать и доказать теорему о свойствах трапеции и ей обратную». Каждая группа получает одну из теорем. Можно это задание дать сначала на дом. Свойства, которые доказаны в учебнике, ребята должны доказать другим способом, кроме того, им предлагается доказать и обратные утверждения. На следующем уроке задание проверяется. Если класс имеет хорошую математическую подготовку, то задания можно сделать индивидуальными. Очевидно, что некоторые группы (ученики) не смогут выполнить задание, а в некоторых случаях оно может оказаться на данном этапе изучения математики и непосильным. В процессе решения задач (а также при изучении других тем) эта работа может быть продолжена. Заметим, что в данном случае все приведённые выше утверждения и обратные к ним истинны.

Следующим этапом формирования понятия «равнобедренная трапеция» будет формирование умения применять понятие в речи, в деятельности, а именно в рассуждениях в процессе решения задач. Учащиеся должны уметь проговаривать импликативные утверждения в общеутвердительной, более соответствующей естественному языку, форме. Например, вместо формулировки теоремы: «если трапеция равнобедренная, то её углы при основании равны» необходимо требовать, чтобы учащиеся проговаривали её в следующей форме: «в равнобедренной трапеции углы при основаниях равны». Ученики должны уметь правильно перечислять свойства равнобедренной трапеции: равенство углов при основании; равенство боковых сторон; равенство диагоналей; наличие двух равнобедренных треугольников, образованных при пересечении диагоналей; и т.д.

Очевидно, каждое из этих утверждений является и признаком равнобедренной трапеции, так как истинны утверждения: если диагонали (углы при основании) равны, то трапеция является равнобедренной.

Обучение использовать понятия в деятельности можно начать с рассмотрения опорных задач по данной теме, решение которых приводит к общим приёмам деятельности. Не всегда такие приёмы выделены в учебнике. Учителю приходится на основе анализа теории и системы упражнений к теме накапливать такие приёмы и соответствующие задания для предъявления их школьникам. Так, к приёмам, способствующим применению понятия «равнобедренная трапеция» можно отнести:

• проведение высот из вершин верхнего основания (рис. 1).

При этом образуются два равных прямоугольных треугольника и прямоугольник.

• проведение отрезка, параллельного боковой стороне и проходящего через вершину верхнего основания.

При этом трапеция разбивается на параллелограмм и равнобедренный треугольник (рис. 2).

• проведение отрезка, параллельного одной из диагоналей трапеции.

При этом образуется равнобедренный треугольник (в 9-м классе можно доказать, что его площадь равна площади трапеции) (рис. 3).

Рис. 1

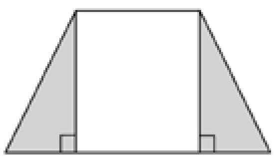


Рис. 2

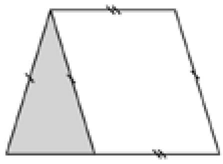
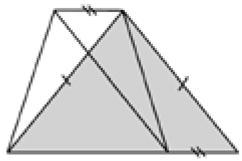


Рис. 3



Для актуализации каждого из этих приёмов необходимо подобрать задачу, решение которой, во-первых, обеспечивается применением данного приёма и, во-вторых, не слишком громоздко.

В систему упражнений полезно включить такие задачи, при решении которых требуется доказать, что трапеция является равнобедренной. Решение задач такого рода потребует использования признаков понятия. При этом необходимо учить правильно отвечать на вопрос: «По каким признакам можно распознать равнобедренную трапецию среди других четырёхугольников?». Ожидаемый ответ: по равенству сторон; по равенству диагоналей; по равенству углов при основании трапеции; по наличию равных треугольников, образованных диагоналями трапеции и прилежащих к её боковым сторонам и т. д.

Анализ упражнений учебника показывает, что в основном решение задач сводится к применению определяющего признака понятия. Необходимо включать в систему упражнений задачи, успешное решение которых обеспечивается другими его признаками.

Естественно, формировать понятие «равнобедренная трапеция» будут в течение всего процесса обучения. Содержание этого понятия будет пополняться новыми признаками и свойствами равнобедренной трапеции, например:

— при пересечении диагоналей равнобедренной трапеции получается два подобных равнобедренных треугольника;

— площадь равнобедренного треугольника, получившегося на рис. 3, равна площади трапеции.

При этом не стоит забывать о таблице, на которой изображена логическая схема понятия. Работа над схемой должна быть продолжена.

Заметим, что представленное здесь содержание понятия «равнобедренная трапеция» далеко не полно даже на уровне 8-го класса.

Рассмотрим ещё один пример исследовательского подхода к формированию понятия на примере изучения темы «Квадратичная функция» в 9-м классе. Формирование понятия «квадратичная функция» в средней школе направлено, прежде всего, на построение и чтение её графика. Решение же более сложных задач, к примеру, задач ЕГЭ с параметрами, требует от учащихся владения более широким спектром свойств этой функции, в частности, знания тех из них, которые отражают связь свойств функции с коэффициентами её уравнения.

Исследование с целью отыскать такие связи, можно организовать в форме самостоятельной работы в группах. Также допустимо использовать фронтальную форму организации деятельности учащихся. В этом случае наиболее подготовленным из них можно предложить индивидуальные задания. Разрешается пользоваться учебником. Для выполнения работы целесообразно сформировать группы. Каждой группе предлагается карточка, на которой построены графики функций.

После выполнения работы, на которую отводится в зависимости от подготовленности учащихся от 15 до 20 минут, подводятся итоги. Школьники сообщают о результатах своих исследований. Решение предложенных задач можно предложить в качестве домашнего задания, а затем в классе обсудить результаты, сделать необходимые обобщения.

Проводить работу на уроке предпочтительнее: в классе у школьников всегда есть возможность проконсультироваться у педагога и других учеников, поучиться методам, логике рассуждений.

В школьном курсе математики есть понятия, которые традиционно привлекают внимание многих методистов. В частности, речь идёт о таких понятиях математического анализа как предел, непрерывность и производная. Определения этих понятий сложны, ребята их плохо усваивают. Учителя и методисты разрабатывают различные подходы к изучению определений этих понятий, но практика показывает, что положение в лучшую сторону не меняется: ученики не только не понимают определений данных понятий, но и не могут их воспроизвести, часто даже не помнят. Тем не менее, они достаточно успешно используют свойства этих понятий при выполнении математических заданий.

Кроме понятий математического анализа в школьной математике немало таких понятий, определения которых есть в учебнике, изучаются на уроках, ученики их понимают, но всё равно не знают. Так, в книге М.Б. Воловича «Наука обучать» приводится пример с определением смежных углов. Как показал эксперимент, проведённый автором книги, никто из учащихся не смог правильно воспроизвести определение смежных углов: все они считали, что это углы, в сумме составляющие 180 градусов. Тем не менее ребята успешно распознают эти углы, опираясь на наглядный образ, и правильно используют свойство смежных углов в рассуждениях.

Можно привести ещё немало таких примеров, когда ученики, не зная определения понятия, успешно тем не менее его используют. К таким понятиям относятся прежде всего наиболее широкие понятия геометрии: цилиндр, конус, многогранник; а в алгебре такое понятие как число, с которым ребята работают ежедневно, вообще не определено. И это никого не смущает: определения этих понятий нерабочие.

К нерабочим мы относим те определения, которые не применяются в рассуждениях, не «работают» при решении задач. Они нужны лишь для построения теории понятия, т.е. для логического упорядочения суждений о понятии. Ученики успешно работают с понятием, основываясь на том наглядном образе объекта, который иногда создавался задолго до того, как понятие начали изучать в школе, или используют следствия из определения, которые вместе с наглядным образом способствуют созданию общего представления и научного понятия. Но если определение понятия «цилиндр», которое доступно учащимся, способствует созданию правильного наглядного образа данного понятия, определение становится ненужным, как только будут выведены следствия из него.

А вот определение предела и непрерывности функции на промежутке плохо усваивается учащимися не только потому, что оно сложно по структуре: понятие непрерывности функции на промежутке в сознании учащихся опирается не на определение данного понятия, а на наглядные представления о поведении графика непрерывной функции. На школьном уровне определение непрерывной функции не работает. Все свойства непрерывных функций в дальнейшем лишь разъясняются опять таки без опоры на определение. А потому оно становится ненужным для учащихся.

Определение производной на школьном уровне также нерабочее. То время, которое учителя затрачивают на разучивание алгоритма применения определения производной к выводу некоторых формул дифференцирования, проходит для большинства учащихся впустую. Чтобы выработать умение применять это определение, нужно продолжительное время, а его нет. Вывод формул дифференцирования не способствует даже запоминанию этих формул (в отличие от формул тригонометрии) и остаётся непонятным многим ученикам.

На наш взгляд, вводить определения начальных понятий математического анализа в школе: предела, непрерывности, производной, можно без строгих определений: они всё равно потом не используются. Высвободившееся время можно уделить формированию общих представлений о данных математических объектах, основанных на наглядных представлениях учащихся (предел, непрерывность), на знании геометрического и физического смысла (производная). Такой подход к введению понятия производной гораздо эффективнее, чем требовать запоминать недоступные пониманию учеников определения предела и производной, которые в дальнейшем не применяются.

В классах с углублённым изучением математики, на факультативных занятиях в школе, где собраны ученики, которые свяжут свою дальнейшую учёбу с изучением математики, естественно, можно строить и теорию пределов, и теорию производной. И даже в этом случае не стоит много времени уделять изучению их определений, так как после рассмотрения соответствующих свойств они становятся ненужными. В математических классах необходимо рассказывать о роли определений в построении теории понятия, там, где это возможно, привлекать учащихся к построению теории понятия на основе другого его определения.

Такую работу со способными ребятами можно провести и в обычных классах, начиная с 8-го класса. Именно на геометрическом материале, где теории понятий выстроены аксиоматически, можно начинать работу по построению теории понятия. Так, после изучения понятия «равнобедренная трапеция» исследовательским методом можно продолжить эту работу в кружке или на факультативном занятии, предложив школьникам самостоятельно разработать теорию понятия, взяв за её основу другое определение, например: «Трапеция называется равнобедренной, если её диагонали равны». Такая работа полезна ученикам как в методологическом плане, так и в развитии их предметных умений.

Итак, неоправданно большое место в формировании понятий отводится их определениям. Причём, опираясь на представление об определении как операции, до сих пор учителя пытаются обучить учащихся открывать определения. Кроме того, рассматривая приёмы деятельности учащихся в процессе формирования понятий, психологи, а вслед за ними и методисты, особое значение придают подведению объекта под понятие, которое также связано с определением. Не умаляя значения этого действия в процессе формирования понятий, отметим, что усвоение математических понятий предполагает использовать понятия в рассуждениях. В этом случае ученик должен владеть всей совокупностью суждений, характеризующих данное понятие, а не только знать определяющий признак. Кроме того, как показано в работах Е.Н. Кабановой-Меллер[2], важную роль в применении понятия в мыслительной деятельности играет подвижность суждений, в основе которой лежит понимание логических (причинно-следственных) связей между ними. Поэтому важно привлекать школьников к деятельности, предполагающей применение понятия.

[2] Кабанова-Меллер Е.Н. Усвоение и применение системы географических понятий // Изв. АПН РСФСР. 1954. Вып. 61. С. 166–190.

Построение теории математического понятия в школьных учебниках необходимо строить с учётом: а) его роли в создании соответствующего наглядного образа; б) особенностей усвоения данного понятия учащимися.

Правильное введение математических понятий, формирование понятия как системы взаимосвязанных логически упорядоченных суждений, разумное сочетание логического и содержательного аспектов в процессе изучения понятий — всё это способствует усвоению понятий и применению их в учебной и практической деятельности.