Как обучать школьников математике

Когаловский С.Р.

Освоить учебную математическую деятельность, складывающуюся из взаимодействий многих психических механизмов при большом числе «степеней свободы», невозможно, если не сформированы и не развиты гибкие, быстро перестраивающиеся координации действий, невозможно без активной и многонаправленной деятельности ученика.

Нельзя превратить обучение математике в эффективное средство общего умственного развития учащихся, не преодолев «великую иллюзию… — веру в рациональную природу человеческого интеллекта»(М.А. Холодная), не преодолев распространённый разрушительный предрассудок: обучение математике — это обучение специфической «левополушарной» деятельности, точнее говоря, — обучение специфическому «левополушарному» поведению.

«Предмет математики… состоит в доказательствах», — говорил Паскаль. «Со времён греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство», — сказал Бурбаки. Сказанное выражает чрезвычайно важную, характеристическую черту математики. Но буквалистское, одномерное понимание этого тезиса, вырванного из контекста истории развития математики, из контекста реальной, живой математической деятельности, приводит к однобокому пониманию предмета и методов математики. Такое понимание не может не порождать «левополушарный» пуризм и во взглядах на предмет и методы обучения математике. Вот его стерильно чистое выражение, принадлежащее перу известного логика Э. Бета: проблемы педагогики математики решаются «скорее с помощью логики, чем психологии», ибо роль обучения математике «состоит почти исключительно… в усвоении учащимися дедуктивного метода», а «формализация позволяет… обходиться… без привлечения нашего сознания к механизмам мышления». И не благодаря, а вопреки такому пониманию в учебниках математики для средней школы всё ещё присутствуют тени прикладных вопросов. Приверженцы пуризма уподобляют математику предприятию, состоящему единственно из отдела технического контроля, или живому организму, состоящему единственно из иммунной системы.

Попытаемся, однако, встать на точку зрения пуристов и задаться вопросом: как следует обучать школьников математике? Этот вопрос потребует уточнения, как понимать обучение математике: как обучение усваивать предлагаемые доказательства или ещё и как формирование способности к поиску доказательств?

Встанем ли мы на точку зрения тех, кто принимает первый вариант, или тех, кто принимает второй, мы не сможем не прийти к вопросу: что значит усвоить доказательство? Если под этим понимается способность проверить его правильность, т.е. проверить, действительно ли оно является доказательством утверждаемого, следует ли законам формальной логики, то обучение математике следует понимать как усвоение законов формальной логики, и только.

Если же под усвоением доказательства понимается и то, что выражается словом «понимание» (не очень приемлемым для пуристов, поскольку его смысл едва ли можно адекватно выразить на каком-либо формализованном языке), то нам придётся отступить от пуристской установки под натиском необходимости признать средства обучения, ею отвергаемые: «В процедуре понимания синтез преобладает над анализом (и при усвоении готового знания, и при открытии подлинно нового)… процессуальность, динамичность — над теоретической систематикой… схватывание целого — над процедурами упорядочения… Понимание никогда не происходит автоматически, на основе суммирования наличного материала, но всегда требует отрыва от наличного данного… Понимание на высших своих уровнях — это деятельность теоретическая, деятельность связывания идей, установления отношений между ними, приведения их к целостному, системному виду…

Такое понимание не может возникнуть просто из накопления фактов… Теоретический уровень… не единственный, на котором происходит построение систем и целостностей… На уровне более фундаментальных и менее развитых форм осуществляется накопление возможностей… «скачка» теоретического познания…». Понимание — это «сложный механизм, который обеспечивает одновременно и примысливание-достраивание новых фактов к налично существующим, но недостаточным, и работу приведения к целостности наличных фактов совместно с примысленными-достроенными… Понимание выступает как идеепорождающая способность разумного человеческого мышления» (Н.С. Автономова).

Пуристская установка оказывается в безнадёжно тяжёлом положении, если будет принят второй вариант ответа на поставленный выше вопрос, т.е. при понимании обучения математике не только как обучения усваивать предлагаемые доказательства, но и как формирования способности к поиску доказательств, которое требует развития внелогических, внепонятийных форм мышления.

Формирование способности к поиску доказательств должно быть компонентом всякой разумной системы обучения математике в средней школе. А значит, необходимым средством обучения математике должно быть использование и развитие внепонятийных форм мышления. Последнее же нуждается в использовании достижений психологии.

Какие же из этих достижений используются педагогикой математики для развития внепонятийных форм мышления?

Есть работы, представляющие собой прямые приложения достижений психологии к обучению математике. Но много ли среди них таких, которые проникают в глубинные психологические механизмы такой деятельности, высвечивают особенности их взаимодействий? «Наш анализ хода мысли выявляет только наиболее грубые её движения, не схватывая тонкие смысловые взаимодействия, которые очень трудно явно выражаются и формализуются» (Р. Том).

В силу этого истина видится не в прямых приложениях результатов психолого-педагогических исследований к проблемам педагогики математики, а в совместных исследованиях математиков и психологов.

Если в разработке средств развития механизмов анализа (насколько это возможно без основательного прояснения того, какими средствами активизируется работа механизмов синтеза) педагогика математики имеет несомненные достижения, то её представители даже не ставят вопрос о развитии механизмов синтеза. И это при том, что без напряжённой работы механизмов синтеза невозможен прорыв на понятийный уровень мышления, что разные стадии овладения понятием требуют разных форм работы механизмов синтеза. Далеко не последней причиной трудностей в изучении математики становится явно недостаточная работа механизмов синтеза, а без напряжённой работы механизмов синтеза не работают механизмы понимания и тем более механизмы его высших, «логических» форм.

Работа механизмов понимания рождает активные взаимодействия разных логик, разных тактик внимания, разных направлений мыследеятельности. Механизмы понимания и входящие в их состав механизмы синтеза широко и активно используют «допонятийные» формы мышления — носителей эвристического потенциала, а значит, носителей возможности проявления креативного начала. Без их использования невозможно формировать теоретический уровень мышления. И не в том ли одна из главных причин трудностей, которые испытывают многие ученики при изучении математики, что в обучении в малой степени используются и не получают должного развития «допонятийные» формы мышления, и не в том ли, что встречается не так уж мало преподавателей математики — ревнителей беспочвенной строгости, которые видят образец обучения математике в процессе, ведущем к атрофии «правополушарных» механизмов?

Мышление — это процесс взаимодействия взаимно дополнительных, «полярно» действующих механизмов. И чем оно сложнее, тем активней эти взаимодействия. Сказанное в особой степени относится к характеру мышления, присущему математической деятельности — как научной, так и учебной. Чем тоньше и глубже предмет аналитической деятельности, тем больше она нуждается в активизации механизмов синтеза, и наоборот. Чем дальше заходит формализация, тем больше нужда в семантических средствах, и наоборот. Чем глубже исследование «синтагматического» плана, тем больше необходимость в соотнесении, тесном увязывании его с планом «парадигматическим» и наоборот. Чем более рациональный, «логический» характер имеет сложная форма умственной деятельности, тем в большей мере она нуждается во внерациональных средствах.

Традиционная педагогика математики слабо сообразуется с тем, что «природосообразный» процесс освоения понятия есть процесс восхождения к нему от представлений, являющихся его истоком, что он сопровождается преобразованиями тактик внимания, преображениями представлений.

Невозможно не признать непреходящей ценности достижений традиционного подхода к обучению математике. Но выросший из изначальной ориентации на репродуктивный способ обучения, он ещё не преодолел её наследия, и это ограничивает его возможности. Один из истоков его ограниченности — гипертрофия «методизма», которая проявляется прежде всего в сосредоточении на отработке элементарных действий в отрыве от целостной учебной деятельности, компонентами которой они являются. Отсюда — ущемление возможностей использовать в методике обучения математике достижения психологии. Отсюда та доходящая до тождественности близость предмета методики математики её объекту, которая свидетельствует о преимущественно эмпирическом характере исследований в этой области.

Гипертрофия «методизма» проистекает из ориентации на неуклонность движения от простого к сложному, на движение от частей к целому и приводит к утрате возможности полнокровно осваивать целое. Утрирование рецептурного начала, его канонизация, догматизм — неизбежные её следствия. Идиосинкразия к нестандартным ситуациям, страх перед сложным — весьма распространённые её последствия. Всё это не только не способствует развитию учебных действий, направленных на общее развитие мышления, но блокирует его.

Ещё одним «родимым пятном» и истоком ограниченности традиционного подхода становится гипертрофия в понимании места и роли формальной логики в учебной математической деятельности (зримо проявляющаяся в форме пуризма при обучении математике в старших классах, а ещё более зримо — в характере обучения математике в вузах) и недооценка (если не полное игнорирование) эмпирической и «допонятийных» форм мышления.

Заслуга Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова — в постановке задачи о формировании средств осуществления учебной деятельности, направленной на самоизменение ученика как её субъекта, т.е. на то, чтобы ученик в процессе учения был, говоря словами Пиаже, архитектором собственного интеллекта, в осознании важности и необходимости постановки цели: формировать у школьников теоретический уровень мышления и в разработке методов движения к этой цели, прежде всего — эвристического метода обучения, адекватного задаче «открытия» содержательного обобщения.

С другой стороны, умаление роли эмпирического мышления, роли «допонятийных» форм мышления ограничивает её возможности, что обязательно проявится при обучении в старших классах, а тем более на вузовском уровне обучения математике.

Сказанное трудно не отнести и к реформе математического образования А.Н. Колмогоровым вместе с его единомышленниками. Эта реформа произвела поистине геологический сдвиг в ментальности нашей педагогической общественности. Но при всех её выдающихся теоретических и методических достижениях она не прошла. Причина этого видится прежде всего в умалении её авторами места и роли допонятийных и эмпирических форм мышления в учебной математической деятельности, а в результате — в обеднении той содержательной, той деятельностной, той мыследеятельностной базы, на которой только и может происходить восхождение на теоретический уровень мышления.

Важное отличие системы Занкова — объединение в определённую функциональную систему таких способов действия, которые разнохарактерны по своей природе, ибо «образование систем, включающих разнохарактерные способы действия, является, по-видимому, важнейшей линией умственного развития» (ср. с «монистическим» принципом, которому следует система Эльконина — Давыдова).

Один из ведущих принципов, на которых основана система Занкова, — принцип ведущей роли теоретических знаний. Но ни в работах Л.В. Занкова, ни в работах его учеников не ставится вопрос о месте и роли в обучении «допонятийных» форм мышления — необходимых средств освоения теоретических знаний. Не роднит ли это систему Занкова с системой Эльконина — Давыдова? Не есть ли это проявление гипертрофии в понимании места и роли рационального начала в учебной математической деятельности? Не есть ли это проявление той самой «великой иллюзии… — веры в рациональную природу человеческого интеллекта»?

Строя новые системы обучения, явно исходят из провозглашаемых целей обучения, но обычно их построение основывается на средствах, изначально возводимых в ранг системообразующих принципов, и эти принципы провозглашаются как непреложные, как всеобщие, как категорические императивы. Тем самым строящиеся системы обрекаются на герметичность, на развитие в предзаданных рамках.

Претендуя на роли целостных систем обучения, выступая в этих ролях, системы Занкова и Эльконина — Давыдова предстают как несовместные. Эта несовместность усиливается, обостряется тем, что приверженцы этих систем настаивают на всеобщности принципов, полагаемых в качестве их оснований.

Но не естественней ли в этих системах, представляющих выдающиеся достижения, выдающиеся прорывы в методах и средствах обучения, в принципах, на которых они основываются, в используемых ими средствах видеть взаимно дополнительные компоненты, дополнительные аспекты органичной, полнокровной и принципиально открытой системы обучения, способной к саморазвитию, который сопровождается наращиванием многомерности?

Какой видится эта ещё не существующая система обучения математике, какой она должна быть? Какие цели она должна преследовать?

В учебной математической деятельности, направляемой на приобщение к новому методу, к новой понятийной системе, должны участвовать поисковая деятельность, направленная на «открытие» метода, и поисковая деятельность, направленная на отыскание возможностей его применять к единичному и особенному и сопровождающаяся «открытиями» ситуативного характера. Её развитие не может не сопровождаться столкновениями с тупиковыми ситуациями, преодолением стереотипов, рождаемых на стадии первичного применения метода в частных ситуациях, активизацией рефлексивной деятельности (открывающей возможность восхождения к метауровневым рассмотрениям), более масштабной поисковой деятельностью, направленной на преодоление ограниченности метода. Так что не только «открытие» метода, но и его освоение нуждаются в активной, разномасштабной и разнонаправленной поисково-исследовательской деятельности.

Таким образом, в учебной математической деятельности должны участвовать деятельность во многом детерминированная, направленная на применение метода (её крайняя, предельно детерминированная форма представляет использование алгоритма), и недетерминированная, по самой своей сути деятельность поисковая, венчающаяся творческими продуктами — как малыми «открытиями», «открытиями» ситуативного характера, так и «открытиями» общих математических понятий.

Как и во всякой сложной деятельности, в учебной математической деятельности должны взаимодействовать диады взаимно дополнительных, «полярных» начал. И диада *следование методу — поисковая деятельность,* или, короче, — *метод — поиск*, — одна из тех немногих диад, которые должны играть в этой деятельности системообразующую, системопорождающую роль.

• Если в обучении доминирует первый член этой диады, то не получает развитие поисковая деятельность. В результате обучение утрачивает развивающий характер и вырождается в догматическое, лишённое внутренней полилогичности.

• Если в обучении доминирует второй член диады, то это приводит главным образом к развитию креативности «по горизонтали». Таков чаще всего встречающийся эффект «олимпиадной» подготовки, порождающий «техническую» изощрённость, направляемую на развитие «по горизонтали», и не только не рождающий «споры» развития «по вертикали», восхождения по метауровневым ступеням и углубления в методологическую рефлексию, но формирующий стереотипы, препятствующие этому.

Полнокровное функционирование и развитие какого-либо из компонентов диады не может происходить без полнокровного функционирования и развития другого. Оно происходит тогда, когда они активно взаимодействуют как равноценные и, что особенно существенно, как самоценные. И только в этом случае поисковая деятельность будет работать на развитие внепонятийных форм мышления, а последние — на развитие поисковой деятельности. И только в этом случае взаимодействие компонентов диады *метод — поиск* будет продуктивным, несущим возможность полнокровного, развивающего обучения. Эта возможность возрастает, когда в обучении заметную роль играют процессы, направленные на восхождение «по вертикали», когда такие процессы сопровождаются наращиванием многообразных связей как на каждой из ступеней восхождения, так и между этими ступенями.

Органика функционирования рассматриваемой диады достигается, сохраняется и развивается благодаря посреднику между её компонентами, в роли которого выступает учебная задача как «единство цели действия (важными компонентами которой являются развитие метакогнитивных механизмов, развитие ориентировки, а посредством этого — развитие стратегий поисково-исследовательской деятельности) и условий (и средств) её достижения», что приводит к рождению триады *метод — учебная задача — поиск.* Характер обучения математике во многом определяется характером функционирования таких триад, а последний — характером учебных задач (включая способы их реализации).

В процессе овладения учениками «открытым» ими новым понятием, новым методом деятельность триады, сопровождаемая активной работой механизмов анализа и «ближней» поисковой деятельностью, направляется на выстраивание новой системы, новых действий. Развитие поисковой деятельности в новых условиях, расширение её масштабов, развитие координации действий (ведущей одновременно и к активизации работы механизмов синтеза, и к развитию дифференциации представлений и способов действия), развитие ориентировки — всё это приводит к тому, что рождается содержательный синтез, или опыт овладения новым методом, а с ним и произвольность действий.

При всей разноприродности, «полярности» компонентов диады *метод — поиск* учебная деятельность может быть построена так, чтобы их «противостояние» снималось. Это достигается при постановке и решении учебных задач, состоящих в «открытии» методов (как содержательных обобщений), при осознании роли методов как средств поисковой деятельности. Учебная деятельность должна быть построена так, чтобы поисковая деятельность направлялась на «открытие» и освоение методов и чтобы «открытые» методы служили средствами развития поисковой деятельности. Такое построение учебной деятельности существенно повышает её продуктивность.

Но приведёт ли только это к устранению широкого разброса в позициях по вопросам о содержании и методах обучения математике в общеобразовательной школе?

Наиболее распространены позиции «теоретиков» и «прикладников». Первые ориентируются на язык, стиль и содержание «чистой» математики (адаптированные применительно к общеобразовательной школе) и рассматривают математическую подготовку прежде всего как необходимый компонент общей культуры. Вторые рассматривают математическую подготовку прежде всего как средство решения практических задач. Поиски удовлетворительных вариантов обучения математике ведутся, как правило, на путях «разумных компромиссов».

«Прикладники» считают, что воспитательные цели преподавания математики достигаются подготовкой прикладной направленности. Они полагают, что математические концепции имеют естественно-научное происхождение, и не устают подчёркивать, что история математики убедительно демонстрирует продуктивность обращения к этим её истокам.

Более того, многие «прикладники» полагают, что математику следует рассматривать как одну из естественных наук. Тем самым они игнорируют то принципиально важное обстоятельство, что математика (а прежде всего её классическая база) есть продукт Большого Опыта, что математические исследования «генетически» привязаны к Большому Опыту и что уже поэтому место математики в системе наук особое.

Что же касается мнения о естественно-научном происхождении математических концепций, то постановка задачи и возникновение потребности в образовании понятия не могут рассматриваться как причины этого процесса, ибо они в состоянии лишь пустить в ход процесс решения задачи, но не обеспечить его осуществление. Ссылка на цель как на действующую силу, играющую решающую роль в процессе образования понятий, так же мало объясняет нам реальные каузально-динамические и генетические отношения и связи, составляющие основу этого сложного процесса, как объяснение полёта пушечного ядра из конечной цели, в которую попадает это ядро.

Фундаментальные математические концепции являются «отражениями», моделями не «внешнего мира», а способов его «отражения» (являющихся продуктами математической культуры), и в этом объяснение их универсальной приложимости.

Математические понятия, математические методы формируются и в прикладных рассмотрениях, но в них они фигурируют лишь как средства решения задач. В теоретических же рассмотрениях они становятся предметом изучения, а это представляет собой принципиально иной тип деятельности.

Признавая необходимость прикладной подготовки, важно помнить о том, что только её недостаточно для воспитания той высокой интеллектуальной культуры, которую может дать основательное изучение «чистой» математики.

В стане «прикладников» нет единства. «Прикладники» представлены главным образом «фундаменталистами» и «утилитаристами», позиции которых принципиально непримиримы. Ориентация обеих сторон на широкое использование компьютеров ведёт к ещё большей их непримиримости.

«Фундаменталисты» считают, что прикладная подготовка невозможна без основательного овладения теоретической базой, что компьютеризация, приводя к возможности и необходимости изменения духа и структуры курса математики, отнюдь не приводит к его опрощению. Она требует усиления его концептуального плана, а значит, и более напряжённой самостоятельной работы школьников.

«Утилитаристы» в отличие от «фундаменталистов» считают, что курс математики должен научить приёмам (алгоритмам) решения некоторых (прикладных) задач. Они полагают, что с улучшением программного обеспечения компьютеров, с совершенствованием обучающих программ необходимость напряжённой самостоятельной работы при изучении математики будет всё меньшей. Ни проблем формирования математических понятий, ни проблем обоснования математических методов для «утилитаристов» не существует. И они по-своему правы: ведь для того чтобы научиться пользоваться дубиной, совсем не обязательно изучать сопротивление материалов.

Те, кто принимают в качестве должного «утилитаристское» понимание целей, содержания и методов обучения математике, могут с полным основанием заявить, что каждый человек, независимо от его образования и развития, способен на успешную деятельность в области математики.

Есть немало людей, считающих, что если «утилитаристский» подход к обучению математике и заслуживает внимания, то лишь как потенциальная опасность для дела образования и воспитания. Такая оценка — следствие незнания истинного положения дел: в отличие от школ, учителя которых пока ещё не свободны хотя бы от буквы официальных программ, в ряде вузов «утилитаристы» уже одержали убедительную победу (в этом первенствуют некоторые технические вузы). Избавившись от балласта профессионализма и общей культуры (а также от носителей этого балласта), они устремили свой свободный полёт к зияющим высотам утилитаристской «науки».

Нет единства и в стане «теоретиков». Главной (но не единственной) линией расхождения является отношение к диаде *нестрогие понятия — строгие понятия.* Рассматриваемая «статично», вне связи с генезисом представлений, приведшим к формированию строгих понятий, вне связей с характером их функционирования и развития, она воспринимается как диада полярностей. Дух системы обучения математике, её направленность, степень её эффективности во многом определяются характером отношения к этой диаде.

В соответствии с последним «теоретики» подразделяются на «популистов» и «пуристов».

Для первых обращение к строгим понятиям — это лишь манера изложения и не более того, а изучение фактически ведётся на интуитивном или полуинтуитивном уровне.

Для вторых обращение к нестрогим понятиям — лишь методический приём; обучение направляется на изучение строгих понятий самих по себе, в отрыве от их истоков, от тех целей и задач, которые привели к формированию этих строгих понятий. Предметом изучения в этом случае становятся внутренние вопросы математики.

«Пуристский» подход к решению задач практического характера основывается на замене исследуемых объектов объектами иной природы — их (математическими) идеализациями, которые служат их продуктивными моделями. Эта замена не осознаётся; специальному рассмотрению не подвергается сама идея моделирования, а значит, такая замена превращается в подмену и «пуристский» подход к обучению превращается в «популистский».

Известная часть «пуристов» настроена достаточно либерально и готова идти на некоторое допущение в преподавании нестрогих рассуждений и нестрогих понятий, то есть на более широкое использование подмен.

Поскольку нестрогие и строгие понятия взаимодействуют опосредованным образом, поскольку вторые во взаимодействиях с первыми выступают как их модели, то естественно и продуктивно говорить не о диаде *нестрогие понятия — строгие понятия*, а о триаде *нестрогие понятия — моделирование — строгие понятия*. Проектирование полнокровной системы обучения математике невозможно без прояснения вопроса о том, каким должен быть характер функционирования этой триады.

При всей важности роли, которую должно играть в учебной математической деятельности обращение к диаде *нестрогое понятие — строгое понятие*, метод моделирования в этой деятельности используется не только применительно к понятиям. Поэтому естественно говорить о диаде более широкого вида: *объект — модель*, а значит, и о посреднике между её компонентами — о моделировании. Таким образом, естественно говорить о триаде *объект — моделирование — модель*.

Рассматриваемые в единстве цель, условия и средства её достижения как составляющие учебной деятельности образуют ядро второго компонента этой тройки и представляют собой учебную задачу.

Таким образом, учебная задача призвана играть роль посредствующего звена как во взаимодействии компонентов диады *объект — модель*, так и во взаимодействии компонентов диады *метод — поиск*. Вот почему процесс моделирования в учебной математической деятельности (осуществляемый во всей своей целостности), т.е. процесс функционирования триады *объект — моделирование — модель* не может не сопрягаться с процессом функционирования триады *метод — учебная задача — поиск*. А процесс функционирования триады *метод — учебная задача — поиск* не может не сопрягаться с процессом функционирования триады *объект — моделирование — модель*. Отсюда вывод, настолько же очевидный, насколько и важный: учебная задача — это центральное звено учебной математической деятельности.

В том, что мышление есть процесс «непрерывно совершающегося обратимого перевода информации с собственно психологического языка пространственно-предметных структур… то есть языка образов, на психолингвистический, символически-операторный язык»(Л.М. Веккер), язык знаков, трудно не усмотреть, что метод моделирования присущ самой природе мышления, что он рождается и развивается вместе с рождением и развитием «символически-операторных», знаковых средств.

А.Н. Леонтьев «обосновал положение о том, что ядро психологической теории деятельности — принцип предметности. Предмет понимается как то, на что направлено действие субъекта и что выделяется им из объекта в процессе его преобразования. Преобразование есть изменение внутреннего образа объекта» (В.В. Давыдов). Предмет выступает в качестве модели объекта. Таким образом, идея моделирования выражает само существо принципа предметности. Принцип предметности — это принцип моделирования.

Используемые в процессах формирования общих математических понятий процессы моделирования становятся системообразующим началом в развёртывании арсенала средств обучения математике. Более того, такие процессы становятся органичным системообразующим, системопорождающим началом, соответствующим самой природе математической деятельности.

Становясь предметом изучения, процессы моделирования способствуют усмотрению в математике области деятельности, ведающей развитием концептуального аппарата и «технических» средств моделирования.

Процессы моделирования в учебной математической деятельности, осуществляемые во всей своей целостности, не могут не сопрягаться с процессом функционирования триады *метод — учебная задача — поиск*. Более того, такие процессы вызывают функционирование множества других подобных триад и их взаимодействия. А значит, процессы моделирования способствуют развитию не отдельных качеств мышления в их изолированности, а органичному математическому и общему интеллектуальному развитию учащихся.

Процессы моделирования способны играть стержневую, системопорождающую роль в учебной математической деятельности, ведущая цель которой — формирование и развитие поисково-исследовательских стратегий, а ведущее средство — формирование и развитие концептуального аппарата и «технических» средств математического моделирования.

Процессы моделирования, и прежде всего процессы восхождений от размытых, нечётких, синкретичных представлений к строгим и работоспособным понятиям, работают и на «методос», и на «годос», на поисковую деятельность, направленную на прорыв, на их активное взаимодействие, при котором «годос» становится средством развития «методоса», а «методос» — средством развития «годоса».

Непросто найти такое пособие для учителей, в котором рекомендуемые методы приобщения к строгим математическим понятиям не основывались бы на редукционистском, на механистическом их понимании, на убеждении, что понятия характеризуются единственно наборами признаков и что они должны осваиваться через манипулирование этими признаками. Однако уже первичные понятия математического анализа не выразимы наборами признаков. Они представляют сложные целостности, не сводимые к более простым компонентам. Приобщение к этим понятиям с помощью их строгих определений вызывает у школьников немалые трудности, которые усугубляются присущими им «неоправданно» большим объёмом и «патологическими» случаями. Высокий уровень их логической сложности контрастирует с простотой формирования интуитивных представлений — источников этих поятий. Путь к таким понятиям должен быть путём от целого к целому, от синкретичного целого к развитому целому.

Онтогенетический подход позволяет органично воплощать такие пути. Предлагаемый в книге путь, например, к понятию предела последовательности, не есть путь преодоления логической сложности его определения. Это «внелогический» путь. «Логический», «однополушарный» подход к понятию, природа которого «двуполушарна», подход, движимый тягой к беспочвенной строгости, т.е. строгости, не вырастающей из содержательной стороны дела, приводит лишь к идиосинкразии к математике.

Процесс формирования строгих общих понятий, следующий онтогенетическому подходу, состоит из пяти стадий:

1) формирование, использование и развитие интуитивных представлений, служащих прототипами, истоками понятий (непрерывности, предельного перехода, производной, и т.д.), которые нужно освоить;

2) осознание размытости этих представлений и необходимости их уточнить;

3) процесс уточнения представлений, приводящий к строгому понятию как средству решения задач, не решаемых на уровне представлений;

4) преображение сформированного понятия с помощью формально-логических средств,

обретение им нового качества, новой природы; овладение преображённым понятием, выявление качественно новых возможностей, которые оно несёт;

5) осознание того, что преображённое понятие есть продуктивная модель интуитивных представлений, послуживших её истоком.

Если понятие, ставшее результатом уточнения исходных представлений, мыслится лишь в рамках исходных представлений, если при этом многое, с ними связанное, «имеется в виду», хоть и не оговаривается явно, а часто и не осознаётся, то использование способа мышления, который «навязывает» формальная логика, «очищает» понятие от всего неявного и превращает его в понятие существенно иной природы по сравнению с исходными представлениями и с понятием, ставшим результатом их уточнения. И это преображённое понятие несёт в себе качественно иные возможности, чем просто уточнение.

Процесс формирования строгого понятия, отправляющийся от размытых представлений, выступает как процесс «деконструкции» этих представлений, как процесс отделения способа действий от его «тела».

Становясь предметом исследования, такой процесс превращается в процесс «деконструкции» самого способа мышления, становится процессом отделения этого способа мышления от его «тела», от тех способов действия, из которых он состоит, от тех тактик внимания, которые его направляют, от той конкретной цели, к которой он направлен. Так рождается «внутренний» метасистемный компонент системы обучения математике, деятельность которого направлена на постижение специфики математической деятельности, на постижение её природы, её методологии. Исследование направляется на восхождение к «Истинному Я» этого процесса, или к матетическому знанию, к Mathesis (наука об умении учиться).

Рождение «внутреннего» метасистемного компонента открывает возможность формировать «внешний» метасистемный компонент, деятельность которого направляется на исследование связей между «внутренними» метасистемными компонентами системы обучения математике и систем обучения другим предметам (не в последнюю очередь — родному и иностранным языкам), на раскрытие родства их методологий, на раскрытие единства законов их развития. И это открывает возможность превращать математическое развитие учащихся в их общее умственное развитие.

Таким образом, при онтогенетическом подходе процессы моделирования, и в первую очередь процессы формирования строгих общих понятий и инициируемая ими метарефлексивная деятельность, играют стержневую, системопорождающую роль в учебной математической деятельности, ведущая цель которой — формировать и развивать поисково-исследовательские стратегии, а ведущее средство — формирование и развитие концептуального аппарата и «технических» средств математического моделирования.

Процессы моделирования активизируют работу всех психологических механизмов, участвующих в учебной математической деятельности, рождают их координацию, их системное взаимодействие и стимулируют их развитие.