

МНОГОПЛАНОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ НА ЕДИНОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ЭКЗАМЕНЕ В 2019 Г. (НА ПРИМЕРЕ ЧУВАШСКОЙ РЕСПУБЛИКИ)

Володина Евгения Валерьевна,

кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, e-mail: evg_volodina@mail.ru

Ильина Ирина Игоревна,

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, e-mail: ir_rus@mail.ru

Сироткина Марина Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, e-mail: sme74@mail.ru

В СТАТЬЕ РАССМОТРЕНЫ РАЗНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В ЧУВАШСКОЙ РЕСПУБЛИКЕ. ПРИВОДИТСЯ ДИНАМИКА РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ИЗУЧАЕМОГО ТИПА В УКАЗАННОМ РЕГИОНЕ. ПОКАЗАНО, ЧТО В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЫБРАННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ НУЖДАЮТСЯ В УТОЧНЕНИИ И (В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ) ИЗМЕНЕНИИ; ЭТО ТРЕБУЕТ ОТ ЭКСПЕРТА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ НЕШАБЛОННОСТИ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ.

• единый государственный экзамен • математика • задачи с параметром • многоплановый подход

Задачи с параметрами относятся к заданиям повышенной сложности в ЕГЭ, так как не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа. При этом только сильно подготовленные ученики, набирающие 80–100 баллов, выполняют это задание. Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, так как с их помощью проверяются техника владения математическими формулами и мето-

дами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащихся и их математической культуры. Анализ данных табл. 1 показывает, что немногие из выпускников приступают к решению таких задач, и процент верных ответов невелик, всего лишь 2–3%, поэтому приобретение навыков выполнения учащимися школ трудных, нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, по-прежнему остаётся актуальным.

Основными методами решения являются два: аналитический и геометрический. При аналитическом решении требуется провести исследование задачи при различных значениях параметра с использованием равно-

Таблица 1

**Динамика результатов выполнения задания с параметром
в Чувашской республике в 2019 г.**

Обозначение задания в работе	Проверяемые элементы содержания/ умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Чувашской республике в 2019 г. ¹			
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе 61–80 т.б.	в группе 81–100 т.б.
18	Уметь решать уравнения и неравенства с параметром	Высокий	2,73	0,00	0,86	19,46

сильных формул, обоснованных логических рассуждений. Так, задание ЕГЭ с параметром в Чувашской республике в 2018 г. представляло собой систему уравнений, решение которой не сводилось к геометрическим объектам, требовалось аналитическое приведение к квадратным уравнениям с исследованием количества их решений в зависимости от значения параметра. Использование геометрического метода решения означает сведение данных задачи (уравнений, неравенств) к известным геометрическим объектам (прямым, параболам, окружностям) и исследование построенной геометрической модели в зависимости от поставленного условия [2, 3].

Совсем другая ситуация с заданием 18 в 2019 г. Приведём решение и критерии оценивания одного из вариантов ЕГЭ.

Задача 18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{x^2 + x + a}{x^2 - 2x + a^2 + 6a} = 0$ имеет ровно два различных корня.

Рассмотрим разные подходы к решению данной задачи и проанализируем критерии оценивания (табл. 2–4) в зависимости от типа рассуждений.

Решение 1. Корнями исходного уравнения являются корни $x^2 + x + a = 0$ при условии $x^2 - 2x + a^2 + 6a \neq 0$. Уравнение $x^2 + x + a = 0$ задаёт на плоскости Oxa параболу $a = -x^2 - x$ с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Значит, уравнение имеет один корень при $a = \frac{1}{4}$, два корня при $a < \frac{1}{4}$ и не имеет корней при $a > \frac{1}{4}$. Уравнение $x^2 - 2x + a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (a+3)^2 = 10$ задаёт окружность с центром в точке $(1, -3)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Координаты точек пересечения окружности ω с параболой $a = -x^2 - x$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a^2 + 6a = 0, \\ a = -x^2 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x + x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 6x = 0, \\ a = -x^2 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = 0, \\ a = -x^2 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-2)(x+2)^2 = 0, \\ a = -x^2 - x. \end{cases}$$

Значит, окружность ω пересекается с параболой $a = -x^2 - x$ в точках $(0;0), (-2;-2), (2;-6)$. Следовательно, условие $x^2 - 2x + a^2 + 6a \neq 0$ выполнено для всех корней уравнения $x^2 + x + y = 0$ при всех a ,

¹ Сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за конкретное задание, соотносённое с количеством участников группы.

кроме $a = -6$, $a = -2$, $a = 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня

при $a \in (-\infty; -6); (-6; -2); (-2; 0); \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -6); (-6; -2); (-2; 0); \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Решение 2. Сводится к построению геометрической модели на координатной плоскости при $y = a$. Уравнение $x^2 + x + y = 0$ задаёт на плоскости Oxy параболу $y = -x^2 - x$ с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Уравнение $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{10})^2$ задаёт окружность с центром в точке $(1; -3)$ и радиусом $\sqrt{10}$ (рис. 1). Координаты точек пересечения окружности ω с параболой $y = -x^2 - x$ $A(-2; -2)$, $B(0; 0)$, $C(2; -6)$ определяются по графикам, но обязательно уточняются подстановкой в исходные уравнения.

Следовательно, условие $x^2 - 2x + y^2 + 6y \neq 0$ выполнено для всех точек параболы $y = -x^2 - x$, кроме $y = -6; -2; 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня

при $a \in (-\infty; -6); (-6; -2); (-2; 0); \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Критерии оценивания идентичны приведённым выше.

Особый интерес представляют собой решения учащихся, отличающиеся от рассмотренных.

Решение 3. Рассмотрим функции $y = x^2 + x + a$ — множество парабол с вершинами в точках и $y = x^2 - 2x + a^2 + 6a$ — множество парабол с вершинами в точках $(1; a^2 + 6a - 1)$. Параболы пересекаются и имеют хотя бы одну общую точку на оси абсцисс (общий корень),

если система
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + a^2 + 6a, \\ y = x^2 + x + a, \\ x^2 + x + a = 0; \end{cases}$$
 имеет решение.

Таблица 2

Критерии оценивания решения 1

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точки $a = \frac{1}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = -2$ и (или) $a = \frac{1}{4}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

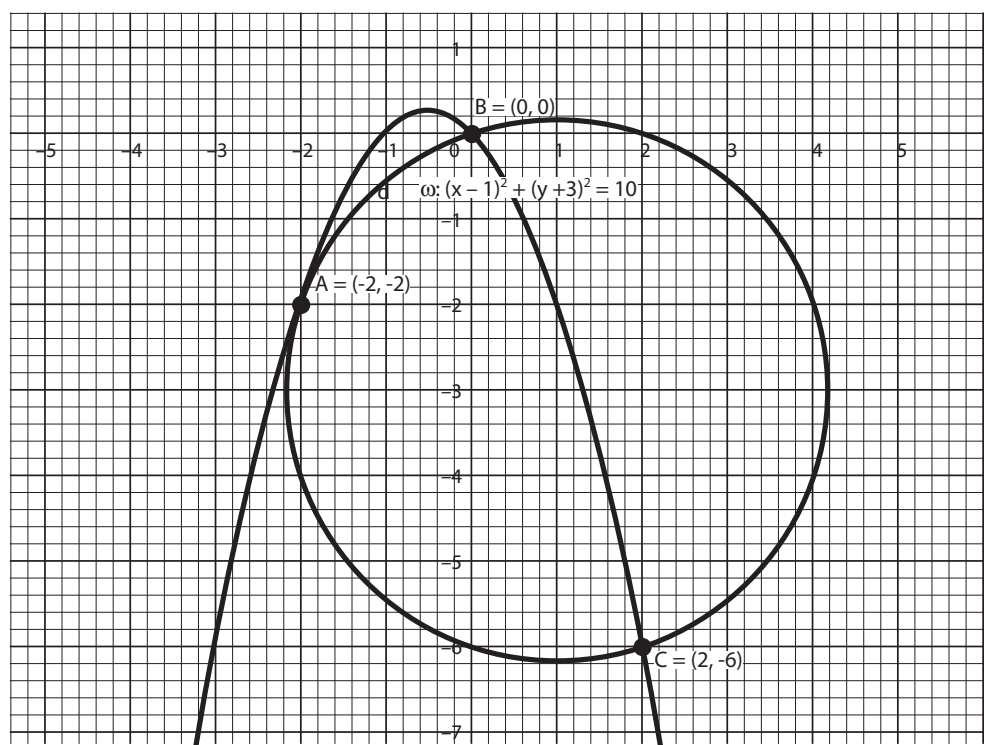


Рис. 1. Геометрическая интерпретация решения задачи 18

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + x + a = x^2 - 2x + a^2 + 6a, \\ x^2 + x + a = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{a^2 + 5a}{3}, \\ x^2 + x + a = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{a^2 + 5a}{3}, \\ \frac{a^4 + 10a^3 + 25a^2}{9} + \frac{a^2 + 5a}{3} + a = 0. \end{cases}$$

Уравнение $a^4 + 10a^3 + 25a^2 + 3a^2 + 15a + 9a = 0 \Leftrightarrow a^4 + 10a^3 + 28a^2 + 24a = 0$,
 $a(a^3 + 10a^2 + 28a + 24) = 0$ имеет корни $a = -6$, $a = -2$, $a = 0$. Значит, при этих значениях параметра хотя бы один корень числителя и знаменателя совпадает, что не подходит. При этом числитель имеет один корень при $a = \frac{1}{4}$, два корня при $a < \frac{1}{4}$ и не имеет корней при $a > \frac{1}{4}$, что можно определить рассмотрением дискриминанта соответствующего уравнения. Значит, при $a \in (-\infty; -6); (-6; -2); (-2; 0); \left(0; \frac{1}{4}\right)$ уравнение имеет два различных корня.

Большинство учащихся при решении этой задачи рассуждали стандартно в соответствии с её условием.

Решение 4. Корнями исходного уравнения являются корни $x^2 + x + a = 0$ при условии $x^2 - 2x + a^2 + 6a \neq 0$. Корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ существуют при $D = 1 - 4a \geq 0$, при $a < \frac{1}{4}$ их будет два, $x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$. Для уравнения $x^2 - 2x + a^2 + 6a = 0$ корни существуют при $D = 4 - 4(a^2 + 6a) \geq 0$, $a^2 + 6a - 1 \leq 0$, $a \in [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$,
 $x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2 - 6a}$.

Таблица 3

Критерии оценивания решения 3

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точки $a = \frac{1}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = -2$ и (или) $a = \frac{1}{4}$, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух парабол и системе уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Далее требуется рассмотреть два случая, иначе включение условия $a \in [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$ отбрасывало множество $a \notin [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$, что не соответствовало вопросу задачи.

1. При $a < \frac{1}{4}$ и $a \notin [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$ исходное уравнение имеет два корня, что нам подходит.
2. При $a < \frac{1}{4}$ и $a \in [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$ (число $-3 + \sqrt{10}$ лежит левее 0,25, что нужно уточнить) корни числителя и знаменателя не должны совпадать.

Рассмотрим соответствующие случаи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} = 1 - \sqrt{1 - a^2 - 6a}, (1) \\ \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} = 1 - \sqrt{1 - a^2 - 6a}, (2) \\ \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} = 1 + \sqrt{1 - a^2 - 6a}, (3) \\ \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} = 1 + \sqrt{1 - a^2 - 6a}, (4) \\ a \in [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}] \end{array} \right.$$

Значения a , являющиеся решением четырёх рассмотренных случаев, нам не подходят, их следует убрать из рассматриваемого промежутка $a \in [-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}]$, причём только (3) можно не решать, так как оно не имеет решений при положительной правой и отрицательной левой частях. Получаем, что решение $a = -2$ — (1), $a = 0$ — решение (2), $a = -6$ — решение (4), причём их нахождение требует грамотного и обоснованного решения иррациональных уравнений. Данный шаг в основном не был выполнен в полном объёме, корни указаны без обоснований, что объяснимо сложностью и многочисленностью требуемых вычислений.

Таблица 4

Критерии оценивания решения 4

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точки $a = \frac{1}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающихся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = -2$ и (или) $a = \frac{1}{4}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Определены корни квадратного уравнения в числителе при условии $a < \frac{1}{4}$, сформулировано выполнение требования задачи: корни числителя не должны совпадать с корнями знаменателя	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Итак, при соблюдении всех этапов решения и учитывая два рассмотренных основных

случая, получаем ответ $a \in (-\infty; -6); (-6; -2); (-2; 0); \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Отличие имеющихся этапов решения 4 от авторского требовало уточнения и изменения критериев оценивания.

Данное решение при всей своей очевидности требует многочисленных вычислений, правильного и обоснованного решения сложных иррациональных уравнений, которые сводились к алгебраическим уравнениям 4-й степени. Поэтому большинство учащихся выполнили только этап решения, оцениваемый в 1 балл (рис. 2), почти в 7 раз меньше экзаменуемых

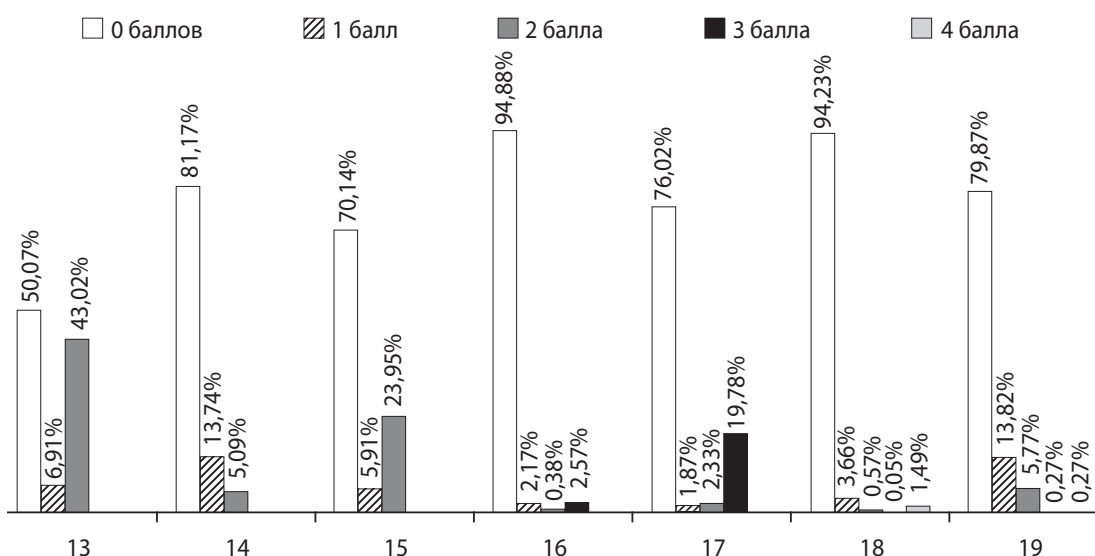


Рис. 2. Выполнение заданий с развернутым ответом КИМ ЕГЭ-2019 по математике профильного уровня выпускниками общеобразовательных организаций Чувашской республики, %

получили 2 балла. Дальнейшее решение задачи учащимися в основном было либо необоснованным, либо в корне неверным.

Таким образом, при подготовке учащихся к решению задач с параметром необходимо учитывать следующие особенности:

- 1) важен выбор наиболее рационального метода решения в зависимости от условия задачи;
- 2) решение задачи по возможности несколькими способами позволяет оценивать сложность того или иного решения и выбирать оптимальное, а также проверить уровень овладения математическими компетенциями [4, 5];
- 3) визуализация с помощью специальных программ, привлечение web-ресурсов [6] помогает ученику в понимании задачи и определении направления её решения;
- 4) особое внимание следует уделить равносильным переходам при решении уравнений и неравенств, так как применение неравносильных преобразований требует дополнительных условий и их проверки, что значительно усложняет работу. □

Литература

1. Анализ результатов единого государственного экзамена и основного государственного экзамена в Чувашской республике в 2019 году: дидактический и статистический аспекты. — Чебоксары: БУ «Республиканский центр новых образовательных технологий» Минобрразования Чувашии, 2019. — 420 с.
2. Володина Е.В., Ильина И.И. Решение задач с параметром средствами GEOGEBRA // Состояние и перспективы развития ИТ-образования: сб. докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции. — 2019. — С. 382–387.
3. Володина Е.В., Ильина И.И., Тимофеева Н.Н. Преимущества применения интерактивного Web-приложения для поиска решения математических задач с параметром // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т. 3. — № 8–1 (19–1). — С. 305–306.
4. Лавина Т.А., Ильина И.И. Структура и содержание информационно-математической компетенции бакалавров технических направлений // Вестник Череповецкого государственного университета. — 2018. — № 4 (85). — С. 132–140.

5. Володина Е.В., Ильина И.И. Развитие математических компетенций у студентов технического профиля // Математические модели и их приложения: сб. науч. трудов. — Чебоксары, 2017. — С. 110–118.
6. Володина Е.В., Ильина И.И., Тимофеева Н.Н. Разработка интерактивного web-приложения для решения математических задач с параметром с помощью динамической графики // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Естественные науки. — 2016. — № 1. — С. 97–103.

Literatura

1. Analiz rezul'tatov yedinogo gosudarstvennogo ekzamina i osnovnogo gosudarstvennogo ekzamina v Chuvashskoy respublike v 2019 godu: didakticheskiy i statisticheskiy aspekty. — Cheboksary: BU «Respublikanskiy tsentr novykh obrazovatel'nykh tekhnologiy» Minobrazovaniya Chuvashii, 2019. — 420 s.
2. Volodina Ye.V., Il'ina I.I. Resheniye zadach s parametrom sredstvami GEOGEBRA // Sostoyaniye i perspektivy razvitiya IT-obrazovaniya: sb. dokladov i nauchnykh statey Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. — 2019. — S. 382–387.
3. Volodina Ye.V., Il'ina I.I., Timofeyeva N.N. Preimushchestva primeneniya interaktivnogo Web-prilozheniya dlya poiska resheniya matematicheskikh zadach s parametrom // Aktual'nyye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika. — 2015. — T. 3. — № 8–1 (19–1). — S. 305–306.
4. Lavina T.A., Il'ina I.I. Struktura i sodержaniye informatsionno-matematicheskoy kompetentsii bakalavrov tekhnicheskikh napravleniy // Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2018. — № 4 (85). — S. 132–140.
5. Volodina Ye.V., Il'ina I.I. Razvitiye matematicheskikh kompetentsiy u studentov tekhnicheskogo profilya // Matematicheskiye modeli i ikh prilozheniya: sb. nauch. trudov. — Cheboksary, 2017. — S. 110–118.
6. Volodina Ye.V., Il'ina I.I., Timofeyeva N.N. Razrabotka interaktivnogo web-prilozheniya dlya resheniya matematicheskikh zadach s parametrom s pomoshch'yu dinamicheskoy grafiki // Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federal'nogo universiteta. Seriya: Yestestvennyye nauki. — 2016. — № 1. — S. 97–103.