УДК 372.851

ПРИНЦИП ПРИРОДОСООБРАЗНОСТИ и обучение математике

Владимир Афанасьевич Тестов,
профессор кафедры математики Вологодского государственного университета, доктор педагогических наук, e-mail vladafan@inbox.ru

В настоящее время в математическом образовании обостряется проблема мотивации учащихся, в значительной степени возникающая из того, что при изучении математики не достигается понимание школьниками основных понятий и методов. Такое положение во многом объясняется тем, что в изложении учебного материала опора делается не на природные особенности детей, а на чисто логическую последовательность материала. Считается, что учащийся, после того как он приложит определённые усилия, сможет постигнуть логику научного изложения. Однако практика показывает, что такой подход приводит к тому, что достаточно большое количество учащихся так и не понимают логику математики и лишь запоминают какие-то факты. Это вызвано тем, что в преподавании математики на первое место чаще всего ставят принцип научности, а о принципе природосообразности обучения либо вообще забывают, либо его отодвигают на второй план. Это приводит к отсутствию опоры на психологические закономерности формирования математических знаний, которая сделала бы обучение математике более доступным.

• *принцип научности* • *поэтапность обучения* • *скалярная величина* • *математическая индукция* • *условие минимальности*

Цель статьи — рассмотреть новые подходы в методике обучения математики, основанные на принципе природосообразности, способствующих лучшему пониманию учащимися основных понятий и методов математики.

Принцип природосообразности один из наиболее известных педагогических принципов. Этот принцип рассматривает отношение к человеку при обучении как части природы, предусматривает опору на его собственные силы и задатки, данные от природы, приведение процессов обучения в соответствие с этапами природного развития человека. Идею этого принципа высказывали в трудах учёные Древней Греции и Древнего Рима.

После некоторого периода забвения идея природосообразности обучения была возрождена и научно обоснована Я.А. Коменским. Этим великим педагогом со всей полнотой были раскрыты сущность и значение принципа природосообразности для обучения и воспитания. Он отмечал, что «искусство воспитания сильно не чем иным, как подражанием природе». У Я.А. Коменского было много последователей. Среди них наиболее значимую роль сыграли Дж. Локк, И. Песталоцци, Ф. Дистервег, а также основоположник российской научной педагогики К.Д. Ушинский. Наряду с Яном Амосом Коменским этих учёных с полным основанием можно назвать классиками природосообразной педагогики.

Принцип природосообразности ориентирует педагога искать опору для построения теории и практики обучения в самом ребёнке, в его природных индивидуальных особенностях. В соответствии с этим принципом главный показатель эффективности обучения — свободное развитие ученика в гармонии с окружающей средой, опираясь на «собственные корни». Несмотря на давнюю и богатую историю принципа природосообразности, применение его в российских методиках обучения было и остаётся ограниченным. Дело в том, что методологической основой советской педагогики было совсем другое положение о врождённом равенстве людей, их равных возможностях в обучении и воспитании[1].

[1] *Кумарин В.В.* Педагогика природосообразности и реформа школы. — М.: Народное образование, 2004. — 623 с.; *Беспалько В.П.* Природосообразная педагогика. — М.: Народное образование, 2008. — 512 с.

В это время, особенно в период до середины 1950-х годов, строились и делались попытки реализовать «великие» планы преобразования природы, в том числе и человека. Некоторые советские учёные высказывали абсурдные с современной точки зрения мысли. Так, Т.Д. Лысенко говорил: «В Советском Союзе люди не рождаются. Рождаются организмы. А люди у нас делаются — трактористы, мотористы, академики, учёные и так далее». Л.С. Выготский писал: «Новое общество создаст нового человека. Когда говорят о переплавке человека как о несомненной черте нового человечества и об искусственном создании нового биологического типа, то это будет единственный и первый вид в биологии, который создаст сам себя». В 1920-е годы государством была оказана финансовая поддержка проведению учёным-биологом И.И. Ивановым эксперимента путём межвидового скрещивания человека с приматами по выведению новой (гибридной) породы человека, предназначенной для тяжёлой физической работы в экстремальных условиях[2].

В такой обстановке педагогический принцип природосообразности был объявлен идеалистическим и заменён на гораздо более узкий принцип учёта возрастных и психологических особенностей школьников. То есть это всего лишь особенности, которые следует учитывать, а вовсе не фундаментальные основы педагогического действия. Педагогические требования ко всем школьникам и результатам обучения по всем предметам были единые.

В настоящее время благодаря фундаментальным открытиям в области генетики и молекулярной биологии научно доказано, что люди не равны от природы, а значит, можно говорить о равенстве людей лишь в социально-правовом отношении, но не

[2] *Кулик А.* Российское образование: в плену противоестественной методологии // Проблемы образования. 10/05/2012. http://novznania.ru/archives/2724 (дата обращения: 05.11.2019)

в биологическом. Поэтому настало время возвращаться в русло мировой педагогической мысли и восстановить в правах *принцип природосообразности* как методологическую основу педагогики и методик преподавания отдельных предметов, в том числе математики. Этот принцип некоторые авторы называют «человекоцентризмом», или «антропоцентризмом». В отличие от личностно ориентированного подхода в нём ребёнок рассматривается как целостное единство биологического и социального[3].

Из этого принципа вытекает сразу несколько более частных дидактических принципов, которые хотя и провозглашались в советской педагогике, но не имели решающего значения. Кроме принципа учёта возрастных особенностей учащихся к ним можно отнести индивидуальный подход к учащимся, доступность и посильность обучения, наглядность, от простого к сложному, поэтапность (многоступенчатость) обучения.

В конце XX — начале XXI века в российской педагогике стали появляться работы, лежащие в русле природосообразной педагогики. К ним принадлежат работы В.В. Кумарина, А.М. Кушнира, А. Кулика, последние работы А.В. Хуторского, В.П. Беспалько и других авторов. Однако в методике обучения математике принцип природосообразности пока мало используется. Можно лишь отметить методические разработки А.М. Кушнира по применению этого принципа в обучении математике учащихся начальной школы.

Результаты психологических исследований швейцарского психолога Ж. Пиаже и его сотрудников показали, что генезис психологических структур в наименьшей степени учитывается при формировании математических понятий. Было замечено, что в мышлении ребёнка последовательность формирования топологических и геометрических понятий совсем не совпадает с исторически сложившейся последовательностью этапов изучения геометрии. В раннем возрасте при рисовании ребёнок не различает квадратов, окружностей, треугольников и других метрических фигур, но легко отличает открытые и замкнутые фигуры, нахождение «внутри» или «снаружи» по отношению к границе фигуры. В дальнейшем развитии ребёнок идёт от общих топологических структур в направлении их конкретизации к проективным, а затем метрическим структурам.

Однако в методике обучения математике эти психологические закономерности практически не используются, за исключением попыток И.Я. Каплуновича[4].

Для поэтапности обучения большое значение имела теория Ж. Пиаже об этапах (стадиях) развития мышления ребёнка. Мышление ребёнка в соответствии с этой теорией в развитии проходит последовательно несколько стадий. С рождения ребёнка до 2 лет наблюдается стадия сенсомоторного мышления. С 2 до 6—7 лет наступает стадия наглядного мышления. На этой стадии ребёнок учится обозначать явления окружающего мира при помощи символов. На этом этапе развития мышления ещё отсутствует свойство обратимости мыслительных операций, то есть понимание того, что можно произвести обратное действие. В силу этого недостатка ребёнок не может, в частности, усвоить математическое понятие о сохранении общего числа предметов при разделении их на несколько подгрупп.

С 7 до 11—12 лет наступает стадия конкретных операций. На этом этапе умственные действия ребёнка приобретают свойство обратимости. Ребёнок может систематизировать вещи, которые находятся перед ним, но ещё не способен делать это с теми вещами, которые не находится прямо перед ним или не были перед ним в недавнем прошлом.

[3] *Кушнир А.М.* Принцип природосообразности как методологическое основание проектирования технологий и содержания обучения // Народное образование. — 2011. — № 3. — С. 12—22.

[4] *Каплунович И.Я., Петухова Т.А.* Пять подструктур математического мышления: как их выявить и использовать в преподавании // Математика в школе. — 1998. — № 5. — С. 45.

С 11–12 до 14–15 лет наступает этап формальных операций, соединённых в некоторое структурное целое. На этом этапе такие операции выполняются и в форме чисто словесных суждений. Происходит синтез структур, соответствующих обращению и взаимности, умственная деятельность ребёнка уже не ограничена прошлым опытом или непосредственным восприятием.

Теория Ж. Пиаже о стадиях мышления послужила базой для разработки теории о стадиях (этапах) развития математического мышления и формирования математических знаний[5]. Из этой теории вытекает, что для достижения понимания основных математических понятий в процессе изучения математики необходимо соблюдать определённую последовательность этапов, ступеней в формировании понятий о математических структурах. Необходимо последовательно переходить от одного уровня развития мышления к следующему, с обязательной опорой на нижележащие, более наглядные уровни, этапы научного познания. Без такой опоры обучение может превратиться в формальное запоминание фактов без понимания. Таким образом, процесс обучения такому предмету, как математика, который изучается с 1-го по 11-й класс, а затем ещё и в вузе, может реализовываться поэтапно, многоступенчато. Такая поэтапность процесса формирования основных математических понятий — обязательное условие реализации доступности обучения, а тем самым и принципа природосообразности обучения. Задача учителя состоит в том, чтобы помогать ребёнку постоянно совершенствовать умственный мир посредством переходов от одного уровня мышления к другому.

Практически всеми учёными признаётся, что различные разделы математики не могут с самого начала изучаться во всей их глубине и полноте. Взгляды о необходимости выделения последовательных уровней в формировании понятий о математических структурах широко распространены среди математиков-педагогов. Видный немецкий математик Ф. Клейн в лекциях для учителей указывал на необходимость предварительных этапов, ступеней в изучении основных математических понятий: «Мы должны приспособляться к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключение ознакомить их с абстрактными идеями». Можно заметить, что такие взгляды о соблюдении необходимых этапов при изучении понятия функции удачно реализуются в школьном учебнике по алгебре, созданном А.Г. Мордковичем.

Яркой иллюстрацией подобного рода поэтапного изучения стержневых понятий курса математики может служить процесс формирования такого математического понятия, как группа — важнейшего вида алгебраической структуры. Хотя сам этот термин в школьной математике обычно не используется, однако идеей группы пронизан весь курс школьной математики. Начальным этапом в этом процессе можно считать ещё дошкольный период, в котором дети знакомятся с операциями сложения и вычитания, причём эти алгебраические операции производятся не над числами, а непосредственно над предметами из некоторого множества. Далее этот процесс продолжается в начальной, а затем и средней школе. Уже в 1–5-х классах, по сути, происходит знакомство учащихся с понятием группы. В этот период алгебраические операции школьниками производятся уже над числами.
В школьном курсе математики наилучшим материалом для формирования понятия о группах и других алгебраических системах (кольцах, полях) служат теоретико-числовые сведения. Целое число, сложение целых чисел, введение нуля, нахождение для каждого числа ему противоположного, изучение свойств операций над числами — всё это, в сущности, этапы в формировании понятия об основных алгебраических системах.

[5] *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. Монография. — М.: «Технологическая школа бизнеса», 1999. — 303 с.

В более старших классах школьники сталкиваются с вопросами, которые содействуют расширению полученных знаний. В курсе алгебры происходит переход от конкретных чисел, записанных цифрами, к общим буквенным выражениям, обозначающим конкретные числа лишь при некотором истолковании букв. Алгебраические операции производятся уже над объектами другой природы (многочленами, векторами), а не только над числами. Школьники начинают понимать универсальность ряда свойств алгебраических операций.

Важно для понимания идеи группы — изучение в школе геометрических преобразований и понятий композиции преобразований и обратного преобразования. Однако последние два понятия отсутствуют в ныне действующей школьной программе, поэтому их можно рассматривать в элективных и факультативных курсах. Целесообразно также рассмотреть группы самосовмещений некоторых геометрических фигур, орнаментов, бордюров, паркетов и приложения теории групп в химии, кристаллографии. Эти темы, связанные с математической постановкой практических задач, вызывают у школьников наибольший интерес[6].

Знакомство с понятием группы в наиболее общем виде чаще всего происходит уже на первых курсах в вузе и вызывает зачастую трудности. При таком знакомстве необходимо опираться на ранее полученные в школе знания, которые выступают структурообразующим фактором в системе математической подготовки студентов, что позволяет наилучшим образом решить проблему преемственности между школьной и вузовской математикой.

В качестве другого примера реализации поэтапности формирования основных понятий можно рассматривать процесс формирования в обучении математике понятия скалярной величины. Это понятие, несомненно, относится к числу стержневых понятий курса математики. Как отмечал американский математик Г. Биркгофф, идея величины представляется гораздо более глубокой, чем понятия и логика арифметики. С величины в школьной математике начинается знакомство с одним из основных типов математических структур — порядковых структур, которые пронизывают всю школьную и вузовскую математику[7]. Процесс формирования этого понятия продолжается более 10 лет, начиная с 6—7-летнего возраста и заканчивая в вузе, причём обучение происходит не только на уроках математики, но и на уроках физики.

Наиболее слабое место в методике изучения величин — то, что чётко не выделены этапы, уровни формирования этого понятия. Это обстоятельство приводит к тому, что учащиеся не имеют ясного представления о понятии величины. Необходимо выдерживать несколько основных этапов в формировании этого понятия[8]. Первый, дочисловой этап формирования понятия величины соответствует уровню мышления, который Ж. Пиаже назвал уровнем конкретных множеств (возраст учащихся 6—7 лет). На этом этапе можно исходить из следующего самого общего, самого широкого понимания величины: величины одного рода — это элементы некоторого линейно упорядоченного множества. Это определение означает, что на множестве величин одного рода задано отношение «$<$», удовлетворяющее условиям антирефлексивности (ни для какого элемента x не может быть $x < x$), транзитивности (из $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$) и трихотомии (для любых двух элементов x и y имеет место одно и только одно из соотношений $x = y$, $x > y$ или $x < y$). Фактически это определение совпадает со старым определением Л. Эйлера: «величина

[6] *Тестов В.А.* Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Научно-методический электронный журнал «Концепт». — 2014. — № 12. — https://e-koncept.ru/2014/14333.htm. (дата обращения: 05.11.2019).

[7] *Тестов В.А.* Порядковые структуры в алгебре и теории чисел. — М.: МПГУ, 1997. — 109 с.

[8] *Тестов В.А.* Величины, числа, неравенства: стратегия обучения. Учебно-методическое пособие. — Вологда: Изд. Центр ВИРО, 2005. — 132 с.; *Тестов В.А.* Поэтапность формирования понятия о скалярной величине //Научно-методический электронный журнал «Концепт». — 2016. — Т. 9. — С. 11–15. — http://e-koncept.ru/2016/46106.htm. (дата обращения: 05.11.2019).

есть всё то, что способно увеличиваться или уменьшаться».

На следующем этапе, после того как учащиеся получат первоначальное представление о таких величинах, как длина, и научатся складывать такие величины, в определении величины дополнительно включается требование выполнимости операции сложения, обладающей определёнными свойствами. Разумеется, и на этом этапе нецелесообразно в явном виде давать определение величины, однако представление о свойствах скалярной величины учащиеся должны иметь.

Уже на следующем этапе можно познакомить учащихся с отрицательными скалярными величинами, после того как они изучат отрицательные числа и начнут изучать физические величины. В явном виде аксиоматику скалярных величин более целесообразно ввести уже на следующем этапе, в классах с углублённым изучением математики или в вузе.

В заключение коснёмся методики изучения ещё одной темы — метода математической индукции. О методе математической индукции и методике изложения этой темы написано немало статей и книг. Однако в практике преподавания этой темы до сих пор имеется целый ряд недостатков, связанных с отсутствием предварительных этапов в её изучении. В обучении обычно используется только традиционная форма математической индукции, не имеющая никаких логико-психологических оснований в предшествующем обучении. Поэтому эта форма индукции всегда с большим трудом усваивалась школьниками, поскольку фактически она не имеет никакой опоры на предыдущий познавательный опыт школьников. Несмотря на то что этот метод теперь не входит в программу общеобразовательной школы, он часто используется при решении задач элементарной математики и поэтому, как правило, изучается на факультативных занятиях, в классах с углублённым изучением математики, в ряде профильных классов.

В математике хорошо известно, что традиционный принцип математической индукции эквивалентен двум другим условиям: условию минимальности и условию обрыва убывающих цепей, которые в школьной математике обычно не рассматриваются. Предлагаемый подход базируется на эквивалентности принципа математической индукции и условия минимальности (или принципа наименьшего числа): *любое непустое подмножество множества натуральных чисел содержит наименьшее число*. Это свойство интуитивно ясно школьникам и не вызывает у них никаких сомнений, поскольку имеет психологическое основание в уже достаточно знакомых им порядковых свойствах натуральных чисел. Поэтому его можно предложить учащимся в качестве одной из аксиом системы натуральных чисел[9].

Такой подход в наибольшей степени полезен для учащихся профильных классов и классов с углублённым изучением математики. Однако в практике школьного преподавания эта форма индукции пока мало применяется.

Приведём пример применения этой формы индукции при решении задач.

Доказать, что при любом натуральном n *число вида* $7^{2n}-7$ *делится на 8.*

Действительно, предположим, что найдутся натуральные числа, для которых это утверждение неверно, и пусть k — наименьшее число, для которого $A_k=7^{2k}-7$ не делится на 8. Так как $k \neq 1$, то натуральное число $k-1$ существует и $A_{k-1}=7^{2k-2}-7=\frac{7^{2k}}{49}-7$ делится на 8.

[9] *Тестов В.А.* Об использовании в обучении различных форм математической индукции // Современные тенденции физико-математического образования: школа — вуз: материалы Международной науч.-практ. конфер. — Соликамск: СГПИ, 2016. — С. 86–89.

Но разность $A_k - 49A_{k-1} = 336$ тоже делится

на 8, поэтому и A_k делится на 8 — приходим к противоречию.

При решении задач такого типа можно, разумеется, использовать и традиционную форму индукции. При предлагаемом способе изучения индукции представляется целесообразным условие минимальности рассматривать в качестве одной из аксиом системы натуральных чисел. Тогда традиционная форма математической индукции может быть несложно получена из этого условия в качестве теоремы. Это доказательство можно посмотреть в упомянутых работах автора.

Доказательство этой теоремы вполне может быть воспринято учащимися профильных 9—10-х классов. При таком способе построения темы усвоение учащимися принципа математической индукции идёт существенно легче по сравнению с традиционным.

Метод изучения математической индукции, построенный на основе аксиомы минимальности, имеет ещё одно достоинство. Существует ещё одна форма математической индукции, основанная на следующей теореме:

Если свойство F выполняется для $n = 1$ и если из выполнимости свойства F для всех чисел n, меньших некоторого натурального числа m, следует выполнимость свойства F и для числа $n = m$, то свойство F выполняется для любого натурального числа n.

Эта форма индукции также сравнительно легко выводится из условия минимальности. А вот вывести эту форму индукции непосредственно из традиционной формы труднее, поэтому эта форма индукции в школьной математике обычно остаётся без каких-либо обоснований. В этой форме индукции так же, как и для традиционной формы, в базисе индукции вместо 1 можно рассматривать любое целое неотрицательное число.

Рассмотрим пример применения этой формы индукции.

Доказать, что любое натуральное число n $(n > 1)$ может быть представлено в виде произведения простых чисел.

Действительно, при $n = 2$ данное свойство верно, произведение состоит из одного простого множителя 2. Предположим, что это свойство верно для всех натуральных чисел, меньших некоторого числа m. Покажем, что тогда число m также можно представить в виде произведения простых чисел. Ясно, что если число m — простое, то свойство справедливо. Пусть теперь число m — составное, т.е. $m = rs$, где $2 \le r < m$, $2 \le s < m$. По индуктивному предположению оба числа r и s можно представить в виде произведения простых чисел, а поэтому и число m можно представить в виде такого произведения.

Предложенный способ изложения принципа и метода математической индукции вполне соответствует как принципу природосообразности, так и принципу научности.

Таким образом, в обучении математике важно стремиться максимально использовать природные закономерности усвоения школьниками математических знаний, использовать поэтапность в процессе формирования стержневых понятий. Такой подход способствует развитию у школьников мотивации и понимания изучаемого материала. **НО**

The Principle Of Naturalness In Teaching Of Mathematics

Vladimir A. Testov, Professor, Department of Mathematics, Vologda State University, Doctor of Pedagogical Sciences, e-mail vladafan@inbox.ru

Abstract: *One of the main reasons for the decrease in motivation of students, the lack of understanding of many of them of the studied material is the reliance in teaching not on the principle of naturalness, but on a purely logical sequence of mathematical material. The necessity of relying on the stepwise study of basic mathematical concepts is shown. The stepwise formation of the concept of a group and the concept of a scalar quantity, as well as a new approach to the study of mathematical induction, are considered.*

Keywords: *principle of scientific, phased learning, group, scalar quantity, mathematical induction, minimality condition.*

Ispol'zovannye istochniki:

1. *Kumarin V.V.* Pedagogika prirodosoobraznosti i reforma shkoly. Moscow: Narodnoe obrazovanie, 2004, 623 pp.

2. *Bespal'ko V.P.* Prirodosoobraznaya pedagogika. Moscow: Narodnoe obrazovanie, 2008. 512 pp.

3. *Kulik A.* Rossijskoe obrazovanie: v plenu protivoestestvennoj metodologii, Proble my obrazovaniya, 10/05/2012, Available at: http://novznania.ru/archives/2724 (accessed: 05.11.2019).

4. *Kushnir A.M.* Princi p prirodosoobraznosti kak metodologicheskoe osnovanie proektirovaniya tekhnologij i soderzhaniya obucheniya, Narodnoe obrazovanie, 2011, No 3, pp. 12—22.

5. *Kaplunovich I.Ya., Petuhova T.A.* Pyat' podstruktur mate maticheskogo myshleniya: kak ih vyyavit' i ispol'zovat' v prepodavanii, Mate matika v shkole, 1998, No 5, pp. 45.

6. *Testov V.A.* Strategiya obucheniya mate matike. Moscow: Tekhnologicheskaya shkola biznesa, 1999, 303 pp.

7. *Testov V.A.* Osobennosti formirovaniya u shkol'nikov osnovnyh mate maticheskih ponyatij v sovre mennyh usloviyah, Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal «Koncept», 2014, No 12, Available at: https://e-koncept.ru/2014/14333.htm. (accessed: 05.11.2019).

8. *Testov V.A.* Poryadkovye struktury v algebre i teorii chisel. Moscow: MPGU, 1997, 109 pp.

9. *Testov V.A.* Velichiny, chisla, neravenstva: strategiya obucheniya. Vologda: Izd. Centr VIRO, 2005, 132 pp.

10. *Testov V.A.* Poetapnost' formirovaniya ponyatiya o skalyarnoj velichine, Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal «Koncept», 2016, Vol. 9, pp. 11—15. Available at: http://e-koncept.ru/2016/46106.htm. (accessed: 05.11.2019).