Олимпиадные задачи по математике и методы их решения

Александр Фарков,
заведующий кафедрой психологии , педагогики и методики преподавания математики Коряжемского филиала Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук, доцент

Умение решать задачи, особенно олимпиадные, всегда считалось одним из показателей хорошей математической подготовленности ученика. Недаром многие вузы устанавливают льготы для победителей и призёров олимпиад различного уровня. Также не редкость, когда ведущие вузы страны проводят математические олимпиады для своих будущих абитуриентов.
К сожалению, в последние годы участников школьных и районных олимпиад становится всё меньше. Это не могло не сказаться и на общем уровне подготовки студентов педагогических вузов, на их умении решать задачи повышенной трудности, а особенно так называемые олимпиадные задачи.
Публикуемые материалы адресованы в первую очередь учителю. Их можно использовать как для занятий на факультативах, в кружках, на спецкурсах, так и для индивидуальной работы с учениками. Они будут полезны и будущим абитуриентам désинститутов, и, конечно, студентам — будущим учителям математики.

Что понимается под олимпиадными задачами? В литературе встречаются различные трактовки этого понятия.

Согласно одной из них олимпиадные задачи — это задачи, встречающиеся на олимпиадах. Но на олимпиадах, особенно школьных, предлагаются и задачи, незначительно отличающиеся от тех, которые рассматриваются на уроках.

Вторая трактовка: олимпиадные задачи — задачи, при решении которых применяются специальные методы, как правило, не используемые на школьных уроках: принцип Дирихле, метод инвариантов, графов, решение уравнений в целых числах и некоторые другие. Эти методы и рассматриваются в пособии.

Основой пособия стали материалы спецкурса по элементарной математике для студентов математического факультета Коряжемского филиала Поморского государственного университета им. М.В. Ломоносова «Олимпиадные задачи», факультативов, спецкурсов для учащихся 9–11 классов школ г. Коряжмы, а также материалы, подготовленные автором для занятий на курсах повышения квалификации учителей математики южного региона Архангельской области.

Автор не стремился включать в пособие очень трудные задачи. Предложены задачи, которые часто встречаются на районных и городских олимпиадах. Большинство подобраны из литературы, другие переработаны, а третьи составлены автором.

Рассматриваются специальные методы решения олимпиадных задач или методы решения олимпиадных задач по различным разделам школьного курса математики. Выявляется суть метода решения, приведены образцы решения нескольких задач, причём самых разнообразных. В конце каждого раздела приводятся задачи для самостоятельного решения, а также ответы ко всем задачам. К большинству из них тут же прилагаются подробные решения.

Логические задачи

Логические задачи решаются различными способами. Решению логических задач, где рассматривается два или больше конечных множеств, между которыми надо установить взаимно однозначное соответствие, часто помогает использование всевозможных таблиц и схем. Приведём примеры такого рода задач.

1. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3х3. По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не чёрный и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак «—» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию, Белокуров — не брюнет и, значит, в клетке на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Чёрный» также надо поставить знак «—».

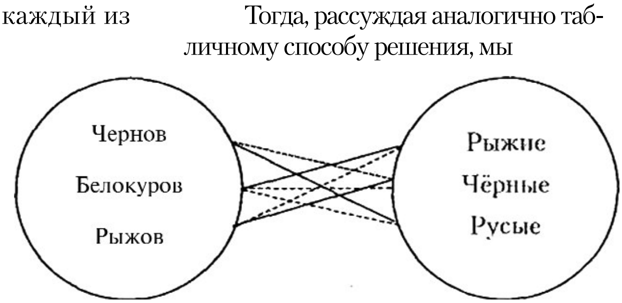
Фамилия	Цвет волос		
	Рыжий	Чёрный	Русый
Белокуров		–	–
Чернов		–	
Рыжов	–		

Из таблицы следует, что Белокуров может быть только рыжим. Поставим знак плюс в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком минус в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов — брюнетом.

Фамилия	Цвет волос		
	Рыжий	Чёрный	Русый
Белокуров	+	–	–
Чернов	+	–	+
Рыжов	–	+	–

Решим данную задачу графически. Изобразим два множества (множество фамилий и множество цветов волос). Пунктирными линиями соединим пары: Чернов — чёрные, Белокуров — русые, Рыжов — рыжие и Белокуров — чёрные.

Тогда, рассуждая аналогично табличному способу решения, мы



соединим сплошными линиями сначала: Белокуров — рыжие, затем Чернов — русые и, наконец, Рыжов — чёрные.

Сложнее решаются задачи, когда множеств больше двух. Рассмотрим такой пример.

2. Маша, Люда, Женя и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но только на одном. Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что:

• девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;

• Люда не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

• Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;

• Женя знает французский язык, но не играет па скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

Решение. Для решения задачи воспользуемся следующими таблицами:

Имя	Инструмент			
	Виолончель	Рояль	Гитара	Скрипка
Маша	—			—
Люда	—			—
Женя				—
Катя				

Имя	Язык			
	Английский	Французский	Немецкий	Испанский
Маша	—			
Люда	—			
Женя		+		
Катя				

Так как Люда не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка, то ставим минусы в соответствующих клетках. Аналогично поступаем с Машей: ставим минусы в первой таблице на пересечении строки «Маша» и столбцов «скрипка», «виолончель»; во второй таблице ставим минус на пересечении строки «Маша» и столбца «английский». Так как Женя знает французский, но не играет на скрипке, то ставим плюс во второй таблице на пересечении строки «Женя» и столбца «французский»; а в первой таблице на пересечении строки «Женя» и столбца «скрипка» ставим минус. Таким образом, получили следующие таблицы.

Так как три девочки не играют на скрипке, ясно, что на скрипке играет Катя; тогда Женя играет на виолончели. Для Маши и Люды возможны два варианта:

• Люда играет на рояле, а Маша на гитаре;

• Маша играет на рояле, а Люда на гитаре.

Учитывая данные второй таблицы и первое условие из задачи: «девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански», получаем, что: Катя владеет французским языком; а Маша (Люда) говорит по-испански; соответственно Люда (Маша) владеет немецким.

Таким образом, задача имеет два варианта решения;

1) Люда играет на гитаре и владеет испанским языком;

Маша играет на рояле и владеет немецким языком;

Женя играет на виолончели и владеет французским языком;

Катя играет на скрипке и владеет английским языком.

2) Маша играет на гитаре и владеет испанским языком;

Люда играет на рояле и владеет немецким языком;

Женя играет на виолончели и владеет французским языком;

Катя играет на скрипке и владеет английским языком.

Среди **логических** задач встречаются и задачи с конечными множествами, которые надо упорядочить. Рассмотрим пример решения такого класса задач.

3. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

Решение. Найдём сначала возраст Бори. Так как в детский сад ходит девочка, то это не Боря. Тогда Боре больше 5 лет.

Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это может быть в следующих случаях:

- одной девочке 5 лет, а другой 13 лет;
- одной девочке 8 лет, а другой 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет. Имеем: Боре не 5 лет, не 15 и не 13. Тогда Боре 8 лет.

Установим теперь возраст каждой девочки. Так как сумма лет Ани и Веры делится на три, а Боре — 8 лет, то возможен лишь один случай: девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Аня старше Бори, то Ане 13 лет. Тогда Вере будет 5 лет, а Гале 15 лет.

К логическим задачам относят и задачи, связанные с выяснением итогов некоторых турниров. При решении таких задач надо знать основные положения о таких турнирах. Например, в шахматных турнирах победитель игры в партии получает одно очко, а проигравший — ноль очков. В случае ничьей каждый игрок получает по 0,5 очка. Рассмотрим пример решения такого рода задач.

4. В финальном турнире играли пять шахматистов. **А** окончил все партии вничью. **Б** сыграл вничью с шахматистами, занявшими первое и последнее места. **В** проиграл **Б**, но зато сыграл вничью только одну партию. **Г** выиграл у **Д** и у занявшего четвёртое место шахматиста. **Д** не выиграл ни одной партии.

Кто сколько очков набрал и какое место занял?

Решение. Воспользуемся для решения задачи таблицей.

Так как **А** сыграл со всеми вничью, то ставим в столбце и строке участника турнира **А** по 0,5. Учитывая, что **В** проиграл **Б**, а **Г** выиграл у **Д**, ставим соответственно 0 и 1 в соответствующих клетках. В результате получили такую таблицу:

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Очки	Место
А	–	0,5	0,5	0,5	0,5		
Б	0,5	–	1				
В	0,5	0	–				
Г	0,5			–	1		
Д	0,5			0	–		

Учитывая результаты игр, внесённые в таблицу, и другие условия задачи, можно сделать вывод о том, что **А** набрал 2 очка;

Б — не менее 2-х очков; **В** — не менее 0,5 очка, но не более 2,5 очка; **Г** — не менее 2,5 очка и **Д** — не более 1,5 очка.

Так как у **А** 2 очка, то он не мог занять первого и второго места. Он не мог занять и четвёртого места, так как **Г** выиграл у того, кто занял четвёртое место. Наконец, **А** не мог занять пятого места, так как у **Д** очков меньше, чем у **А**. Следовательно, **А** занял третье место.

Выясним, кто занял пятое место. Это не **А** (он на третьем месте); и не **Б** (он сыграл вничью с занявшими первое и последнее места). Это не **Б** (**В** у **Б** выиграл), это и не **Г** (по числу набранных очков у него место выше третьего). Тогда на пятом месте будет **Д**, значит, **Д** и **Б** сыграли вничью, и можно поставить по 0,5 очка в соответствующих клетках.

Установим игрока, занявшего четвёртое место. Так как **Г** выиграл у **Д** и у занявшего четвёртое место (у **А** с **Г** ничья), то четвёртое место занял **Б** или **В**. Но у **Б** очков не меньше, чем у **А**, и, следовательно, четвёртое место занял **В**. Значит, **В** проиграл **Г** (делаем соответствующие пометки в таблице).

Чтобы **В** опередил по очкам **Д**, занявшего пятое место, нужно, чтобы **В** выиграл у **Д**.

Таким образом, осталось выяснить, как сыграли **Б** и **Г** и какие места они заняли. Так как **Б** сыграл вничью с занявшим первое место, то он не на первом месте. Количество очков, набранное им, не менее 2,5, то есть он опередил **А** и поэтому **Б** на втором месте. Следовательно, на первом месте **Г** с суммой очков 3. Итоговая таблица будет выглядеть следующим образом:

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Очки	Место
А	–	0,5	0,5	0,5	0,5	2	III
Б	0,5	–	1	0,5	0,5	2,5	II
В	0,5	0	–	0	1	1,5	IV
Г	0,5	0,5	1	–	1	3	I
Д	0,5	0	0	0	–	0,5	V

Разновидностью турнирных задач являются задачи и типа следующей.

5. Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в семёрку, восьмёрку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

Решение. Так как стрелок выбил 90 очков и из них за 4 раза набрал 40 очков, то в другие 6 раз он набрал оставшиеся 50 очков. Так как стрелок попадал лишь в семёрку, восьмёрку и девятку в остальные 6 выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семёрку, восьмёрку и девятку) он наберёт 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков, что возможно только при единственной комбинации цифр 7, 8, 9: 8 + 9 + 9 = 26.

Таким образом, в семёрку стрелок попал 1 раз, в восьмёрку — 2 раза, а в девятку — 3 раза.

К наиболее интересным и в то же время трудным логическим задачам относятся так называемые **задачи о лгунах.**

Чаще всего при решении подобного рода задач поступают следующим образом.

Берётся одно из утверждений и предполагается, что оно истинно. Если при рассмотрении других утверждений не получается противоречия, то рассмотренное утверждение действительно истинное. Если же при рассмотрении других утверждений мы где-то получаем противоречие, то взятое нами утверждение получается ложным. Если утверждений было всего два, то делаем вывод, что верно второе утверждение. А если утверждений три и более, тогда приходится применять перебор различных предположений. Рассмотрим конкретные примеры.

6. 5 школьников приехали из 5 различных городов в Архангельск на областную математическую олимпиаду. «Откуда вы, ребята?» — спросили их хозяева. Вот что ответил каждый из них:

Андреев: «Я приехал из Онеги, а Григорьев живёт в Каргополе».

Борисов: «В Каргополе живёт Васильев. Я же прибыл из Коряжмы».

Васильев: «Я прибыл из Онеги, а Борисов — из Котласа».

Григорьев: «Я прибыл из Каргополя, а Данилов из Вельска».

Данилов: «Да, я действительно из Вельска, Андреев же живёт в Коряжме».

Хозяева очень удивились противоречивости ответов приехавших гостей. Ребята объяснили им, что каждый из них высказал одно утверждение правильное, а другое ложное. Но по их ответам вполне можно установить, кто откуда приехал. Откуда приехал каждый школьник?

Решение. Пусть у Андреева первое утверждение верное, то есть он из Онеги. Тогда Григорьев живёт не в Каргополе. Поэтому второе утверждение Данилова — ложное, значит, он из Вельска. Тогда первое утверждение Григорьева — ложно. Так как Андреев из Онеги, то первое утверждение Васильева ложно, поэтому Борисов — из Котласа. Так как Григорьев не из Каргополя, то остаётся, что он из Коряжмы, а Васильев из Каргополя.

Рассмотрим второй возможный вариант. Пусть у Андреева второе утверждение — правильное, тогда Григорьев приехал из Каргополя. Значит, Данилов приехал не из Вельска, а Андреев не из Онеги. Тогда у Борисова первое утверждение ложное (в Каргополе живёт Григорьев), значит, Борисов прибыл из Коряжмы.

Поэтому Андреев не из Коряжмы и получается, что Данилов из Вельска. Получили противоречие: Данилов из Вельска и не из Вельска. Значит, второй вариант невозможен.

Ответ: Андреев из Онеги; Борисов из Котласа; Васильев из Каргополя; Григорьев из Коряжмы: Данилов из Вельска.

7. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал»? Петя, Вася и Коля ответили: «Не я», а Миша — «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое — неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ объясните.

Решение. Начнём с ответов Пети, Васи и Коли. Так как стекло разбил кто-то один, то среди ответов Пети, Васи и Коли может быть лишь один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое.

Тогда вторым ложным ответом будет ответ Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

8. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал туземца узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген».

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Решение. Так как ответ встреченного островитянина мог быть лишь «Я — абориген» (этот ответ — правда для аборигенов и ложь для пришельцев), а проводник сказал, что туземец — абориген, то проводник является аборигеном.

Класс логических задач очень обширен. Рассмотрим ещё одну логическую задачу, которую можно считать классической.

9. Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козла и капусту, если известно, что волка нельзя оставить без привязи с козлом, а козёл неравнодушен к капусте? В лодке только два места, поэтому можно с собой брать одновременно или одно животное или капусту.

Решение. Первым рейсом перевозчик берёт в лодку козла, оставляя на берегу волка и капусту. **Вторым рейсом** перевозчик берёт с собой волка, оставляя на берегу капусту. Переехав реку, перевозчик оставляет волка на берегу, а козла забирает в лодку и возвращается с ним обратно. В **третьем рейсе** перевозчик берёт с собой капусту, выгрузив козла. Переехав реку, он оставляет капусту с волком и возвращается за козлом. И, наконец, в **четвёртом рейсе** он перевозит через реку козла.

Задачи для самостоятельного решения

1. На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

2. В трёх мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?

3. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

5. Олег, Игорь и Аня учатся в 6-м классе. Среди них есть лучший математик, лучший шахматист и лучший художник. Известно, что:

а) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;

б) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы. Кто в классе лучший математик, лучший шахматист и лучший художник?

6. Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты **А, Б, В.** Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято ещё два сообщения, которые, как установили учёные, оказались оба ложными:

а) А — не третья планета от звезды;

б) Б — вторая планета.

Какими планетами от звезды являются **А, Б, В**?

7. Три подруги вышли в белом, синем, зелёном платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наташа была в зелёных туфлях. Определить цвет платья и туфель каждой подруги.

8. Три студента: Андреев, Борисов и Воронов учатся на различных факультетах Поморского государственного университета (математическом, физическом и историческом). Все они приехали из различных городов: Вельска, Северодвинска, Няндомы; причём один из них увлекается футболом, другой — баскетболом, третий волейболом. Известно, что:

1) Андреев не из Няндомы, а Борисов не из Северодвинска.

2) Студент, приехавший из Няндомы, учится не на математическом факультете.

3) Северодвинец учится на историческом факультете и увлекается футболом.

4) Воронов учится на математическом факультете.

5) Студент физического факультета не любит волейбол.

Из какого города приехал каждый студент, на каком факультете он учится и каким видом спорта увлекается?

9. В Парламенте одной из стран 150 депутатов. По крайней мере, один из них честен. В каждой паре депутатов хотя бы один продажен. Сколько всего честных депутатов в Парламенте этой страны?

10. Четверо ребят — Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день на вопрос: кто какое место занял? — они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым, ни последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один — ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

11. Вера, Нина, Оля и Люба надели платья разных цветов: красное, синее, белое и голубое. На вопрос, кто из них в каком платье, три мальчика ответили:

Александр: «Оля в синем, Люба — в белом»;

Борис: «Оля — в красном, Нина — в синем»;

Виктор: «Вера — в синем, Люба — в голубом».

В каждом ответе только одна часть верна, а другая — нет. Какого цвета платье надето на каждой девочке?

12. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Кто-то разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» пятеро свидетелей ответили так:

Первый: «То ли Петя, то ли Вася».

Второй: «То ли Петя, то ли Коля».

Третий: «То ли Коля, то ли Миша».

Четвёртый: «То ли Миша, то ли Вася».

Пятый: «Не знаю».

Потом оказалось, что трое из свидетелей сказали правду, а двое неправду. Знал ли пятый свидетель, кто разбил стекло?

13. Петя, Коля, Вася, Саша и Вова играли в футбол. Кто-то из ребят разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» они ответили так:

Коля: «Это не я и не Петя».
Петя: «Это не я и не Саша».
Вася: «Это не я и не Петя».
Саша: «Это Коля или Вова».
Вова: «Не знаю».

Потом оказалось, что двое из ребят сказали правду, а двое — неправду. Знал ли Вова, кто разбил стекло?

14. На острове два племени. Люди одного из них говорили всегда правду, а люди другого племени — только ложь.

Путешественник вышел на развилку дорог, и ему нужно было спросить у проходящего мимо островитянина, какая дорога ведёт в деревню. Отличить по внешнему виду лживого от правдивого он не мог. Путешественник задумался, а затем задал встречному только один вопрос. По ответу он узнал, по какой дороге ему следует идти. Какой вопрос он задал островитянину?

Ответы на задания для самостоятельного решения

1. Из второго предложения ясно, что Аня и Валя не в зелёном платье, Надя — не в зелёном и не в голубом. Из третьего предложения следует, что Валя не в розовом и не в белом платье. Тогда Валя будет в голубом платье, а Галя в зелёном. Используя первое предложение, изобразив девочек по кругу, получим, что Галя будет стоять между Валей и Надей. Тогда Аня в белом, а Надя в розовом платье.

Ответ: Валя, Аня и Надя соответственно в голубом, белом и розовом платьях.

2. Используем таблицу:

Номер мешка	Содержание мешка		
	Вермишель	Крупа	Сахар
1		-	
2	-		
3	+	-	-

Так как в первом мешке не крупа, то ставим в соответствующей клетке «минус». Аналогично, во второй строке ставим «минус» — против вермишели. Так как в третьем мешке — не крупа и не сахар, то ставим «минусы» в столбцах с надписями «крупа» и «сахар». Тогда из таблицы получаем, что в третьем мешке — вермишель, во втором — крупа (крупы нет в 1 и 3 мешках), значит сахар — в 1 мешке.

Ответ: В мешке с надписью «крупа» находится «сахар», с надписью «вермишель» — «крупа», с надписью «крупа или сахар» — «вермишель».

3. Золушка взяла зёрнышко из мешка с надписью «Смесь»; так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо. Если взятое Золушкой зернышко — мак, то в мешке с надписью «Смесь» — **мак.** Тогда в мешке с надписью «Мак» — **просо,** а в мешке с надписью «Просо» — **смесь.**

Аналогично, если взятое зернышко — просо, то в мешке с надписью «Смесь» — **просо.** Тогда в мешке с надписью «Мак» — **смесь,** а в мешке с надписью «Просо» — **мак.**

4. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

5. Так как Аня не проигрывала мальчикам в шахматы, то она — лучший шахматист. Так как художник не нарисовал своего портрета, а нарисовал портрет Игоря, то Игорь — лучший математик, а Олег — лучший художник.

Ответ: Олег — лучший художник, Аня — лучший шахматист, Игорь — лучший математик.

6. Так как второе и третье сообщения ложны, то *А* является третьей планетой, а *Б* — не второй, поэтому *Б* — первая планета от звезды. Тогда *В* будет второй планетой, на которой живут инопланетяне.

7. Так как Наташа в зелёных туфлях, а Валя не в белых, то Валя в синих туфлях. Значит, Аня в белых туфлях. Так как цвет платья и туфель у Ани совпадает, то Аня в белом платье. Так как у остальных девочек цвет платья и туфель не совпадает, то Валя в зелёном платье, а Наташа — в синем.

Ответ: Аня в белом платье и белых туфлях, Валя в зелёном платье и синих туфлях, Наташа в синем платье и зелёных туфлях.

8. Используем для решения задачи следующие три таблицы

Фамилия	Город		
	Вельск	Северодвинск	Няндома
Андреев			–
Борисов		–	
Воронов			

Фамилия	Вид спорта		
	футбол	баскетбол	волейбол
Андреев	+		
Борисов			–
Воронов			

Факультет	Город		
	Вельск	Северодвинск	Няндома
Математический	+		–
Физический			
Исторический		+	

Используя первое условие, поставим минусы в соответствующих клетках первой таблицы; используя второе условие, поставим минус на пересечении математического факультета и Няндомы в третьей таблице; используя третье условие, поставим плюс в третьей таблице на пересечении строки «исторический» и столбца «Северодвинск». Учитывая четвёртое условие, ставим плюс в третьей таблице на пересечении математического факультета и Вельска, так как на математическом факультете учится студент не из Няндомы и не из Северодвинска.

Таким образом, используя данные третьей таблицы, получаем, что на математическом факультете учится Воронов, приехавший из Вельска; на физическом учится студент из Няндомы, а на историческом — студент из Северодвинска.

Так как Воронов из Вельска, то, используя первую таблицу, получаем, что Борисов из Няндомы, а Андреев из Северодвинска.

Осталось выяснить, кто каким видом спорта увлекается. Учитывая третье условие, поставим плюс во второй таблице в клетке на пересечении фамилии «Андреев» и футбол. А учитывая пятое условие (студент физического факультета — Борисов), поставим минус в клетке на пересечении фамилии «Борисов» и волейбол. Тогда получаем: Воронов увлекается волейболом, а Борисов — баскетболом.

9. Один.

10. Предположим, что солгал Алексей. Тогда получается, что он был первым или последним. Значит, солгали ещё Владимир или Григорий. А это противоречит тому, что солгал всего один из ребят. Пусть солгал Борис. Тогда он был последним. Но Григорий также утверждал, что он был последним. Значит, данного случая также не может быть. Пусть солгал Владимир. Тогда он был не первым. В этом случае всё получается, и первым тогда будет Борис. Последний случай, когда солгал Григорий, быть не может, так как тогда последним никто из ребят не был.

Ответ: правду сказали Алексей, Борис, Григорий. Первым был Борис.

11. Предположим, что Оля в синем платье. Тогда оба ответа Бориса будут ложными. Значит, Оля не в синем платье. Тогда первый ответ Александра будет ложный, а второй — истинный. Значит, Люба — в голубом платье. Тогда из ответов Виктора следует, что Вера в синем платье. Теперь из ответов Бориса следует: Оля — в красном. Значит, Нина — в голубом.

Ответ: Люба — в белом платье, Вера — в синем, Оля — в красном, Нина — в голубом.

12. Из пяти свидетелей на каждого из мальчиков, как на того, кто мог разбить стекло, указали по два из первых четырёх свидетелей. Таким образом, кто бы ни разбил стекло, двое из первых четырёх сказали правду, а двое — неправду. Но по условию задачи правду сказали трое свидетелей, поэтому третьим, сказавшим правду, был пятый свидетель. А это означает, что он не знал, кто разбил стекло.

13. Используем таблицу, в которой будем отмечать согласия и несогласия (в том числе и молчаливые) с обвинением:

Согласен ли с обвинением в адрес	Пети	Васи	Коли	Саши	Вовы
Петя	нет	да	да	нет	да
Вася	нет	нет	да	да	да
Коля	нет	да	нет	да	да
Саша	нет	нет	да	нет	да
Вова	?	?	?	?	?
Общее число согласных	0	2	3	2	4

Из таблицы можно сделать следующие выводы:

1) Если Коля разбил, то согласных — трое, значит, правду минимум сказали трое.

2) Если Вова разбил, то согласных — четверо, значит, правду сказали минимум четверо.

Но по условию задачи правду сказали двое, значит, эти случаи не удовлетворяют условию задачи.

3) Если же разбил стекло Петя, то минимум четверо лгут, это тоже противоречит условию задачи.

Значит, стекло разбили Вася или Саша. Тогда Коля сказал правду, Петя сказал правду или солгал, Вася — сказал правду или солгал, Саша — солгал, т.е. двое сказали правду, а двое солгали. Поэтому Вова был третьим, кто солгал. Следовательно, он знал, кто разбил стекло.

14. Путешественник задал проходящему островитянину следующий вопрос: «Если бы я вас спросил, ведёт ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»? В этом случае туземец должен сказать правду, если даже он лжец.

г. Коряжма
Архангельской области