Построение имитационных моделей

Советникова Ольга Викторовна,
учитель информатики и математики, МБОУ «Заинская средняя общеобразовательная школа № 7 с углублённым изучением отдельных предметов», Заинский муниципальный район, Республика Татарстан

Человек издавна использует моделирование для исследования объектов, процессов, явлений в различных областях. Результаты этих исследований служат для определения и улучшения характеристик реальных объектов и процессов; для понимания сути явлений и выработки умения приспосабливаться или управлять ими; для конструирования новых объектов или модернизации старых. Моделирование помогает человеку принимать обоснованные и продуманные решения, предвидеть последствия своей деятельности.

Компьютерное моделирование учебных и реальных объектов, ситуаций и процессов в математике, физике, химии, биологии, экологии ставит учащегося в активную позицию исследователя, позволяет самостоятельно открывать законы и явления.

Компьютерное моделирование — новый подход к решению сложных задач из различных научных областей. Применение компьютера для решения задач, позволяет не только получить готовый ответ, но и найти пути решения задач аналитическим способом и методом прогноза.

Применение компьютерного моделирования — одна из эффективных форм изучения материала. Выдвигаемую гипотезу по решению задач можно проверить с помощью табличного процессора MS Excel и составления программ на каком-либо языке программирования.

Имитационное моделирование — один из видов компьютерного моделирования, использующий методологию системного анализа, центральной процедурой которого является построение обобщённой модели, отражающей все факторы реальной системы, в качестве же методологии исследования выступает вычислительный эксперимент.

Имитационная модель воспроизводит поведение сложной системы взаимодействующих элементов. Для имитационного моделирования характерно наличие следующих обстоятельств:

- объект моделирования — сложная неоднородная система;
- в моделируемой системе присутствуют факторы случайного поведения;
- принципиально невозможно получить результаты моделирования без использования компьютера.

Рассмотрим применение метода компьютерного имитационного моделирования на конкретных примерах задач.

Задача 1.

Дан массив X случайных однозначных чисел. Элементы массива попарно перемножаются, начиная с первой пары (X_1 с X_2,X_2 с X_3 и так далее). После каждого умножения второй сомножитель заменяется на младшую цифру полученного результата. Процесс попарного перемножения элементов массива повторить циклически несколько раз (т.е. после умножения последней пары чисел в массиве продолжать с перемножения последнего и первого элементов).

Алгоритм решения задачи

Проделаем действия «вручную» для исходного массива (хотя бы два раза):

7	8	3	7	2	6	9	4	3	7

Проанализируем результат и объясним его.

Ответим на вопросы:

1. Что изменится, если младшей цифрой результата заменять не второй, а первый сомножитель?
2. Справедливо ли назвать данный процесс процессом «выживания» чётных чисел?
3. К чему приведёт наличие в исходном массиве числа 5?
4. Построим алгоритм, напишем программу и протестируем её для разных случайных наборов исходных данных.

Анализ результата

Поскольку чётное число при умножении, как на чётное, так и на нечётное число даёт в результате чётное число, а не чётный результат получается лишь при перемножении двух нечётных чисел, то первый же встреченный чётный элемент вызовет образование всех последующих чётных чисел.

Для заданного массива уже после одного «прохода» получим:

7	6	8	6	2	2	8	2	6	2

При двойном (циклическом) проходе получим:

4	4	2	2	4	8	4	8	8	6

Если среди элементов будет 5, то при умножении на любое чётное однозначное число младшая цифра результата будет 0, а следовательно, и все остальные произведения будут равно 0. Таким образом, после двух-трёх проходов все элементы массива станут нулевыми.

Примечание. Младшую цифру числа можно выделить, получив остаток от деления числа на 10.

Программа на Паскале может быть такой:

```
Program PR1;
uses crt;
const
n=10; k=3;
var
x:array [1..n] of 0..9;
i,j:byte;
begin
randomize;
{заполнение и печать исходного
массива}
writeln('Исходныймассив:');
for i:=1 to k do
begin
x[i]:=random(9)+1;
write(x[i]:4)
end;
{выполнение к циклических «про-
ходов»}
for j:=1 to k do
begin
for i:=2 to n do x[i]:=(x[i-1-
]*x[i]) mod 10;
if j<k then x[1]:= (x[1]*x[n])
mod 10
end;
{печать полученного массива}
writeln('полученмассив:');
for i:=1 to n do write (x[i]:4);
readln;
end.
```

Задача 2.

Пусть на некоторой территории появляется определённое количество больных гриппом. В процессе общения от них заражаются другие люди, в результате возникает эпидемия. Будем предполагать, что количество заболевших людей за один день равно произведению числа больных на количество здоровых, умноженному на коэффициент, характеризующий скорость развития эпидемии. Данный коэффициент отражает эффективность профилактических мер, препятствующих распространению инфекции.

Постройте модель определения числа больных B и здоровых Z на день I при коэффициенте эпидемии K.

В качестве исходных используйте следующие данные:

Число здоровых людей в начале эпидемии — 20 000 человек;

Число больных людей в начале эпидемии — 70 человек;

Число дней развития эпидемии — 10 дней;

Коэффициент развития эпидемии — 0,0001.

Программа на Паскале:

```
ProgramPR2;
const Kol=300;
varK:real;
NumB,NumZ,NumI,i:integer;
B:array[1..Kol] of integer;
{массив больных}
Z:array[1..Kol] of integer;
{массив здоровых}
begin
write('введите число здоровых
на начало эпидемии:');
readln(NumZ);
write('введите число больных
на начало эпидемии:');
readln(NumB);
write('введите число дней эпиде-
мии:');
readln(NumI);
write ('введите коэффициент эпи-
демии:');
readln(K);
{задание начальных значений мас-
сива}
B[1]:=NumB;
Z[1]:=NumZ;
{моделирование эпидемии}
for i:=1 to (NumI-1) do
begin
B[i+1]:=trunc(int(K*B[i]*Z[i]));
```

```
Z[i+1]:=trunc(Z[i]-B[i+1]);
end;
{вывод результатов}
writeln(‘День Больные Заболев-
шие:’);
for i:=1 to NumI do
writeln (' ',i:3,' ',B[i]:6,'
',Z[i]:6);
readln;end.
```

После выполнения программы получается следующая распечатка:

- введём число здоровых на начало эпидемии: 20 000;
- введём число больных на начало эпидемии: 70;
-
- введём число дней эпидемии: 10;
- введём коэффициент эпидемии: 0,0001.

День	Больные	Незаболевшие
1	70	20 000
2	140	19 860
3	278	19 582
4	544	19 038
5	1035	18 008
6	1863	16 140
7	3006	13 134
8	3948	9 186
9	3626	5 560
10	2016	3 544

Анализ результата

При анализе модели было установлено, что число больных людей достигает пика на восьмой день и затем уменьшается.

Задача 3 «О концентрации соли».

В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 1). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

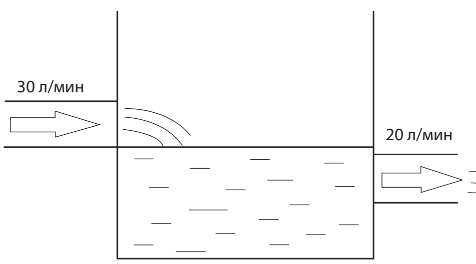


Рис. 1

Алгоритм решения.

Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t,

$$-\Delta x = -(x(t+\Delta t) - x(t))$$

— количество соли, выходящее из резервуара за время Δt (здесь знак «минус» обусловлен тем, что x — убывающая функция времени). Объём смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен —

$$\upsilon = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$$

Поэтому концентрация соли (т.е. количество соли, содержащейся в 1 л смеси) в момент времени t будет равна

$$\frac{x}{100+10t}$$

Если считать, что за короткий промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ концентрация соли в резервуаре оставалась неизменной, то за этот промежуток количество соли

уменьшится на $\frac{x}{100+10t} \cdot 20\Delta t$

Отсюда имеем $-\Delta x \approx \frac{x}{100+10t} \cdot 20\Delta t$

Это приближённое равенство, так как в действительности и за малый промежуток времени Δt концентрация соли в резервуаре, хотя немного, но изменится. Однако, чем меньше этот промежуток времени Δt, тем точнее будет это приближённое равенство, а значит, и приближённое

равенство $-\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{x}{100+10t} \cdot 20$

Поэтому если разделить обе части последнего приближённого равенства на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то, принимая во внимание, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'$,

получаем точное равенство

$$-x' = \frac{x}{100+10t} \cdot 20$$

или $x' + \frac{2x}{10+t} = 0$ (1)

На этом этап формализации завершён.

Переходя ко второму этапу, как и прежде, рассмотрим обходной путь. Из уравнения (1) имеем:

$\frac{x'}{x} + \frac{2}{10+t} = 0$, или $(\ln x)' = -\frac{2}{10+t}$

откуда

$$\ln x = -2\int \frac{dt}{10+t} = -2\ln(10+t) + \ln e^{C_1},$$

что даёт

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}, \ (\mathrm{C}{=}e^{C_1}). \qquad (2)$$

Для определения С используем начальное условие: $x = 10$ при $t = 0$. Поэтому С = 1000. Итак, закон изменения количества соли в килограммах, находящейся в резервуаре, в зависимости от прошедшего времени t в минутах даётся формулой

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \qquad (3)$$

Заметим, что из формулы (3), зная количество соли, оставшейся в резервуаре, (последнее легко установить, измеряя объём резервуара и концентрацию соли в нём), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

Снова возвращаемся к уравнению (1). Это линейное однородное уравнение первого порядка. Поэтому согласно известной формуле общего решения для такого уравнения имеем:

$$x = Ce^{-\int\frac{2dt}{10+t}} = Ce^{-2\ln(10+t)} = \frac{C}{e^{2\ln(10+t)}} = \frac{C}{(10+t)^2}$$

К уравнению (1) можно вернуться и в третий раз, переписав его в виде

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2x}{10+t} = 0$, а затем в виде $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{2dt}{10+t} = 0$

И решая последнее как уравнение с разделёнными переменными, придём к равенству (2).

Рассмотрим компьютерную реализацию данной задачи.

Решение дифференциального уравнения в виде семейств функций:

X = C / (10 + t)^2,

Где X — количество соли в килограммах, t — время в минутах.

Для начального условия t = 0, X = 10 получим С = 1000, так что

X = 1000 / 10 + t)^2.

С помощью графиков можно продемонстрировать решение дифференциального уравнения, как семейство функций, из которых с помощью начальных условий выбирается то, которое единственно и необходимо.

Для этого строим функции X при C = 900, 1000, 1100.

Таблица семейства функций при t от 0 до 5 с шагом 0,5.

t	X		
	C=900	C=1000	C=1100
0	9	10	11
0,5	8,163265	9,070295	9,977324
1	7,438017	8,264463	9,090909
1,5	6,805293	7,561437	8,31758
2	6,25	6,944444	7,638889
2,5	5,76	6,4	7,04
3	5,325444	5,91716	6,508876
3,5	4,938272	5,486968	6,035665
4	4,591837	5,102041	5,612245
4,5	4,280618	4,756243	5,231867
5	4	4,444444	4,888889

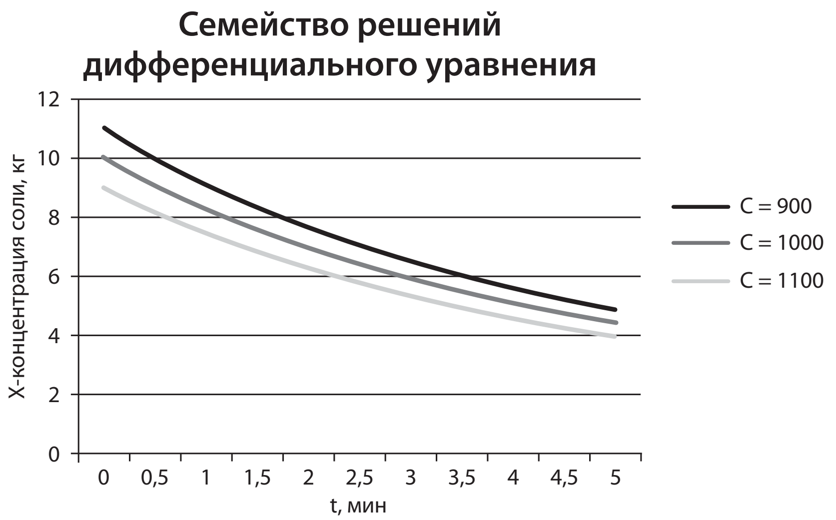


Рис. 2

Анализ результата

На графике отчётливо видно, что при С = 1000 кривая удовлетворяет начальным условиям: при $t = 0$, Х = 10. Из графика видно, что если концентрация соли составляет 6 кг, то прошло примерно 3 мин. Это демонстрация способа установления возраста морей и океанов.

Задача 4 «Преследование по кругу»

Одновременно два точечных тела начинают двигаться; первое — по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью V_1, второе — из центра той же окружности со скоростью $V_2 = 4{,}5V_1$, причём V_2 направлена всё время на первое тело. На каком расстоянии друг от друга окажутся тела через время $\tau >> 2\pi R / V_1$?

Алгоритм решения

1. Выясним траекторию движения второго тела.

А) Поместим начало координат в центр круга. Найдём координаты первого тела (x_A и y_A). По условию тело вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = V_1 / R$.

Пусть вначале координаты первого тела равны $x_{A1} = R$ и $y_{A1} = 0$. Через время $t_n = N\Delta t$ его координаты станут:

$x_{A,N} = R\cos(\omega t_N)$,

$y_{A,N} = R\sin(\omega t_N)$

В) Рассмотрим, как изменятся координаты второго тела $x_{B,N}$, $y_{B,N}$ за промежуток времени Δt. На рис. 3 изображены положения первого и второго тела (точки A_N и B_N соответственно) в момент времени $t_n = N\Delta t$ и второго тела в момент времени $t_{n+1} = N\Delta t + \Delta t$ (точка B_{N+1}). По условию, скорость второго тела всё время направлена на первое. Следовательно, точки A_N, B_N и B_{N+1} лежат на одной прямой.

Найдём расстояние между телами через время $r >> 2\pi R / V_1$?

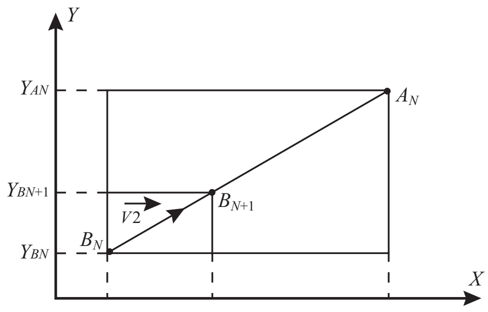


Рис. 3

Из подобия треугольников:

$$\frac{|B_{N+1}B_N|}{|A_N B_N|} = \frac{X_{B,N+1} - X_{B,N}}{X_{A,N} - X_{B,N}} = \frac{Y_{B,N+1} - Y_{B,N}}{Y_{A,N} - Y_{B,N}}$$

Поскольку скорость второго тела V_2, то расстояние $B_{N+1}B_N = V_2\Delta t$. Отсюда

$$X_{B,N+1} = X_{B,N} + (X_{A,N} - X_{B,N})V_2\Delta t / L_N$$

где $L_N = A_N B_N$ — расстояние между телами

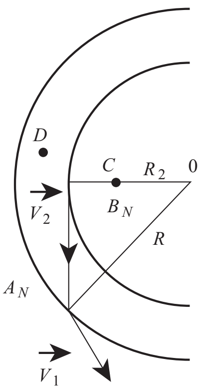
$$L_N = \sqrt{(X_{A,N} - X_{B,N})^2 + (Y_{A,N} - Y_{B,N})^2}$$

Анализ результата

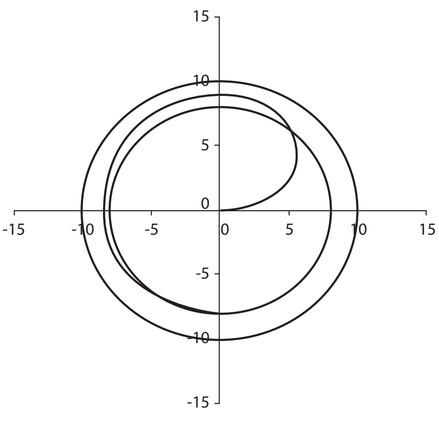
Построив траекторию движения второго тела видно, что после небольшого «перехлеста» траектория представляет собой окружность радиуса 8 м, а расстояние между телами стремится к 6 м.

Одно из возможных движений, удовлетворяющих условию задачи — это движение обоих тел с одинаковой угловой скоростью. При этом скорость второго тела направлена на первое.

Поскольку угловые скорости тел равны, то их взаимное расположение меняться не будет и скорость V_2 всё время будет направлена на первое тело. Равенство угловых скоростей однозначно определяет радиус окружности, по которой движется второе тело: $R_2 = RV_2 / V_1 = 0{,}8R$. Теперь



Вычисление расстояния между телами



Траектория движения второго тела

Рис 4

расстояние между точками просто вычисляется по теореме Пифагора:

$$L = \sqrt{R^2 - R_2^2} = 0{,}6R$$

Как же доказать, что траектория второго тела действительно стремится к окружности? Дело в том, что такое движение является устойчивым. Если в какой-нибудь момент второе тело оказалось бы в точке C (на рис. 4), то оно, двигаясь к точке A, попало бы на окружность радиуса R_2. Если бы оно оказалось в точке D, то его угловая скорость была бы меньше ω и оно должно было бы отстать от первого тела и, таким образом, также выйти на окружность R_2.

Выводы

Таким образом, компьютерное имитационное моделирование имеет большую практическую значимость и может помочь при решении многих задач из различных областей наук, которые обычно вызывали затруднения.

Построение имитационных моделей может быть полезно не только на уроках информатики, но и на уроках математики, биологии, физики.

Литература

1. *Богуславский А.А., Щеглова И.Ю.* Моделирование физических задач в электронных таблицах MS Excel // Информатика и образование. — 2004. — № 2.
2. Всероссийские олимпиады по физике: Методическое пособие. — Челябинск: ЧГПУ, 2000.
3. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О.Я. Савченко. — СПб.: Лань, 2001.
4. *Назаров С.А.* Использование электронных таблиц Microsoft Excel на уроках // Информатика и образование. — 2003. — № 12.
5. *Плеухова Л.Ф., Ситников Ю.К.* Решение задач по физике средствами MS // Информатика и образование. — 2003. — № 4.
6. *Бешенков С.А., Ракитина Е.А.* Решение типовых задач по моделированию // Приложение к журналу «Информатика и образование». — 2005. — № 1.