

В основе изложения математики — геометрия Евклида

Татьяна Ивановна Кузнецова, доцент Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук

Анализ учебников и научно-методической литературы, практика преподавания на подготовительном факультете выявили противоречия в применении такого известного дидактического принципа, как принцип систематичности и последовательности изложения, при разработке методики геометрического введения в средней школе обыкновенных дробей.

Известно, что в «Началах» Евклида даже не упоминается о непосредственном измерении и вычислении длин, площадей и объёмов, а соотношения между величинами геометрических фигур находятся посредством геометрических построений. Однако в последние десятилетия в изложение геометрии пытались внести существенные изменения, в частности перестроить систему аксиом: сравнение отрезков делается не геометрически, а через их меры. Так, у А.В. Погорелова геометрическое определение равенства отрезков (по Евклиду), которое многие из представителей нашего поколения помнят в интерпретации А.П. Киселёва, заменяется определением: «Два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину». При этом понятие длины вводится аксиоматически: «Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля».

Таким образом, была исключена проблема с «совмещением отрезков», однако при более глубоком рассмотрении проявляется другая проблема: поскольку теперь длина отрезка — это число, то для соблюдения принципа систематичности и последовательности изложения необходимо ещё до изучения равенства отрезков обучить учащихся определению длин отрезков, т. е. чисел. Итак, чтобы ввести понятие числа — обыкновенной дроби, надо уже владеть понятием числа. Мы получили петлю в логике изложения. Почему? Что нарушено? Что не учтено?

Методикой преподавания математики на уровне предвузовского образования занимались многие учёные. Наша задача состоит в том, чтобы, имея множество методик преподавания школь-

ной математики, разработать методику её преподавания на подготовительном факультете. При этом надо сначала разработать теорию подхода к решению этой проблемы, а затем её реализовать (для этого мы воспользовались разработками отечественного философа Г.П. Щедровицкого).

Как синтезировать различные теоретические представления и знания, если они получены «хаотично», вне связи друг с другом и без всякой ориентировки на последующий синтез? Ясно, что сначала надо перестроить исходные представления и знания, освободить их от одинаковых повторяющихся элементов содержания, дополнить другими представлениями, которые окажутся необходимыми с точки зрения задачи синтеза.

Однако, чтобы новые (полученные в результате перестройки) исходные представления увязывались с задачей синтеза, исследователь должен уже в исходном пункте иметь представление о действительной структуре объекта, который он изучает и хочет воспроизвести, и, кроме того, он должен соотнести с этим представлением все существующие односторонние проекции — знания. Иначе говоря, построение сложного, системного знания об объекте предполагает в качестве своего предварительного условия знание структуры этого объекта.

На первый взгляд кажется, что это требование содержит в себе противоречие. Но другого способа решить поставленную задачу нет, а более детальный анализ ситуации убеждает нас в том, что обнаруживаемое здесь противоречие — мнимое. Прежде всего, потому, что искомое структурное представление объекта ещё не теоретическое представление или теоретическое знание структуры этого объекта, оно лежит в особой плоскости представлений об объекте — методологической — и выполняет особую методологическую функцию в процессе исследования, являясь лишь средством для построения теоретического знания.

Такой вывод задаёт направление того движения, которое должно быть осуществлено для синтеза уже существующих знаний об объекте: нельзя получить решения этой проблемы, оставаясь в плоскости одних лишь имеющихся знаний. В это движение обязательно должен войти анализ тех процедур, посредством которых были получены существующие знания, а также нужно проделать особую работу по воссозданию структуры того объекта, проекциями которого являются уже имеющиеся знания. При этом, решая задачу синтеза различных знаний об одном объекте, надо вместо того, чтобы искать какие-то связи между ними в их собственной плоскости, воспроизвести каким-то образом структуру K объекта, а затем, исходя из неё, восстановить те «проекции», которые привели к имеющимся знаниям.

Итак, процедуры анализа существующих знаний об объекте и их синтеза, полученные посредством абстрагирования представлений и знаний, должны быть органически связаны между собой, образовывать единый познавательный механизм. Этот принцип может быть применён к любым теоретическим знаниям и представлениям, которые мы хотим объединить.

Что же такое K в нашем случае?

Изучение методической и методологической литературы, а также многолетний опыт преподавания математики на подготовительном факультете подсказали нам, что это должна быть новая, методологическая универсальная система специфических дидактических принципов разработки методики преподавания повторительно-подготовительного курса математики, представленная на рисунке 1. Эта система — результат анализа и синтеза основных дидактических принципов в обучении математике в средней и высшей школе. При этом мы ориентировались на системный подход, выражающийся «в стремлении построить целостную картину объекта». Из рисунка 1 видно, что это семислойное представление, построенное по принципу вложенных множеств.

Первый слой — всеобъемлющий, определяющий основное свойство — требование к универсальной системе специфических принципов — историчность. Второй слой определяется логичностью (логикой науки), которая развивается на материале и фоне исторически обусловленного материала.

Третий слой — генетичность, которая должна быть основополагающей при изложении учебного материала и является полем действия

для следующего, четвёртого, слоя — научности. Таким образом, первые четыре внешних слоя определяют последовательность организации содержания и в определённом смысле корректируют и само содержание.

Следующий, пятый, слой — обзорность — определяет специфику методики преподавания материала и является естественным продолжением первых четырёх, внешних, слоёв. Шестой слой — алгоритмичность — определяет рационализацию в решении огромного объёма задач, необходимых для овладения предлагаемым в повторительном курсе материалом.

Последний, седьмой, слой — связь с практикой — призван продемонстрировать перед учащимися разнообразие практических тем для исследования, методов разрешения возникающих при этом проблем, дать им возможность попробовать себя в самостоятельной исследовательской работе и тем самым обозначить уровень своих притязаний. Таким образом, последний слой необходимо рассматривать и как мотивационный, очень важный в воспитании и самоопределении абитуриента.

Три принципа (генетичность, научность и связь с практикой) используются в преподавании математики в школе. Все остальные школьные дидактические принципы важны и должны, разумеется, выполняться, однако они находятся в подчинённом положении по отношению к выделенным. Как видно из рисунка 1, к выделенным трём принципам мы прибавили ещё два новых принципа построения методики преподавания математики, которых нет ни среди школьных, ни среди вузовских, однако их можно учесть на уровне предвузовского образования в условиях глобального (широкого) повторения школьного курса математики — это обзорность и алгоритмичность.

Теперь расшифруем включение принципов историчности и логичности.

Образование — это не только превращение «природного» человека в «культурного», но и обретение индивидом своей действительной биографии. Исторический опыт и обучение служат тому, чтобы индивид шёл дальше своих предшественников, сохранял связь с прошлым и одновременно получил бы свободу по отношению к нему.

Перед нами стоит задача представить целостный процесс обучения конкретно, как единство многообразия. Понятие о всесторонне развитой личности прежде всего включает в себе указание на единство личности как исходную предпо-

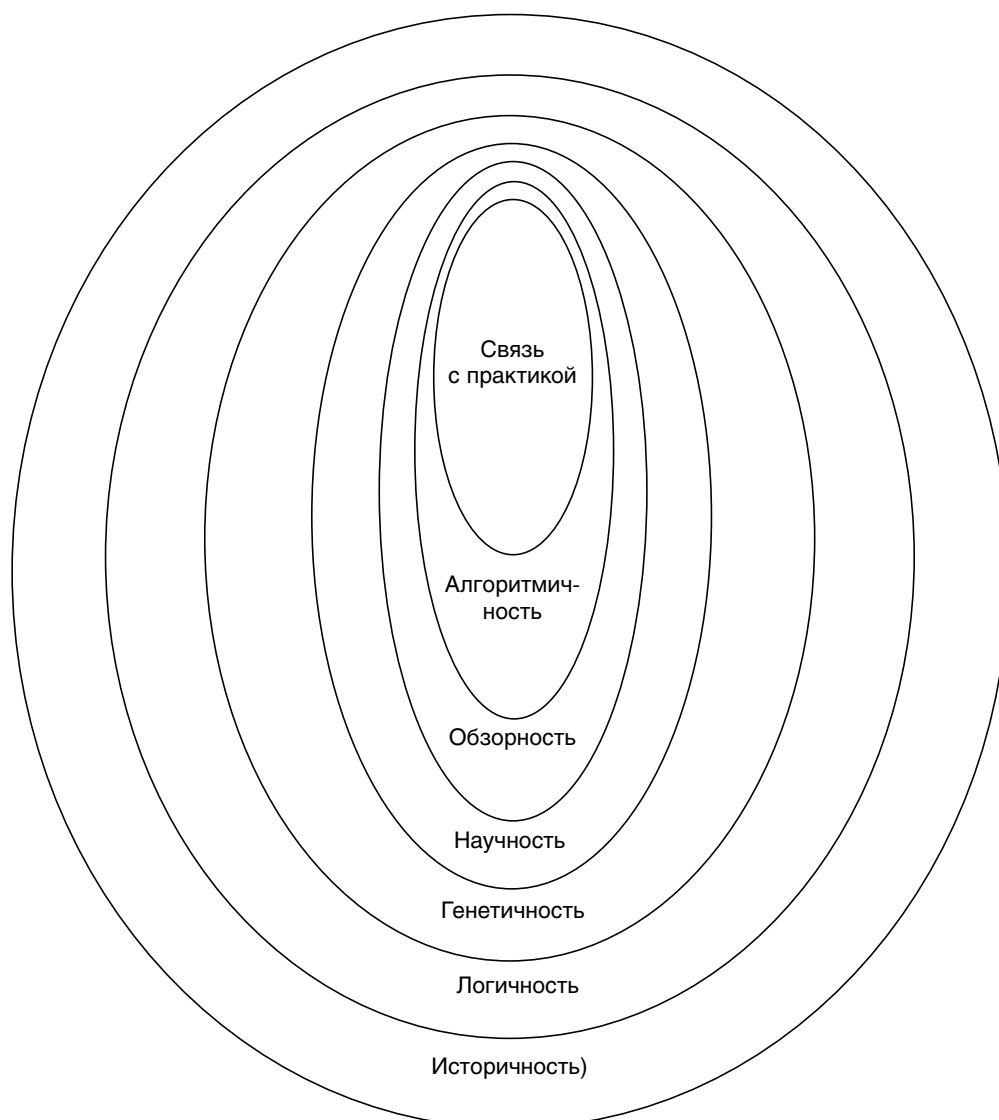


Рис. 1

сылку дальнейшего всестороннего развития. Деятельность может иметь много областей проявления, однако эти области могут быть изолированы друг от друга, так что их механическое сочетание не будет составлять живого органического сращения в личности развивающегося человека. Вот почему главным условием всестороннего развития личности является реализация единого основания, составляющего корень общественного бытия человека. Таким основанием выступает общественная деятельность человечества, представленная в своих всеобщих формах.

Гармоническое сопряжение общезначимых форм деятельности в жизни развивающейся личности достижимо лишь при подходе к обра-

зованию и воспитанию с исторической мерой. В основе этой «меры» лежит *проекция исторической биографии человечества на область индивидуального развития*. Поэтому нельзя понять задачи индивидуального развития, принципы формирования мировоззрения, не обращаясь к истории.

Принцип историчности чрезвычайно важен в обучении и воспитании — именно он определяет предпосылки обоснования содержания образовательных дисциплин. В философии этот принцип выступает как проблема соотношения логического и исторического. В области содержания образования принцип историзма даёт возможность выявить прочные *межпредметные связи*. Как раз экскурс в историю предмета воз-

вращает нам целостность мира, дифференциально отображённого в теперешнем разделении внутри науки и практики. Предпосылкой построения единой системы содержания образования может явиться только историко-логический анализ форм общественного сознания и общественной практики.

Логическое и историческое — это философские понятия, связанные с двумя способами рассмотрения исторически протекающего процесса. При историческом способе исследования факты и события рассматриваются и объясняются с учётом различных случайностей и зигзагов, сквозь которые прокладывают себе дорогу объективные закономерности. При логическом же способе рассмотрения исторические факты и события излагают в необходимой закономерной последовательности и связях, т.е. за исключением всего несущественного, случайного, нетипичного. В основном, в главном логическое совпадает с историческим.

Таким образом, логический способ рассмотрения, в сущности, является тем же историческим методом, только освобождённым от исторической формы и от мешающих случайностей. С чего начинается история, с того же должен начинаться и ход мыслей, а его дальнейшее движение будет представлять собой не что иное, как отражение исторического процесса в абстрактной и теоретически последовательной форме; отражение исправленное, но исправленное соответственно законам, которые даёт сам действительный исторический процесс, причём каждый момент может рассматриваться в той точке его развития, где процесс достигает полной зрелости, своей классической формы.

Таким образом, выявленная нами петля в изложении математики доказывает, что описанная у А.Д. Александрова историческая последовательность развития геометрии (в частности, появления понятия равенства отрезков) и появления понятия числа не является случайной и, следовательно, должна соблюдаться в изложении соответствующего материала.

Автор попытался ликвидировать образовавшуюся петлю, при этом, естественно, равенство отрезков понималось по Евклиду, использовались его аксиомы и дробные числа вводились только после изучения теоремы Фалеса и с помощью задачи деления отрезка на равные части. Понятие меры длины отрезка было введено только после изучения действительных чисел и их изображения на числовой оси.

Логика науки — это такая последовательность расположения элементов знания или учебного материала, которая повторяет ход изменения некоторой характеристики изучаемого данной наукой объекта. Может быть выделено несколько (много) различных характеристик, которые служат для описания объекта, и их выделение зависит от состояния науки в данный момент времени, поэтому одни логики науки сменяют другие, возникают новые. Так, в геометрии изменение пятого постулата привело к появлению другой геометрии — геометрии Лобачевского, в химии логика Д.И. Менделеева, в соответствии с которой он рассматривал материал по неорганической химии, резко отличается от логики его предшественников. Развивая далее понятие логик науки, обратим внимание на такую его особенность: несмотря на их объективность, выделение и использование логик науки в учебных целях подчинено субъективным интересам преподавателя, которые, естественно, часто являются отражением целей обучения.

Так, возвращаясь к предложенному выше материалу, заметим, что его изложение не предполагает предварительное изложение раздела «Окружность», однако, если поставить цель «точного» построения параллельных прямых, т.е. не с помощью угольника и линейки, а циркуля и линейки, то предварительное изложение темы «Окружность» (в соответствующем, достаточно ограниченном объёме) становится необходимым.

Рассматривая учебный процесс как самоорганизующуюся систему, обратимся к синергетике — теории самоорганизующихся систем и к её основному понятию — бифуркации, которая являет нам разрыв или ветвление эволюционного процесса. Бифуркация, которую испытывает система, может иметь структурный либо системный характер. В первом случае среди альтернативных виртуальных сценариев, следующих за бифуркацией, имеется, по крайней мере, один, при переходе к которому система сохраняет свои основные признаки и функциональные особенности, происходит лишь её структурная перестройка. Во втором случае виртуальная альтернативистика не содержит ни одного такого сценария. Это означает, что за границей бифуркации исходная система уже не сможет существовать, на её месте возникнет нечто принципиально иное. Теперь ясно, что в нашем примере имеет место системная катастрофа. Приведём пример структурного кризиса, когда после прохождения точки бифуркации возможны два пути.

Уплотнение системы натуральных чисел исторически предшествовало её расширению. Однако в школе не следуют в этом вопросе истории — начинают с расширения. Объясняется это тем, что введение отрицательных чисел, связанное с расширением области натуральных чисел, происходит проще, нежели введение дробных и тем более иррациональных чисел, связанное с уплотнением области натуральных чисел.

Такой подход хотя и не соответствует историческому развитию науки, но и не противоречит логике этого развития — в таком изложении не образуется логических петель. Действительно, линии их изложения не пересекаются, да и в истории первенство уплотнения множества натуральных чисел можно объяснить первенством решения жизненных задач (деления урожая, разметки земляных участков, торговли и т.д.).

Далее, вернувшись к представлению рисунка 1, начинаем следующий этап мыслительной работы — использование этого представления уже непосредственно для синтеза знаний в единой теоретической системе.

Чтобы связать и действительно объединить знания, их нужно ещё предварительно перестроить. Именно эта работа и идёт на втором этапе. Начинается новое, вторичное соотнесение уже существующих знаний с разработанным

на их основе представлением объекта в свете специальной целевой установки: сделать их теоретически однородными и объединяемыми. Это всегда ведёт к перестройке знаний, часто настолько существенной, что она выступает как процесс замены одних знаний другими.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока нам, наконец, не удаётся свести исходную совокупность знаний к единому сложному знанию, выводимому из имеющегося у нас представления объекта.

В наглядной форме такие отношения и функции представления объекта (К) изображены на рисунке 2, где фигуры (M₁), (M₂), (M₃) символизируют отдельные существующие знания (для нашего случая — отдельные методики преподавания математики, их три — для определённости, на самом деле, их может быть и меньше или больше).

Такое объединение знаний имеет неоспоримую ценность: его итогом является своеобразное «сплющивание» всех знаний об объекте, расположенных как бы в разных планах и проекциях и потому непосредственно не сводимых одно к другому. Такая организация существенно облегчает оперирование системой знаний и, в частности, обеспечивает её формализацию.

Чтобы осуществить это «сплющивание» в нашем случае, вспомним, что если предмет

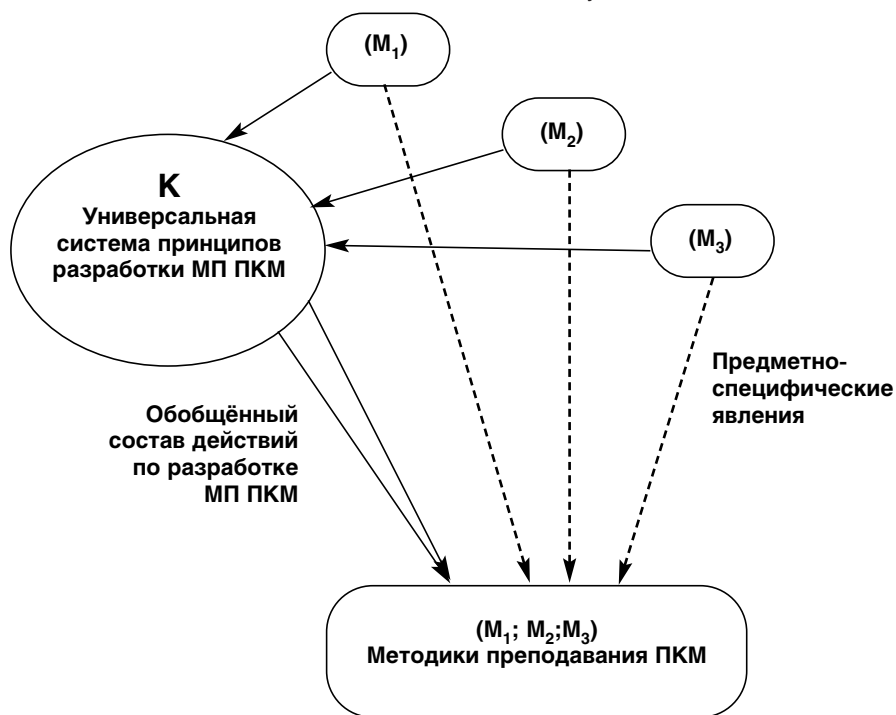


Рис. 2

методики учебного предмета определяется как связь, взаимодействие преподавания и учения в обучении конкретному учебному предмету, т.е. конкретному содержанию, то форма связи преподавания и учения на конкретном содержании определяется характером изучаемой в данном содержании связи. Эта связь может быть объектной или мыслительной.

Мыслительная связь подчиняется законам формальной (математической) логики, поэтому преподавание и изучение этой связи определяются анализом и синтезом логических приёмов мышления, применяемых при выводе одних умозаключений из других, т.е. при доказательстве теорем. При этом систематичность и последовательность преподавания (изложения) рассматриваемого содержания проверяются построением его генетического дерева и последующего восстановления его научного вывода методами математической логики.

Что касается объектных связей между элементами содержания, то они не могут быть полностью преподнесены только на основе формальной логики, поскольку, как говорит отечественный математик и логик Д. Бочвар, «математика не выводима из формальной логики, ибо для построения математики необходимы аксиомы, устанавливающие факты из области объектов, и прежде всего — существование в последней определённых объектов. Но такие аксиомы обладают уже внелогической природой».

Такое положение объясняет то, что при обосновании системы школьного курса используются не только знания по математической логике, но и из истории науки, науковедения. При этом используется философская логика, которая существенно отличается от математической, формальной. Философия настаивает на необходимости исследования конкретно-исторического содержания мышления и его принципов. Она раскрывает отношения между теорией и практикой в их возникновении и историческом развитии, взаимосвязи между различными приёмами научного мышления, между ступенями его развития.

Таким образом, философская и формальная логики — две разные науки, различающиеся как предметами своего исследования, так и используемыми методами. Обе они изучают, подобно другим наукам, человеческое мышление, но разные его стороны. Формальная логика в основном стремится выявить структуру знания, «анатомизировать» и описать формальные связи его элементов. Философская же логика трактует истину как процесс, как возникновение

и развитие знания, последовательно проходящее в своём развитии определённые ступени.

В нашем случае такой подход к достижению поставленной цели позволил синтезировать знания по разработке методик преподавания математики через описание соответствующей процедуры, состоящей из следующей последовательности действий:

Обобщённый состав действий по разработке методики преподавания математики на подготовительном факультете:

А. Анализ ситуации, т.е. выявление и формулирование возникшей проблемы. Выделяем одну из четырёх вариантов проблем, которые на данном этапе обучения являются специфическими и наиболее важными:

1. Сомнение в характере и сути связи между элементами содержания. В этом случае необходимо провести анализ этой связи. Она может быть двух видов:

а) мыслительная; б) объектная.

2. Целесообразность обзора.

3. Возможность алгоритмизации.

4. Желание ввести дополнительный материал.

Б. В соответствии с выявленной проблемой поступаем следующим образом:

1. В зависимости от вида связи выполнить следующий план дальнейших действий:

а) если эта связь мыслительная, то она подчиняется законам формальной логики, которая может быть использована для обоснования этой связи и (или) для выявления генезиса связи (анализ с помощью составления генетического дерева), а также последующего его научного обоснования (синтез путём обоснования связи). Этот процесс возможен только при условии использования принципа единства генетичности и научности;

б) если связь объектная и вызывает какие-либо неудовлетворения (например, какие-либо противоречия), которые надо разрешить, и если они не снимаются средствами формальной логики (по методике предыдущего пункта), то необходимо обратиться к истории развития науки (анализ места рассматриваемого материала в соответствующей хронологической цепи) и, воспользовавшись логикой развития науки, попытаться разрешить создавшуюся проблемную ситуацию (синтез исторически обусловленного места этого материала в логически последовательной структуре математического знания). При этом, естественно, входит в действие закон

единства исторического и логического в преподавании.

2. Если рассматриваемый материал состоит из нескольких частей, изучаемых в разных частях курса и связанных какой-либо общей линией, целесообразно попытаться выполнить всеобъемлющий (на реальном уровне) обзор этого материала.

3. Если рассматриваемый вопрос поддается алгоритмизации (провести анализ), попытаться разработать соответствующий алгоритм; исследовать вопрос выявления аналогов и обобщения полученного алгоритма, а затем сделать обзор (синтез), объемлющий все материалы на изученную тему, объединённые общим алгоритмом.

4. Если рассматриваемый материал является дополнительным и находится в плане его теоретического углубления или расширения, развития межпредметных связей или приложений изученных разделов математики, то для сохранения единой теоретической линии исследуем этот материал, используя методику предыдущих пунктов: 1) анализ генезиса этого материала; в случае сложностей, возникших при этом, 2) анализ его места в исторической цепи развития математики и других предметов; 3) синтез путём обоснования связи; 4) анализ и синтез материала в соответствии с пп. Б2, Б3, естественно, в рамках целесообразного всеобъемлющего взгляда на рассматриваемый материал.

Отметим, что обобщённый состав действий позволяет разрабатывать только схемы действий: для разработки методик преподавания конкретных фрагментов курса необходимо хорошее владение предметно-специфическими знаниями и умениями из одной или нескольких областей знания.

Теперь должно быть ясно, что из предложенного представления предмета нашего исследования выводятся потом все уже существующие знания об объекте, и оно либо служит их основанием, либо заставляет их перестраивать. Поскольку именно на его основе строится новое синтетическое знание, которое затем используется в практической работе, постольку это представление является моделью объекта.

Теперь попробуем вскрыть возможную причину появления рассмотренной нами петли, объяснив методологическую природу её образования. Суть её — в сложности понятия эквивалентности равенства отрезков и равенства их мер: оно приобретает особо важный смысл — ведь это эквивалентность, имеющая место между ра-

венством геометрических объектов и равенством чисел.

Возможно, причина того, что некоторые авторы решили определить равенство отрезков через равенство длин-чисел кроется в следующих рассуждениях: мол, имеет место эквивалентность, почему бы не преподнести равенство отрезков с другого конца. Однако, эта эквивалентность чисто теоретическая — она находится в плане раздела науки — математической логики. Она абстрагирована от исторического развития науки, от логики развития науки, а ведь именно последнее выделяет определение равенства отрезков через совмещение как главенствующее. При этом нет никакого противоречия, поскольку главенствующим оно является в другом плане — в плане методики преподавания математического материала в обучении, которая строится в соответствии с логикой развития науки. Смещение этих планов — плана логики науки и плана математической логики, видимо, и привело к выявленной петле.

Итак, в противоположность подходам, следовавшим лозунгу «Долой Евклида!», провозглашённого ещё в 1959 году представителем школы Н. Бурбаки Жаном Дьедонне на Международной конференции по вопросам школьного преподавания математики, проходившей в Реймонте (Франция), этот подход в основу изложения математики ставит геометрию Евклида. Именно геометрия Евклида, которая построена в соответствии с принципом единства исторического и логического, препятствует противопоставлению исторического мышления логико-аксиоматическому мышлению. При этом подтвердились удивительно точные, замечательные слова выдающегося педагога Ивана Козьмича Андропова о том, что именно в геометрии Евклида «дан синтез интуитивного и логико-аксиоматического мышления», что «представляет большую ценность для школьников всех народов и времён». □