

Серпантинное построение курса математики для профильных классов

Павел Иванович Самсонов, преподаватель математики школы № 129 г. Москвы

Успешность профильного обучения во многом зависит от методики преподавания профильных предметов, от того, насколько активно применяемая методика будет включать ученика в учебный процесс, насколько полно она будет учитывать уровень его первоначальной подготовки за курс основной школы. При этом большое значение играет не только предметная подготовка ученика в приоритетной группе предметов, но и уровень сформированности его общеучебных умений, уровень его самоорганизованности, развитость воспитывающих черт характера и др. Сама же методика будет определять и непосредственную форму построения учебного курса. И именно поэтому, выстраивая современную модель профильной школы, важно сосредоточиться на анализе уже достигнутых результатов и на их основе предложить для нового типа школы наиболее эффективные методики и варианты построения учебных курсов.

Рассмотрим существующие варианты построения учебных курсов для школьников. С точки зрения логики построения объяснений и изучения учебного материала в качестве основных выделяют два подхода: линейный и концентрический (в этой статье будет употребляться термин *конценторный*).

По линейному принципу, при котором каждая следующая тема оказывается новой, построена большая часть всех школьных предметов. Этот принцип предполагает выстраивание отдельных частей учебного материала в чёткую последовательность связанных между собой элементов учебного курса, которые за время школьного обучения изучаются только один раз. Вообще линейное расположение учебного материала предполагает, что каждый раздел учебного курса изучается с той степенью глубины и подробности, которую требуют задачи преподавания, без возвращения к нему на следующих этапах обучения. При этом изучение любой новой темы не является обобщением или расширением предыдущей темы, оно лишь опира-

ется на изученный ранее материал. Вся физическая география изучается по схеме: материк — его географическое положение — занимаемая площадь — ландшафт — полезные ископаемые — население. Курс алгебры выстраивается, как правило, тоже по линейному принципу: понятие тождества и преобразования уравнения неравенства системы уравнений. Однако, по мнению многих методистов и учителей, при таком подходе новый материал ложится на «пустое место», и, для того чтобы преодолеть определённые трудности, необходимо разработать пропедевтические курсы. Эти курсы могут быть как встроенными в основное содержание, так и находиться вне его.

При конценторном построении учебного курса происходит периодический возврат к ранее изученному и *формирование на его основе новых знаний по той же теме*. При таком построении можно изучать части учебного материала повторно, но с разной степенью углубления на нескольких ступенях обучения. В нашей отечественной школе в конценторном изложении построен курс физики. Он разделён на два концентора: 7–8-е классы, когда изучаются в ознакомительном варианте все разделы физики (за исключением ядерной физики и физики элементарных частиц), и 9–11-е классы, когда изучаются те же самые разделы, но уже более углублённо и расширенно.

Одним из первых отечественных педагогов — математиков, применивших конценторный вариант построения учебного курса, был В.А. Евтушевский. Он писал: «Интерес работы для ученика, без сомнения, должен заключаться не в материале, предполагаемом для изучения, а в способе разработки этого материала со стороны учителя». Однако его конценторное построение учебного материала реализовывалось в форме пропедевтических (приготовительных) курсов.

На преимущества конценторного построения учебного курса указывал и А.Н. Колмогоров: «Что касается старшей ступени обучения,

то в обсуждаемом проекте отмечается, что принятая сейчас её двухлетняя продолжительность (IX–X классы) многими воспринимается как «явно недостаточная». Интересно заметить, что авторы вводимой сейчас новой программы (по физике) в явочном порядке провели для своего предмета чёткое деление на два концентора — двухлетний (VI–VII классы) и трёхлетний (VIII–X классы). Надо сказать, что математики, если бы они при составлении новых программ решились на нечто аналогичное, тоже получили бы преимущества, но при работе над новыми программами они чувствовали себя связанными представлением о важности известной законченности курса восьмилетней школы».

Развитие любой науки не происходит линейно, она развивается по спирали. Учебный же предмет — это как бы проекция самой науки на мыслительную деятельность общекультурного человека или, как сказал В.В. Давыдов, на плоскость усвоения. Сама же программа учебного предмета отражает лишь перечень вопросов, подлежащих усвоению, но не определяет стиля их изложения. А ведь *от стиля изложения материала программы зависит успех вообще всего обучения и он же определяет методику*.

Обратим внимание на то, что обе системы построения учебных курсов имеют определённые недостатки. Так, при линейном построении достаточно высока интенсивность набора (приобретения) понятий и методов, подлежащих изучению. А при конценторном изложении затрачивается достаточно много учебного времени, что при нынешнем дефиците часов весьма существенно.

О причинах неуспешности в изучении предметов сами дети говорят, что «самое главное — это отсутствие возможностей вернуться и изучить ещё раз всё то, что они изучали с самого начала». Разумеется, возврат не означает вдалбливание, возврат — это активная работа в простых или частных случаях и последующая работа по расширению формируемой базы знаний, т.е. *нужно построить учебный предмет в развивающем ключе*. Кроме того, математика в группе профильных предметов достаточно объёмна по своему содержанию, а уровень предметной подготовки (по соотношению с требованиями к поступающим в вузы) должен быть достаточно основателен, поэтому выстраивание этого курса не по линейному принципу целесообразно.

Обратимся для примера к учебнику тригонометрии А.Г. Мордковича. Преимущества этого учеб-

ника не только в том, что при введении тригонометрических функций не произносятся слова «вектор», «проекция вектора на ось» и что много внимания уделяется числовой окружности, но и в том, что разрушена старая схема линейного построения тригонометрии: определение тригонометрических функций — формулы преобразования — графики тригонометрических функций — обратные тригонометрические функции — тригонометрические уравнения — тригонометрические неравенства и системы уравнений.

Разрушив линейное построение тригонометрии и введя в курс элементы пропедевтики — числовую окружность с «играми» на ней, решение на числовой окружности тригонометрических уравнений в «хороших» случаях, Мордкович добился главного — тригонометрия для ученика перестала быть наукой с огромным количеством «страшных» формул.

Может сложиться впечатление, что конценторная система изучения материала, оказывая помощь ребёнку с недостаточным уровнем подготовки, будет тормозить развитие сильного (мотивированного) ученика. Однако это не так. Ввиду того, что *конценторная система не предполагает пропедевтики*, то пока «слабый» осваивает, сильный уже на этом материале будет решать содержательные задачи. Это же означает, что появляется возможность для действительного учёта индивидуальных возможностей и склонностей обучающихся, что, как говорят психологи, способствует сохранению психологически комфортной обстановки в учебном процессе.

Итак, курс алгебры и начал математического анализа для классов, имеющих естественно-научный профиль обучения, наиболее целесообразно построить в конценторной форме или, внося в понимание конценторной формы некоторые изменения, в схеме «серпантина».

Серпантинное построение не предполагает изучение пропедевтических разделов, оно позволяет выстраивать курс сразу так, что *на каждом витке возврата происходит расширение уже имеющихся знаний по данной теме*. Суть серпантинного построения учебного курса (и метода обучения) состоит в том, что учебный материал, составляющий несколько разделов (а возможно, и тем) предлагается не в виде систематического курса, а в виде нескольких *завершённых внутри себя элементов*. При этом первый элемент, как первый виток серпантина, задаёт и знакомит ученика с небольшим по объёму понятийным аппаратом и всеми основными изучаемыми методами и приёмами. Каждый же сле-

дующий виток лишь расширяет уже имеющуюся понятийную базу, незначительно привнося в него методы (имеются в виду методы решения задач). Чёткое овладение материалом первого витка помогает активному встраиванию в работу по освоению любого следующего, поскольку фундаментальность подготовки на первом витке способствует лёгкому продвижению на каждом следующем.

Отличие серпантинного метода от конценторного заключено в том, что при конценторном построении происходит возврат ко всему изученному материалу, а при серпантинном изучении возврат происходит лишь по отношению к изученным методам, понятийная же база претерпевает только расширение. Преимущества этого построения довольно значительные: во-первых, нет излишней траты времени, во-вторых, нет опасности потери интереса у сильных учащихся. К тому же *серпантинное построение представляется как более мягкая форма конценторного построения.*

Несколько слов о названии. Такое построение учебного курса названо серпантинном по аналогии с горной дорогой — серпантином. Ведь когда стоишь у подножья, то видишь только вершину. Когда уже поднимаешься, то видишь и пройденный путь, и путь наверх, при этом сам пройденный путь, даёт немало впечатлений. А когда уже поднялся, то понимаешь, что путь проделан не зря.

Рассмотрим пример: тема «Логарифмы». Традиционно эта тема изучалась так: определение логарифма; логарифмические тождества; график логарифмической функции; логарифмические уравнения, которые решались на основе свойства монотонности логарифмической функции; логарифмические неравенства. При таком построении уравнение $\log_3 x = 2$ ученик решал так: $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 9$, т.е. он стремился использовать именно свойство монотонности логарифмической функции и не видел способа решения этого уравнения по определению логарифма: $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$. Казалось бы, в чём разница? А разница заключается в том, что, имея только определение логарифма, мы уже можем решать достаточно сложные и содержательные уравнения, например такие:

$$\frac{1}{\log_2 x + 1} + \frac{6}{\log_2 x + 5} = 1, \log_{x+8} (6x - \sqrt{x+8}) = 0,5,$$

ученик может лучше усвоить само определение логарифма, а впоследствии выбирать наиболее оптимальный путь решения.

Серпантинное построение курса «Логарифмы» позволяет постепенно формировать интуитивное представление о равносильных и неравносильных преобразованиях логарифмических уравнений и неравенств. *Оно даёт возможность по равномерному распределению большого класса задач по изучаемым темам.*

Ещё один пример относится к элементам математического анализа. Как правило, сначала учат правилам дифференцирования функций, а потом применению производной к исследованию функций и решению сюжетных задач, что, по образному выражению учащихся, означает, «что туман рассеивается в конце пути». При серпантинном изложении математического анализа мы сначала рассматриваем только функции, заданные полиномами, на их примере показываем возможности математического анализа и только после этого изучаем правила дифференцирования других функций, но уже сразу с практическими приложениями, что позволяет достичь перманентности и доступности изучения школьниками основ одномерного анализа.

Говоря о тригонометрии, целесообразней всего предложить такой вариант этого раздела школьной математики, построенного по принципу серпантина:

- 1) сначала учащиеся знакомятся с числовой окружностью как ещё с одной моделью множества действительных чисел; учатся устанавливать соответствия между точками числовой окружности и действительными числами; осваивают координатное определение синуса и косинуса числа, решая разнообразные задачи, в том числе и уравнения (с «хорошими» значениями);
- 2) затем происходит знакомство с формулами тригонометрии, при этом решается широкий класс задач: преобразование выражений, доказательство тождеств, вычисление значений тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений, в том числе с отбором корней;
- 3) изучение графиков тригонометрических функций и их применение для решения тригонометрических неравенств;
- 4) вводятся обратные тригонометрические функции как необходимость в новом символе для записи корней тригонометрических уравнений в «плохих» случаях (например, $\cos x = 0,3$); и изучаются свойства обратных тригонометрических функций;
- 5) систематизируются (заметим, не изучаются, а систематизируются) изученные ребятами

методы решения тригонометрических уравнений.

Содержание такого курса очень разнообразно и без затруднений может быть построено в развивающем ключе. Например, сразу после введения определения синуса и косинуса числа, можно предложить решить с помощью числовой окружности уравнения $2\sin x - \sqrt{3} = 0$, $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$, что позволит учащимся лучше разобраться в определении синуса и косинуса, поможет им в овладении навыками работы с числовой окружностью и будет способствовать заблаговременному развитию техники решения тригонометрических уравнений. Кстати, можно включить в курс, причём на самых ранних этапах изучения тригонометрии, и более сложные уравнения, например, $\sin x \sqrt{\cos x} = 0$. Работая с такими уравнениями, ученику придется всё чаще и чаще обращаться к числовой окружности, при этом не только для того, чтобы решить уравнения $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$, но для того, чтобы произвести выборку корней, тем самым развиваются оба полушария головного мозга, что очень значимо.

Итак, переход старшей школы к профильному обучению, скорее всего, даст толчок методической мысли учителей и учёных, методистов и преподавателей факультетов довузовской подготовки. Самое главное — это создать благоприятную почву для этой будущей методической мозаики, а для этого необходимо предусмотреть свободу в выборе стиля и методики обучения учащихся для учителя. □