Геометрическая реконструкция памятников архитектуры как метод обучения

Валентин Петрович Грибашев, *актёр, режиссёр*

Татьяна Ивановна Кузнецова, *доцент Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук*

Предлагаемый учебно-исследовательский материал апробирован с учащимися средней школы. Как показал опыт, он упражняет их ум в необычной ситуации, заставляет повторять многие положения из геометрии, развивает пространственное воображение. При работе с ним можно использовать навыки, полученные на уроках черчения, применять знания из информатики. Наш опыт может быть интересен и ученику и учителю хотя бы тем, что даёт возможность «активно» соприкоснуться с одним из семи чудес света, единственным, сохранившимся до настоящего времени.

Поскольку сведения о разметке египетских пирамид не сохранились, рассматриваемые задачи можно решать с использованием проблемного метода. Геометрическая реконструкция как способ учебной работы уникальна именно с точки зрения полноценной реализации проблемного метода. Решение задач подобного типа готовит учащихся к успешному разрешению реальных жизненных ситуаций.

Многое из предлагаемого можно (по усмотрению преподавателя) подать учащимся в качестве проблемных задач и задач на доказательство, задач на вычисление, оценочных задач, геометрических или чертёжных задач на построение (и их интегрированных вариантов), практических задач на алгоритмизацию разметочных процессов, задач на различные варианты получения результатов вычислений (ручной счёт плюс использование таблиц и с помощью компьютера).

Геометрическая реконструкция предполагает не только и не столько восстановление первоначального облика археологического памятника, сколько восстановление процесса его создания. Мы предлагаем вариант реконструкции разметочных работ древней египетской усыпальницы — пирамиды Джосера, основателя III династии фараонов, возведённой в период Древнего царства в 2780–2760 г. до н. э. Ансамбль пирамид в Гизе — Хеопса, его сына Хефрена и внука Микерина и пирамида Джосера с давних пор безоговорочно считаются первым из семи чудес света.

Ни в одном из дошедших до нас древнеегипетских литературных источников (в настоящее время их насчитывается уже около четырёх миллионов) не сказано о процессе разметки при строительстве пирамид. Между тем загадки этих замечательных сооружений по-прежнему будоражат умы людей.

Инструментарий

Техника геометрического построения при проведении разметочных работ в строительстве во многом зависит от свойств и возможностей измерительно-разметочного инструмента. Традиционный для Древнего Египта инструмент — сплетённый из человеческого волоса шнур. Свободно двигающиеся по шнуру петлеобразные ползунки, имеющие зажимы-фиксаторы, позволяли быстро и без деформирования шнура делать «засечки». Универсальное приспособление для натягивания шнура и крюк давали возможность манипулировать шнуром как в горизонтальном, так и в вертикальном положениях.

Обсуждаемые приспособления для разметки использовались не только при строительстве пирамид, но и в обычной практике разметки земельных участков и строительстве всевозможных построек; шнуром и шестами при разметке строители и землемеры пользуются и по сей день — там, где нет возможности или необходимости использовать более точные современные приспособления (см., например, учебник геометрии для средней школы: Геометрия: Учебник для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 10-е изд. М.: Просвещение, 2000. С 7). Этим и объясняется столь широкое их отражение в различных областях человеческой культуры. Поэтому пирамиды можно расценивать как конкретный пример из строительной практики.

«Отбивка» линии на размечаемой поверхности производилась меловым порошком по тени от шнура — это гарантировало точность проведения прямой вне зависимости от рельефа поверхности. Такой технический приём обусловил время проведения работ по разметке площадок под основание пирамид — полуденные часы в течение шести дней летнего солнцестояния, когда тень от шнура почти совпадает с тенью от приспособления для натягивания. Жёсткое ограничение времени, отпущенного на разметку оснований пирамид, требовало не только чёткой согласованности взаимодействия тех, кто производил разметку, но и максимальной упрощённости техники геометрического построения.

Ориентирование пирамид относительно сторон света производилось также с помощью тени, но только не от шнура, а и от шеста. Предполагаемые размеры основания определяли количество шестов, устанавливаемых друг от друга на длину тени. Операция «закладки» центральной оси пирамид проводилась, скорее всего, в первый день летнего солнцестояния, когда солнце поднимается почти на востоке — на восходе, с момента появления верхнего края солнца над горизонтом и до момента отрыва его нижнего края от линии горизонта, — тогда шест отбрасывал чёткую длинную тень. За этот промежуток времени надо было успеть «провесить», как говорят землемеры, прямую линию по тени от шестов-посохов. В отличие от «отбивки» линии, служащей для «проведения» отрезка по его концам, здесь строится луч с началом в предварительно выбранной точке и с направлением, задаваемым исключительно солнцем.

Построив таким образом (по тени) центральную ось основания, переходим к следующей операции — построению перпендикулярной оси. Будем считать, что при разметке прямоугольника основания пирамиды Джосера все операции производились с помощью шнура длиной 20 м (и это, возможно, не случайно — ведь это главный строительный модуль, который ввёл и обосновал А. Снисаренко (*Снисаренко А.* Гармония и алгебра Великой пирамиды // Техника — молодёжи. 1978. № 12) и поддержал С.Б. Проскуряков в своей книге (*Проскуряков С.Б.* Строители пирамид из созвездия Большого Пса. Орёл: Книга. 1992. С.149). Поэтому на построенной ранее оси откладываем отрезок, равный 20 м, отметив при этом его середину (рис. 1, 2). Середину шнура легко определить, аккуратно перегнув его и совместив его концы. Строить взаимно-перпендикулярные оси и стороны вспомогательного квадрата будем с помощью одного и того же технического приёма — закрепляя концы шнура в нужных точках и оттягивая его середины (рис. 3–6, 8–11), т. е., выражаясь геометрическим языком, с помощью построения сначала равностороннего треугольника со стороной 10 м (рис. 3–6), а потом — равнобедренного треугольника с такой же боковой стороной (рис. 8–11). Из геометрии известно, что треугольник — фигура жёсткая, т. е. он однозначно определяется своими сторонами (в отличие, например, от параллелограмма), а это и обеспечивает однозначность проводимых таким образом построений.

Используя свойства равностороннего треугольника и его медианы (она является и высотой), нетрудно обосновать проведённые построения второй оси (рис. 3–6) и сделать вывод о том, что она перпендикулярна первой оси.

Вспомогательный квадрат. На второй оси в обе стороны от точки пересечения осей отметим отрезки OD и OD_0 (рис. 7) с длинами 10 м, а затем вышеуказанным способом построим вспомогательный квадрат $D_1D_2D_3D_4$ (рис. 8–11). Обоснование этих построений провести тоже нетрудно, опираясь на известный признак квадрата — это четырёхугольник, у которого все стороны равны между собой и один угол — прямой.

Правильность построения вспомогательного квадрата проверяется тем же шнуром с «засечкой», отмечающей длину диагонали каждой из четвёртей квадрата — вспомним один из основных признаков прямоугольника, в частности, в нашем случае, квадрата, — равенство диагоналей (см. рис. 12, на котором показана проверка правильности построения квадрата ODD_4A).

Прямоугольник основания пирамиды. Исходный отрезок для построения малой стороны прямоугольника — основания пирамиды определим как отрезок AC диагонали AD четверти вспомогательного квадрата, где точка C является точкой пересечения этой диагонали со стороной OB равностороннего треугольника OAB (рис. 13), построенного в самом начале. На сторонах D_1D_2 и D_3D_4 вспомогательного квадрата от его первой оси откладываем влево и вправо отрезки $A_0A_1 = A_0A_2 = AA_3 = AA_4$, равные отрезку AC (рис. 14). Через концы этих отрезков проводим отрезки A_1A_4, A_2A_3 и получаем прямоугольник, являющийся исходным для построения основания пирамиды Джосера (рис. 15).

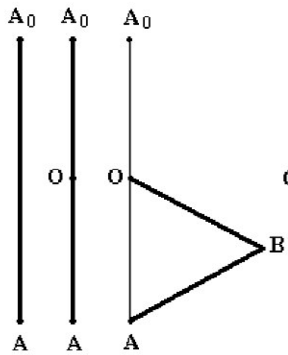


Рис. 1, 2, 3

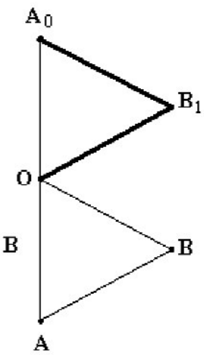


Рис. 4

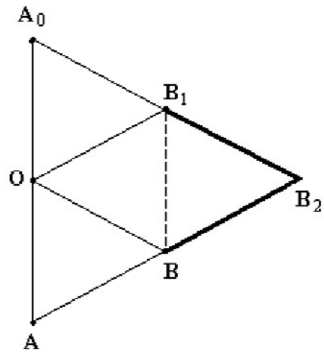


Рис. 5

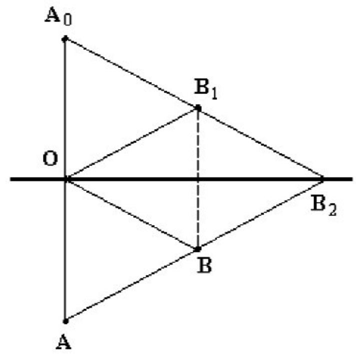


Рис. 6

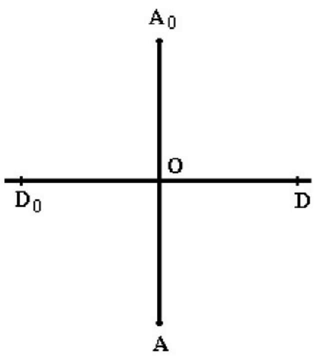


Рис. 7

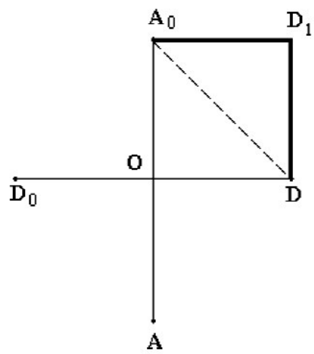


Рис. 8

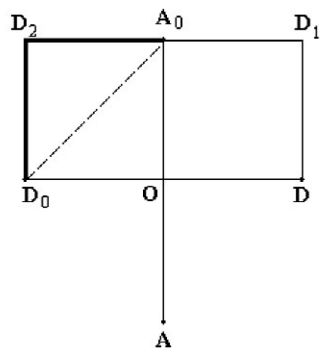


Рис. 9

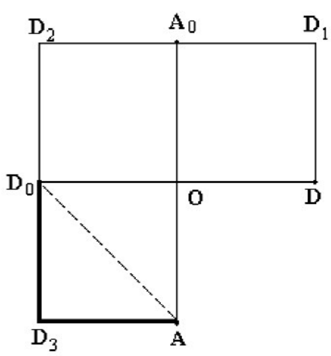


Рис. 10

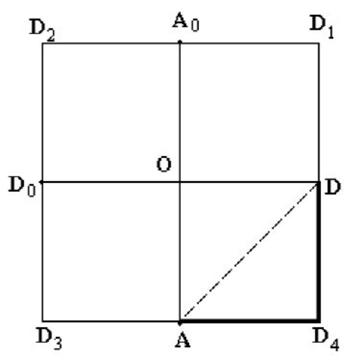


Рис. 11

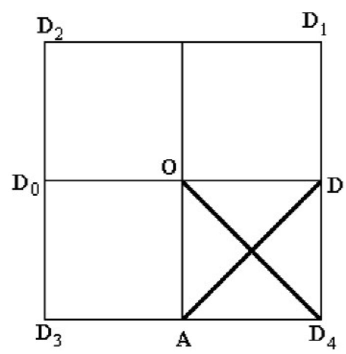


Рис. 12

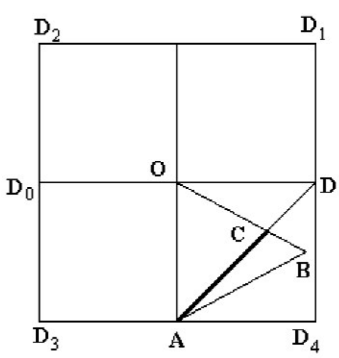


Рис. 13

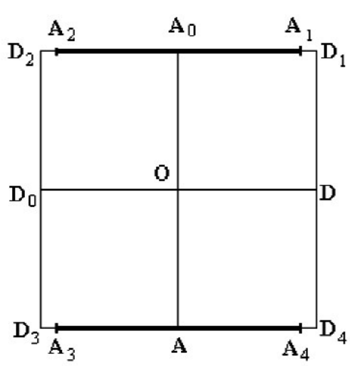


Рис. 14

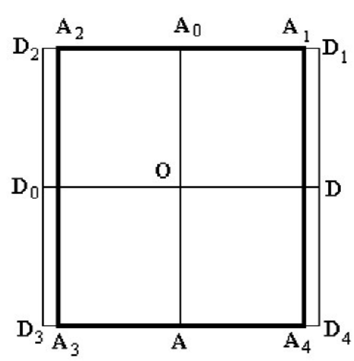


Рис. 15

Теперь этот прямоугольник необходимо экстраполировать до нужных размеров. Для ускорения экстраполяции наряду со шнуром длины 20 м естественно использовать и шнур, длина которого равна удвоенной длине отрезка AC. В нашей реконструкции размеры сторон основания пирамиды Джосера — 120 м и 107,52 м. Размер первой стороны получается просто, так как он кратен 20 м и, следовательно, большой стороне исходного прямоугольника: 120 м = 20 м $\times$ 6. Чтобы обосновать размер второй стороны, рассчитаем длину малой стороны исходного треугольника. Для этого вернёмся к рис. 13 и обратим внимание на соответствующий квадрат. Очевидно, что в треугольнике OAC угол AOC равен 60° (как угол равностороннего треугольника OAB) и угол OAC равен 45° (как один из острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника OAD); поэтому нетрудно установить, что угол OCA равен 75° (угол OCA = 180° – 60° – 45° = 75°). Тогда по теореме синусов

$$\frac{|AC|}{\sin 60^\circ} = \frac{|OA|}{\sin 75^\circ},$$

откуда получаем

$$|AC| = \frac{|OA|\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{10\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

Далее, воспользовавшись четырёхзначными таблицами В.М. Брадиса, получаем k = sin 60°/sin 75° $\approx$ 0,8660 / 0,9659 $\approx$ 0,89657 $\approx$ 0,8966,

$$|AC| = 10 \text{ м} \times k \approx 8{,}966 \text{ м}.$$

Значит, длина малой стороны исходного прямоугольника равна 2 $\times$ |AC| $\approx$ 17,932 м $\approx$ 17,93 м, а длина малой стороны основания пирамиды равна (с точностью до четырёх значащих цифр) 6 $\times$ 17,93 м $\approx$ 107,589 м $\approx$ 107,6 м.

Если воспользоваться более точными таблицами — пятизначными таблицами А.И. Хохлова, то получим следующие результаты: $k \approx$ 0,86603/0,96593 $\approx$ 0,896576 $\approx$ 0,89658, |AC| $\approx$ 8,9658 м $\approx$ 8,966 м (с точностью до 0,5 мм), длина малой стороны пирамиды равна (с точностью до пяти значащих цифр) 2 $\times$ 6 $\times$ 8,9658 м $\approx$ 107,589 м $\approx$ 107,59 м.

Для ускорения вычислений можно воспользоваться компьютером, если составить соответствующую программу, обозначив |OA| через R и использовав стандартную функцию SIN:

ПРОГРАММА

```
10 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ МАЛОЙ СТОРОНЫ ОСНОВАНИЯ ПИРАМИДЫ ДЖОСЕРА
20 PRINT ″ВВЕДИТЕ R″
30 INPUT R
40 k=SIN(3.14159/3)/SIN(75 * 3.14159/180): PRINT ″k=″;k
50 AC=R * k: PRINT ″AC=″;AC; ″м″, «МАЛАЯ СТОРОНА ОСНОВАНИЯ =″; 12 * AC; ″м″
60 END
```

При составлении программы использовалась методика пособия: *Брычков Е.Ю., Кузнецова Т.И*. Введение в информатику: Учебное пособие. М.: УРСС, 1997.

Поскольку программное обеспечение компьютера осуществляет работу только с радианным выражением величин углов, при вычислении коэффициента k (см. строку 40) мы использовали формулу перехода от градусной меры к радианной [*Брычков Е.Ю.,Кузнецова.* С.66]. Для прочности число π мы взяли с шестью значащими цифрами: $\pi \approx 3{,}14159$.

Введя в компьютер R = 10, получаем:

k = 8965753

AC = 8.965753 м МАЛАЯ СТОРОНА ОСНОВАНИЯ = 107.589 м

Это вполне соответствует ранее полученным результатам. Округлив полученные длины с точностью до мм, получаем, что длина отрезка AC равна 8 м 96 см 6 мм, а длина малой стороны пирамиды Джосера равна 107 м 58 см 9 мм.

Таким образом, основание пирамиды Джосера получается из 6 $\times$ 6 исходных прямоугольников, а это значит, что если разметчики шли «нашим» путём, они могли оставить какие-то следы такой экстраполяции. Так, в книге «Семь чудес древней Ойкумены» (*А.А. Нейхард* и *И.А. Шишова.* М.: Наука, 1990. Серия «Из истории мировой культуры») на с. 19–20 авторы, в общем-то, далёкие от реконструкции, которой занимаемся мы, делают следующее предположение: «Возможно, до начала строительных работ всю поверхность выровненной скалы разбивали на квадраты, высекая в ней канавки. Это была предварительная разметка граней пирамиды. Только после этого приступали к непосредственному сооружению пирамиды». Наша реконструкция предполагает именно такой подход, правда, у нас фигурирует не квадрат, а прямоугольник, но в данном ракурсе не это важно. Тем более, авторы наверняка не придавали большого значения такому уточнению — скорее всего, как для них, так в данном случае и для нас, принципиален вопрос о канавках, с помощью которых задавалась сетка, определяющая размеры пирамиды.

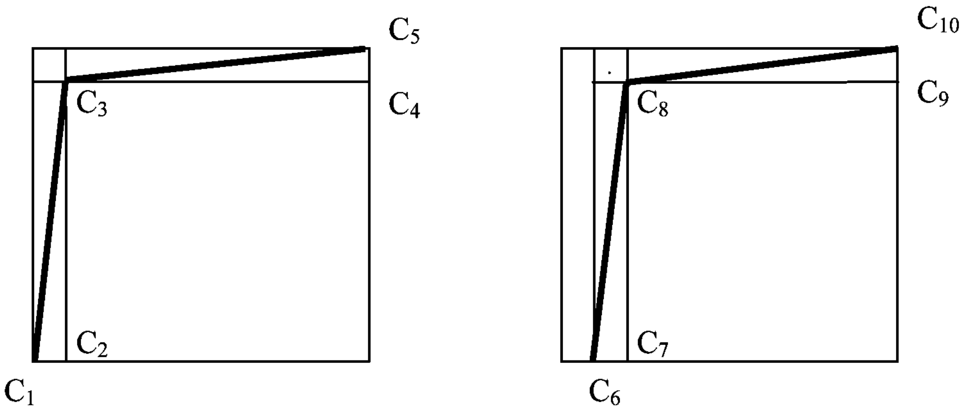


Рис. 16 (а, б)

Полученные нами размеры основания пирамиды Джосера несколько разнятся с размерами, указанными в литературе, однако по этому вопросу нет единого мнения. Так, в уже цитированной книге С.Б Проскурякова, где приведена таблица основных египетских пирамид (по В. Замаровскому), даны размеры 125 м × 115 м, а в книге К. Целлар — размеры 118 м × 140 м (см.: *Целлар К.* Архитектура страны фараонов: Жилище живых, усопших и богов / Пер. с венг. А.Д. Рагимбекова; Под ред. В.Л. Глазычева. М.: Стройиздат, 1990 (Научно-попул. б-ка школьника). С. 61). Как видно из приведённых размеров, они достаточно сильно отличаются друг от друга. Это и понятно, если вспомнить возраст пирамиды.

Ступени. Перейдём к ступеням, из которых состоит пирамида. Продолжим цитату, приведённую абзацем выше: «Строители возводили громаду пирамиды, укладывая блоки гигантскими ступенями. Среди этих блоков, по словам Геродота, не было ни одного, который не достигал бы 9 метров».

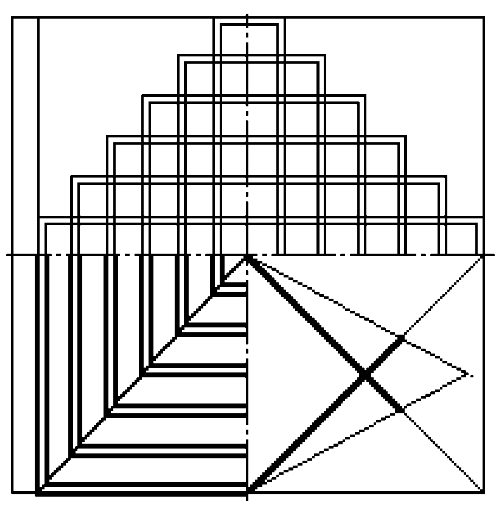
Предположим, что высота ступеней равна 10 м. Тогда общая высота пирамиды, которая имеет шесть ступеней, будет равна 60 м, что вполне соответствует литературным источникам — 61 м и 60 м .

Определим наклон ступеней, руководствуясь, как и ранее, условием простоты: воспользуемся логикой построения исходного прямоугольника — глубину и высоту скоса ступеней определим как разность стороны четверти вспомогательного квадрата и отрезка АС: 10 — |АС| ≈ 10 м — 8,966 м = 1,034 м. На рис. 16 изображены разрезы двух ступеней: а) с меньшей стороны, б) с большей стороны. При этом учтено, что глубина ступеней у их основания с меньшей стороны равна 10 м, а с большей стороны — длине отрезка АС, т. е. 8,966 м. Таким образом, $|C_1C_2| = |C_4C_5| = |C_6C_7| = |C_9C_{10}| = 1,04$ м; $|C_2C_3| = |C_3C_4| = |C_7C_8| \approx 8,966$ м; $|C_8C_9| \approx 8,966$ м — 1,034 м = 7,932 м.

При решении данной задачи мы фактически пользовались не только модулем в 20 м, но и модулем в 10 м. Чтобы это понять, вспомним определение модуля: «В архитектуре и строительстве исходная мера, принятая для выражения кратных соотношений размеров комплексов, сооружений и их частей» (см.: СЭС. С.829. М.: СЭ, 1979; или *Ройтман И.А., Владимиров Я.В.* Черчение: Учеб. пособие для учащихся 9 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Гуманит. изд. центр «ВЛАДОС», 1999. С. 218).

* * *

Мы можем предложить учащимся вопросы и задания, не только работающие на развитие математических умений, но и дающие выход в школьный предмет, связывающий математику с архитектурным строительством, т.е. в черчение.



Для выполнения этих заданий необходимо вспомнить не только традиционную геометрию, но и элементы аналитической геометрии, которые изучаются в средней школе, а также черчение и информатику. Таким образом, рассматриваемый материал и предложенная система заданий служат как внутрипредметным, так и межпредметным связям.

Проблема адекватной реконструкции археологического памятника выходит далеко за рамки интересов собственно археологов, историков, искусствоведов. Искажённая модель невольно порождает искажённое представление о прототипе, которое переходит на страницы учебников, научно-популярной и художественной литературы, попадает на экраны кино и телевидения … и порождает искажённый образ целого этапа развития человеческой культуры. Одна из форм искажения — это включение в пространство технологических возможностей исследуемой эпохи методов и средств, появившихся на самом деле в более позднее время. Деятельностный подход к реконструкции исключает вероятность такого искажения, хотя и предполагает возможность использования в процессе исследования любых современных методов, как гуманитарных, так и естественно-научных. Предложенный здесь материал как раз демонстрирует эмпирически возникшие в те далёкие времена методы и гарантирует их достоверность, основываясь на последующих достижениях в развитии геометрии и вычислительных методов, начиная с ручного счёта и использования математических таблиц до проверки тех же вычислений или самостоятельного расчёта в решении поставленных задач с помощью компьютера.

Итак, мы закончили реконструкцию геометрической логики построения египетских пирамид. Эта практическая задача решена с допусками, которые были проанализированы нами на основании математических вычислений, проведённых как вручную и с помощью таблиц, так и с использованием компьютера. Теоретическая задача решалась в условиях, максимально приближённых к предполагаемым обстоятельствам, т.е. выводы делались не на основании суммы исторически сложившихся к настоящему времени представлений о способе мышления египтян того исторического периода, а из внутренней логики предложенного варианта реконструкции.

Безусловно, путь раскрытия этой логики был намного длиннее и сложнее, чем представленные варианты. Ложность или истинность этого пути смогут подтвердить только факты. Возможная зона поиска этих фактов — сохранившиеся до нас предметные остатки древнейшей культуры и, в первую очередь, египетские пирамиды. При этом в присутствии метра в исторической эпохе, отстоящей от официального утверждения этой единицы измерения почти на пять тысячелетий, мы не видим никакого парадокса. О широком использовании этой меры длины в древности пишут А.А.Нейхард и И.А.Шишова «… абсолютное большинство блоков пирамиды Хеопса имеют форму куба с длиной ребра в один метр».

Грандиозные пирамиды Древнего Египта свидетельствуют о высоком инженерном искусстве египтян, создавших замечательные сооружения пять тысячелетий назад, когда только начала складываться одна из древнейших цивилизаций. Иногда высказывается мнение, что пирамиды не мог построить народ, живший в медном веке, и что в создании этих колоссальных сооружений принимали участие астронавты с других планет, обладающих высокой цивилизацией. Однако из древних папирусов хорошо известно, как в то время добывали блоки, как их обрабатывали и перевозили, поднимали и укладывали. В ряде случаев до нас дошли и имена архитекторов, которые проектировали пирамиды и руководили строительством. К тому же пирамиды — это не какие-то внезапно появившиеся сооружения, они завершают длительный процесс создания египетских гробниц. Наш опыт реконструкции пирамид свидетельствует о реальности выполнения разметки при строительстве пирамид на том уровне развития практической стороны науки геометрии, которая была присуща тем давним временам. ❑