Математическая теория и демонстрация её использования в условиях предвузовского образования

Татьяна Ивановна Кузнецова, *доцент Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук*

Известно, что переход от теории к практике в математике происходит проще, чем в любой другой науке. Опытные методисты считают, что решение задач, начиная с самых простых примеров, иллюстрирующих каждое новое определение, каждую новую теорему, с постепенным увеличением сложности и трудности должно быть органической составной частью каждого урока математики[1].

Изучение теории и её приложений на практике должно идти согласованно, гармонично. Плохо, если преподаватель, занимаясь теорией, вовсе не находит времени на решение задач, что нередко бывает на уроках геометрии. Особенно это относится к этапу повторения курса математики в конце обучения в средней школе или на подготовительных отделениях, факультетах. Плохо, если изучение предмета сводится к одному лишь решению задач, как это часто бывает на занятиях по алгебре, когда учащиеся механически производят указанные им выкладки, не отдавая себе отчёта ни в их назначении, ни в их обосновании. То же самое происходит на занятиях по черчению, где различные построения производятся по рецепту без каких-либо ссылок на геометрические основы.

Между тем связь теории с практикой следует понимать шире, не только как использование теоретических положений для решения задач или как реализацию межпредметных связей, которая по существу тоже является демонстрацией учебных задач.

Как сказал В.М. Брадис, необходимо «упражнять» учащихся в непосредственном применении приобретённых математических знаний к решению практических вопросов, выдвигаемых жизнью. Ещё в 1950-х годах в нашей стране была выдвинута директива приступить к всеобщему политехническому обучению в средней школе: «Коренное и весьма существенное изменение при переходе к политехническому обучению должна претерпеть вся прикладная часть школьного курса математики, т.е. те задачи, решение которых должно сопровождать изучение теоретической части этого курса. Без приобретения прочного навыка в решении задач не может быть вполне сознательного и сколько-нибудь прочного овладения теорией, причём содержание задач далеко не безразлично. Наряду с задачами тренировочного характера, школьники должны решать разнообразные задачи, какие действительно приходится решать в жизни, понимая её в самом широком смысле: задачи бытовые, задачи всевозможных отраслей техники, задачи, какие ставят другие изучаемые в средней школе дисциплины — физика, химия, география, астрономия, черчение»[2].

При этом обращалось особое внимание на повышение культуры вычислений учащихся: «Недостатки в преподавании математики особенно ярко сказываются в отсутствии вычислительных навыков, вырабатываемых у учащихся. В школьном курсе математики современная вычислительная техника полностью игнорируется, мы держим учащихся на уровне техники XVIII в., когда передовым средством вычисления были логарифмы. В старших классах должны широко и сознательно применяться различные математические таблицы, среди которых таблицы логарифмов должны занимать достаточно скромное место, и счётная логарифмическая линейка, а в младших классах — обыкновенные контор-

[1] **Брадис В.М.** Методика преподавания математики в средней школе / Под ред. А.И. Маркушевича. 3-е изд. М.: Учпедгиз, 1954. С. 49.

[2] Там же. С. 52.

ские счёты. В современной технике используются «считающие чертежи» — так называемые номограммы, применение которых ускоряет очень многие расчёты, в том числе самые сложные. Изучение устройства и употребления весьма многих номограмм вполне посильно для учащихся, изучающих геометрию и алгебру, и включение элементов номографии в программу, несомненно — дело недалёкого будущего. Однако и сейчас можно рекомендовать знакомство с простейшими номограммами в порядке решения задач»[3].

Номограммы — это модели-чертежи. Их построением занимается номография — составная часть вычислительной математики, наука о методах графического изображения функциональных зависимостей. Построенная на листе бумаги для определённой функциональной зависимости номограмма очень просто используется для получения ответа: достаточно, например, приложить линейку или сделать засечку циркулем.

Большинство зависимостей, встречающихся как в школьном курсе математики, так и в инженерных расчётах, допускают построение номограмм, причём точность ответа по квалифицированно построенным номограммам почти всегда достаточна. Номограммы могут применяться не только для рационализации расчётов, но и в научно-исследовательской работе для анализа функциональных зависимостей, подбора параметров эмпирических формул, разработки типовых проектов.

Номография как наука оформилась задолго до появления электронно-вычислительных машин. Первые попытки графического решения аналитических задач в форме, близкой к современным номографическим построениям, относятся к концу XVIII в. — в 1795 г. была опубликована «Линейная арифметика» французского математика Пуше, в которой давались графические приёмы выполнения арифметических действий. Пуше построил первую номограмму — модель умножения в форме семейства равносторонних гипербол, имеющих общие асимптоты.

Номография развивалась во Франции — в разработках номографических методов решения аналитических задач участвовали такие учёные, как Шаль, Лалан, Сё Робер, Мёбиус, Массо, Окань, Булад, Дюпорк, Гронваль, Соро, Маргулис. Она получила развитие и в других странах. Например, известны работы по номографии немецких математиков Штаудта (1847 г.), Люкея (1923 г.), Лукаша (1924 г.), австрийца Фишера (1927 г.), каирского номографа Кларка (1907 г.).

В России начало развития номографии положила работа проф. Н.М. Герсеванова «Основы номографии» (1906 г.). Дальнейшее развитие номографии в нашей стране связано с именами П.В. Мелентьева, И.Н. Денисюка, Н.А. Глаголева, А.А. Глаголева, М.В. Пентковского, Б.А. Невского, И.А. Вильнера, Г.С. Хованского, С.Н. Борисова и других учёных.

Появление ЭВМ значительно облегчило проведение численных расчётов при решении различных задач. Однако практика показывает, что номограммы обладают целым рядом преимуществ перед ЭВМ. Простота пользования номограммами открывает возможность широкого употребления их на производстве. Номограмма для сложной функциональной зависимости или системы уравнений, построенная с помощью современных методов, может многократно использоваться работниками низкой квалификации, которым указан лишь способ пользования ею. Известно, что применение номограмм доступно любому рабочему, обладающему знаниями математики в объёме неполной средней школы.

Аналитические расчёты по формулам, производимые вручную или при помощи каких-либо вычислительных средств, всегда связаны с большой вероятностью ошибки, особенно, когда расчёты выполняет технический персонал, не обладающий опытом. Во многих случаях приходится поручать проводить одни и те же расчёты нескольким лицам и исключать ошибку при помощи сверки результатов. При счёте на компьютере всегда необходимо дополнительно проводить «контрольный» счёт по выбранной стандартной программе. Всё это усложняет и удорожает работу.

При номографическом расчёте вероятность ошибки значительно уменьшается, так как на номограмме обычно наносятся непосредственно данные и искомые величины, имеющие конкретный физический или технический смысл. Производящий расчёты не

[3] **Брадис В.М.** Методика преподавания математики в средней школе. С. 52–53.

может совершить грубую ошибку. Вероятность же ошибки в последних знаках искомых чисел можно свести к минимуму рациональным выбором размера номограммы, нанесением делений и цифровых пометок на элементы номограммы.

Большинство зависимостей, встречающихся в инженерной практике, допускают построение номограмм. В некоторых случаях, когда невозможно точное номографирование, применяется приближённое. Оно основано на приближённой замене данной зависимости номографируемым соотношением с некоторой допустимой погрешностью и на последующем номографировании этого соотношения.

Для получения номограмм можно применять компьютер и после этого рассматривать номограммы как одну из удобных форм машинного решения задач. В последнее время ведутся работы не только по автоматизированию построения номограмм, но и по их конструированию[4]. Это означает, что создаются такие программы, которые дают возможность после ввода в компьютер формулы, пределов изменения переменных и размеров чертежа получить готовую рабочую номограмму.

Известны случаи синтезирования номографических и машинных методов решения задач. Целесообразно использовать методы приближённого номографирования таблиц с несколькими входами, полученных на компьютере.

Так, в нашей работе[5] описывается применение ромбоидальных и транспарантных номограмм, которое дало возможность просто и быстро решать задачу о точечном взрыве с противодавлением в покоящемся невязком и нетеплопроводном совершенном газе с постоянным показателем адиабаты. Такой точечный взрыв описывается сложной системой уравнений в частных производных. В численном решении этой системы были получены таблицы, с помощью которых задача решается, но довольно громоздко и долго, с многочисленными обращениями к формулам и нелинейной интерполяции. Номографирование этого расчёта свело решение задачи к простым геометрическим операциям, осуществляемым при пользовании ромбоидальной и транспарантной номограммами.

Расчёт номограмм произведён на ЭВМ по специально составленным программам, предусматривающим квадратичную, а иногда и третьей степени, интерполяцию по соседним узловым точкам таблиц, допускаемую этими таблицами.

Использование номограмм не только существенно упростило решение задачи, но и позволило наглядно проследить изменение ответных величин в зависимости от изменения параметров, что невозможно сделать по таблицам. Таким образом, рассчитанные на ЭВМ таблицы и предложенные номограммы дополняют друг друга и позволяют быстро исследовать и полностью решить сложную задачу расчёта газодинамических функций точечного взрыва в газе. Решение этой задачи было отмечено премией на конкурсе научных работ Вычислительного центра АН СССР (1977 г.), оно приведено в монографии[6], подводящей итог развития номографии за последние 40 лет.

Такое сочетание использования ЭВМ и номограмм свидетельствует о дальнейшем совершенствовании форм общения человека и компьютера. Главное в этом совершенствовании — получить максимум удобств для пользователя.

Особая роль математических моделей в развитии наук. А.Н. Колмогоров ещё в 1977 г. в своём докладе «О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения»[7] обратил внимание на то, что «слово «модель» получило такое широкое распространение в популярной литературе, что нам не следует оберегать учащихся от его разумного употребления. Надо лишь подчёркивать, что, создавая схематизированные модели действительности, мы получаем вполне реальное знание о самой действительности. Лишь за пределами своей применимости модель теряет реальное значение и должна быть заменена новой, более совершенной».

Из этих слов ясно, что Андрей Николаевич имел в виду не только и не столько модели

[4] **Борисов С.Н.** Алгоритмы конструирования номограмм. М.: ВЦ РАН, 1999.

[5] **Кузнецова Т.И.** Применение ромбоидальных и транспарантных номограмм в расчёте точечного взрыва в газе. В кн.: Номографический сборник № 10. М.: ВЦ АН СССР, 1975. С. 8–18.

[6] **Борисов С.Н., Гусев С.И., Лаптева Д.Г., Хованский Г.С.** Атлас номограмм. М.: ВЦ РАН, 2000.

[7] **Колмогоров А.Н.** Математика — наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. С. 270–275.

«в чертёжном смысле». В том же докладе он говорил, что математическая модель явления, как правило, это явление схематизирует. Поэтому она даёт правильное предсказание лишь в некоторых пределах. За этими пределами математическая модель теряет реальный смысл и при её бездумном применении приводит к ошибочным или бессмысленным результатам. Далее он приводит несколько примеров математических моделей из области физики, ставших классическими, самым известным из которых является пример механики Ньютона и теории относительности Эйнштейна.

Л.Д. Кудрявцев в своей работе[8], посвящённой современному среднему образованию в России, обращает внимание на особую роль математических моделей в развитии наук: «Математика даёт возможность с помощью математических моделей описывать самые разнообразные реальные процессы и предсказывать результаты, к которым они приводят». Поэтому «одной из основных целей математического образования остаётся умение составлять математические модели».

Номограммы — один из видов математических моделей решаемых задач. Номография, являясь составной частью прикладной математики, служит построению, исследованию и оптимизации математических моделей конкретных задач.

Значение номографии и доступность номограмм приводят к возможности ознакомиться с номографией в процессе обучения математике. В нашей стране специально для школьников изданы учебные пособия, номографии придавалось значение в факультативных курсах для школьников по методам вычислений, графическим расчётам, применению математики в сельском хозяйстве. Вопросам номографии были посвящены лекции, прочитанные А.Н. Колмогоровым в Летней школе на Рубском озере, организованной для школьников, закончивших восемь классов. Введение отдельных элементов номографии в среднее образование предлагалось в диссертационных исследованиях. В «Четырёхзначных математических таблицах» В.М. Брадиса помещены две номограммы из выравненных точек[9].

Использование и построение номограмм, организованное в средней школе, повышает математическую культуру учащихся. Номограммы способствуют сближению различных разделов школьного курса математики (геометрии, теории функций, методов вычислений), формированию и закреплению узловых математических понятий (функции, множества, системы координат, абсолютной и относительной погрешностей и т.д.). Использование номограмм в смежных школьных дисциплинах поддерживает предметные связи.

«Геометрические модели функциональных зависимостей». В семидесятые годы прошлого века нами было введено понятие «геометрическая модель функциональной зависимости», детально исследованы все предметные курсы средней школы на присутствие в них геометрических моделей функциональных зависимостей, были рассмотрены и номограммы как представители специального класса геометрических моделей.

Итак, номограммы это *геометрические модели* функциональных зависимостей, свойства которых отражаются в геометрических особенностях номограмм: конкретный физический смысл могут иметь носители шкал, точки их пересечения, кривизна носителей шкал, касание разрешающей прямой носителей шкал, кривизна линий в бинарных полях и т.д. Поэтому номограммы используются не только для вычислений, но и в научно-исследовательской работе.

Номограммы способствуют специфическому целенаправленному использованию методов прикладной математики. Известны три этапа приложения математики к решению практических задач: формализация — переход от реальной ситуации, которую следует разрешить, к построению адекватной математической модели; решение задачи внутри построенной математической модели; интерпретация.

Явное вовлечение в процесс обучения математике этапов формализации и интерпретации создаёт предпосылки для обучения применению математики к реальным проблемам. Номографическое решение практических задач отвечает этому требованию. При этом на этапе формализации задачи решается вопрос о целесообразности номо-

[8] **Кудрявцев Л.Д.** Среднее образование. Проблемы. Раздумья. М.: МГУП, 2003.

[9] **Брадис В.М.** Четырёхзначные математические таблицы для средней школы. М.: Просвещение, 1988. С. 82–83.

графирования того или иного расчёта в целом или его отдельных частей, вопрос о выборе пределов изменения переменных и установлении необходимой точности получения ответа.

На втором этапе данная зависимость приводится к номографируемому виду и строится номограмма.

Этап интерпретации очень важен при решении задач номографическими методами, так как здесь производится оценка номограммы: определяется, обеспечивает ли она наилучшие условия получения ответа решаемой практической задачи, если строится для вычислительных целей, или наилучшую наглядность, если строится для исследования функциональной зависимости.

Результаты. Исходя из потребностей общего и специального математического образования, нами были выявлены:

— объём и содержание материала номографических методов, необходимых и возможных для изучения в средней школе;
— структура материала номографических методов в её связи со структурой курса математики;
— роль и место номографических методов по отношению к другим вычислительным методам школьной математики;
— роль и значение номограмм в курсе математики и в других предметах. В самом деле, элементы номограмм (шкалы, сетки — бинарные поля и т.д.) и основные типы элементарных номограмм (диаграммы, графики, сдвоенные шкалы и т.д.) присутствуют в школьном курсе математики и в других предметах.

Были исследованы математические и методические особенности обоснования, построения и использования номограмм. На этой основе выявлены условия введения элементов номографии в среднее образование: номограммы представляют один из видов математических моделей решаемых задач, при этом их использование позволяет дать простые графические алгоритмы, поэтому номограммы можно рассматривать как инструменты для вычислений. Необходимость изучения номографии определяется критерием многократной применимости. Элементарность обоснования номограмм, доступность их построения обеспечивают успешное разумное их использование. Всё это свидетельствует о специфическом целенаправленном использовании методов прикладной математики, способствует повышению математической культуры учащихся, развивает у них навыки приближённых вычислений. Номограммы активно влияют на сближение различных разделов школьного курса математики, на формирование и закрепление узловых математических понятий, на расширение и укрепление межпредметных связей.

Разработана и экспериментально проверена методика формирования основных математических понятий, необходимых для изучения номографии, методика обучения номографии, основанная на явном вовлечении в процесс обучения условий, выявленных в исследовании. Так, сформированы понятия функциональной шкалы, функциональной сетки — бинарного поля, обоснована номограмма из выровненных точек с тремя параллельными шкалами u, v и w для уравнения вида $f_3(w) = f_1(u) + f_2(v)$, а также номограмма из выровненных точек с двумя параллельными шкалами u, v и бинарным полем (a, w) для уравнения $f_3(w) = af_1(u) + f_2(v)$.

В качестве примера была построена номограмма из выравненных точек с двумя параллельными шкалами A, B и бинарным полем (x, y) для линейного уравнения $x + Ay = z$ **(рис. 1)**. Разработана и экспериментально проверена методика использования таких номограмм для решения систем линейных уравнений и неравенств, а также для решения основной задачи линейного программирования для двух и трёх переменных. Экспериментально подтверждён эффект использования номографического метода решения задач оптимального планирования.

Пусть дана функция

$$z = x + Ay, \quad (*)$$

где x и y — переменные, A — параметр. Найдём с помощью номографических методов наибольшее и наименьшее значения функции z и доставляющие их значения переменных x и y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x + 2y \geq -2; & x - 5y \geq -4; \\ x + 3y \leq 3; & x + y \leq 5. \end{cases} \quad (**)$$

Для решения этой задачи воспользуемся номограммой рис. 1, которая построена

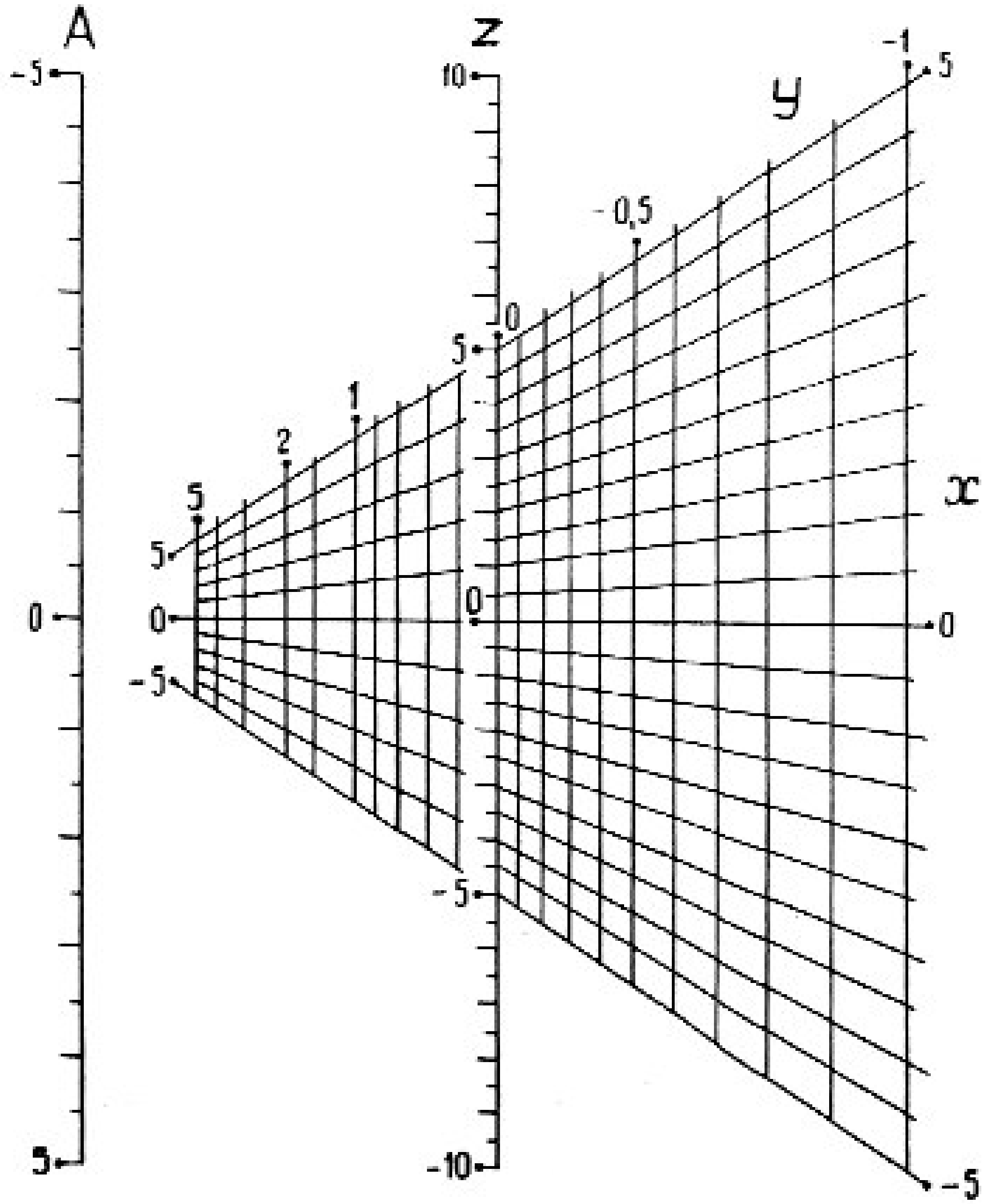

Рис. 1

для следующих подходящих пределов изменения переменных:

$-5 \le x, A \le 5$; $-10 \le z \le 10$; $-1 \le y \le 5$.

На **рис. 2** показано решение рассматриваемой задачи. В соответствии с ограничениями (**) проведены разрешающие прямые: через точки шкал A и z с пометками $A = 2$ и $z = -2$; $A = -5$ и $z = -4$; $A = -3$ и $z = 3$; $A = 1$ и $z = 5$. Эти прямые высекают в поле (x, y) четырёхугольную область, удовлетворяющую всем ограничениям (**). Чтобы найти максимум и минимум функции (*) на этой области, на шкале A отмечаем точку с пометкой $A = 3$ и вращаем вокруг неё линейку так, чтобы её край пересекал полученный четырёхугольник. В результате находим max $z = 8$ при $x = 3{,}5$; $y = 1{,}5$ и min $z = -3$ при $x = 0$; $y = -1$ (см. штриховые прямые).

Наглядность номографических методов даёт возможность оценить влияние тех

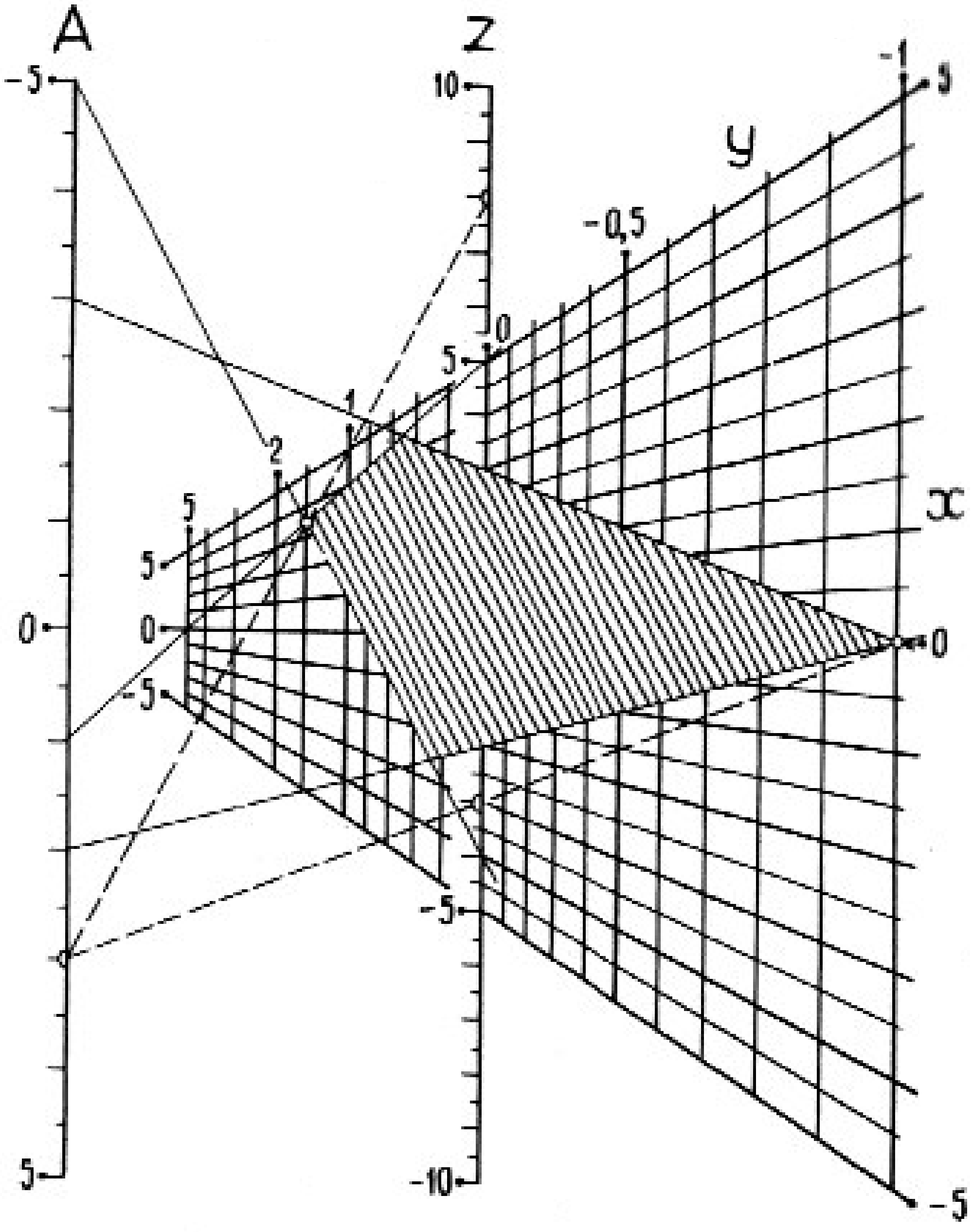

Рис. 2

или иных ограничений задачи на общее решение системы уравнений, неравенств или на решение задачи оптимального планирования. Разработанный метод был по достоинству оценен специалистами, используется при решении задачи распределения ресурсов.

При этом применяются простые графические алгоритмы решения линейных уравнений, их систем, а также линейных неравенств и их систем. Графический алгоритм решения задач оптимального планирования доступен учащимся. Экспериментально проверено, что решение систем линейных уравнений и неравенств на номограммах занимает меньше времени по сравнению со стандартными школьными методами.

Автор предлагает использовать номографические методы в преподавании физики и географии, излагает концепцию установления межпредметных связей на примере математики и черчения.

Рис. 3

Продолжая примеры, отметим моделирование математических задач средствами информатики, выполненное нами для интегрированного курса математики и информатики в Центре международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова: сравним модели-алгоритмы решения квадратного уравнения и уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, причём, последняя модель получается путём логического объединения алгоритма решения квадратного уравнения и алгоритма решения линейного уравнения; модели-алгоритмы решения одного квадратного уравнения и одновременного решения нескольких квадратных уравнений, например, трёх, причём, последняя модель получается с использованием алгоритма решения квадратного уравнения в качестве подалгоритма, что после программирования переходит в подпрограмму[10].

В геометрии аналогичным примером может служить сравнение модели-связи равенства внутренних накрест лежащих углов с соотношением внутренних односторонних углов и модели признаков параллельности двух прямых, причём, вторая модель получается из первой путём дополнения её эквивалентной связью с определением параллельности двух прямых. Интересно изменение-развитие модели признаков параллелограмма в результате перехода к родо-видовым отношениям параллелограмма и прямоугольника, ромба, квадрата.

На **рис. 3** приведена модель, в которой мы объединили родо-видовые отношения параллелограмма и прямоугольника и их признаки.

Аналогично объединяются родо-видовые отношения и

[10] Подробнее об алгоритмическом моделировании задач математики см.: **Антипов И.Н., Кузнецова Т.И., Петрова М.А.** Интеграция математики и информатики на практических работах с использованием функции модуля // Вестник ЦМО МГУ, № 4, ч. 3, 2002. С. 35–55; **Кузнецова Т.И.** Методика использования информатики для активизации усвоения математического материала в предвузовском образовании // Вестник ЦМО МГУ, № 2, ч. 3, 1999. С. 54–86.

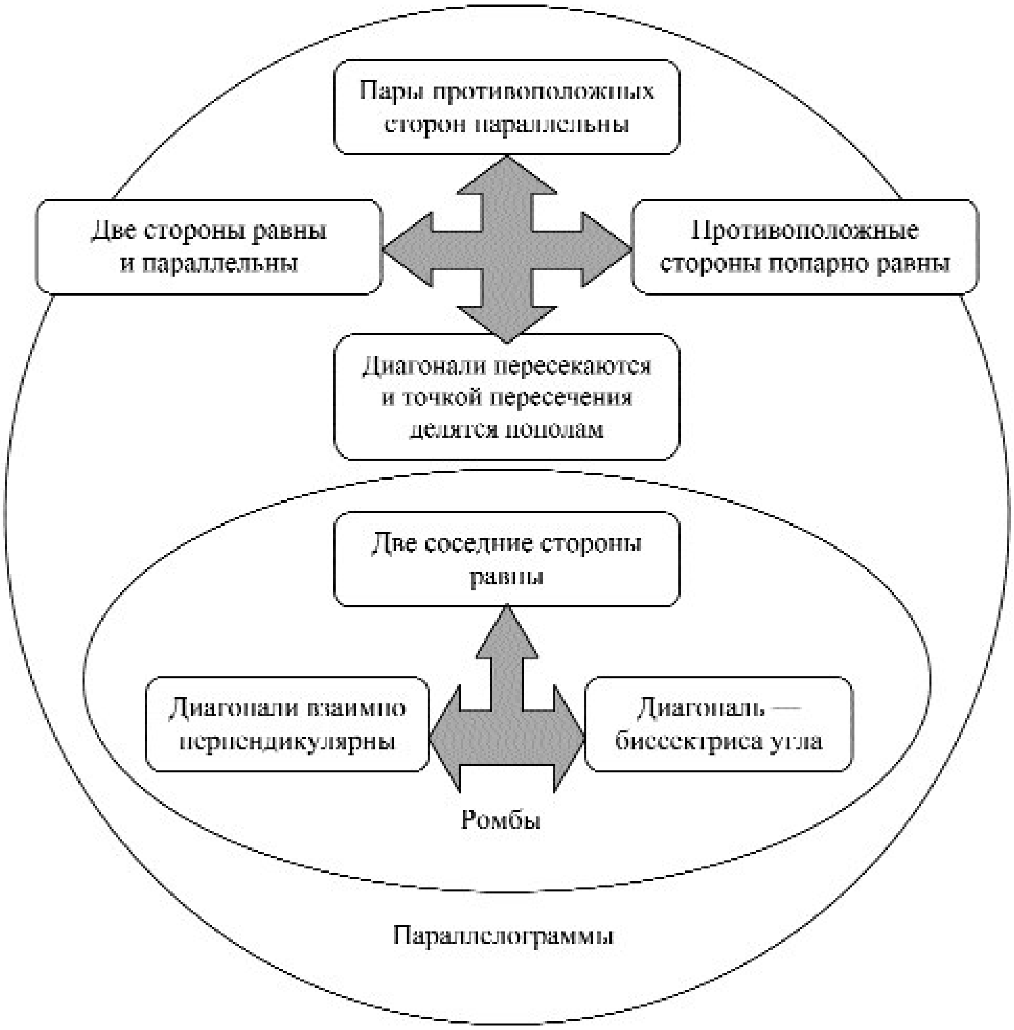

Рис. 4

признаки параллелограмма и ромба (см. **рис. 4**).

Так как квадрат обладает как свойствами прямоугольника, так и свойствами ромба, то, воспользовавшись моделями рис. 3 и рис. 4, получаем модель связи параллелограмма и квадрата (см. **рис. 5**).

Модель рис. 5 практически включает в себя и модель рис. 3, и модель рис. 4. Таким образом, она представляет признаки и родо-видовые отношения параллелограмма и его подвидов: прямоугольника, ромба, квадрата.

Модель рис. 5 имеет специфическую методологическую структуру: круги Прямоугольников и Ромбов с описанием их эквивалентных признаков соединены перемычкой и помещены в круг Квадратов.

Перемычка означает конъюнкцию Прямоугольников и Ромбов. Таким образом, принадлежность параллелограмма к Квадратам определяется тем, что он должен принадлежать и Прямоугольникам, и Ромбам, т.е. о нём должно быть известно, что он обладает одновременно хотя бы одним из эквивалентных признаков Прямоугольников и хотя бы одним из эквивалентных признаков Ромбов.

Модели — это сущностное ядро любого метода познания мира, творчества, а, следовательно, это средство совершенствования и интенсификации учебного процесса.

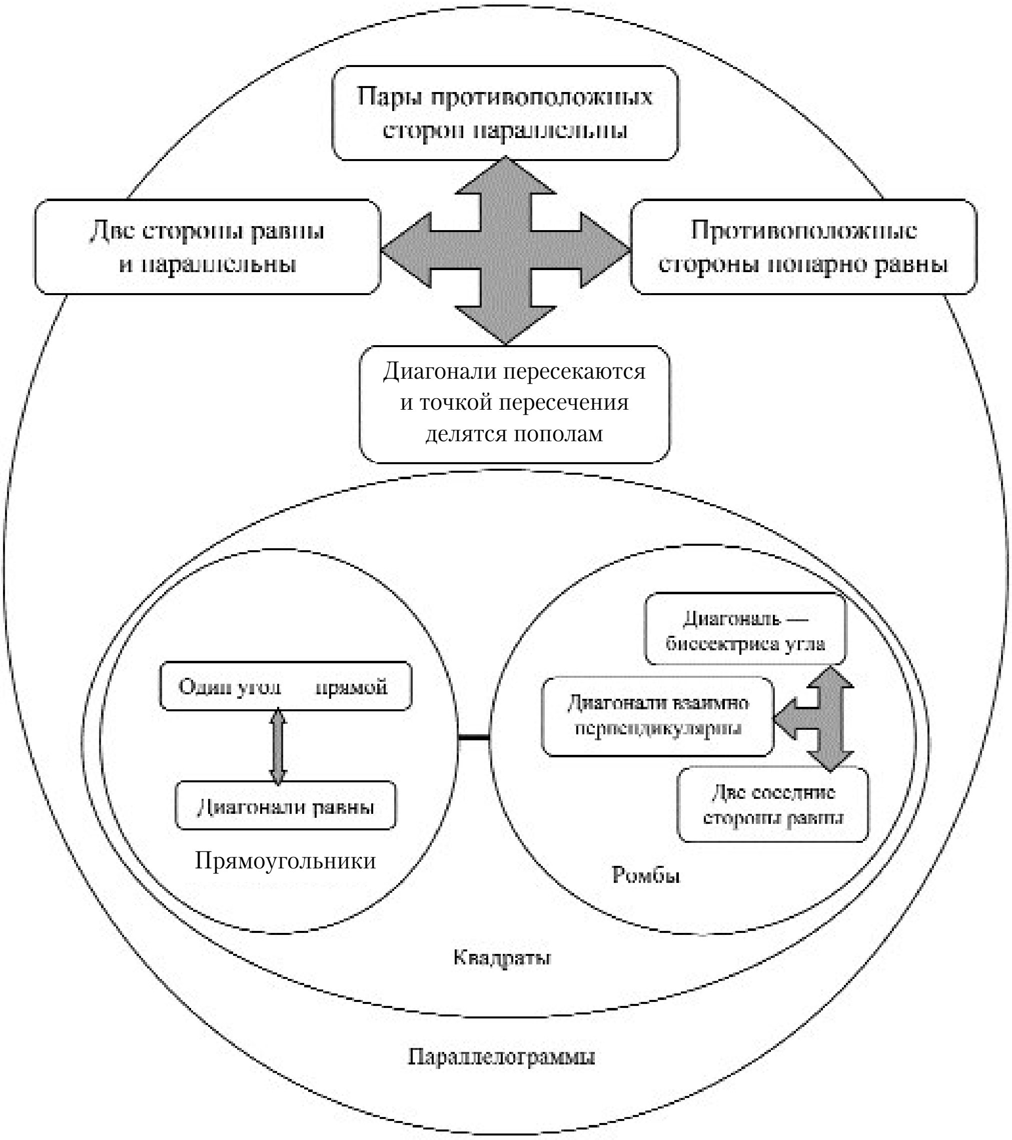

Рис. 5

Без моделей и моделирования не обходится ни одно значительное исследование, поэтому обучение моделированию на уровне предвузовского образования вооружает учащихся навыками работы над собой, помогает полностью реализовать их потенциал. ❑