Подготовка учащихся сельских школ к олимпиадам по математике

Александр Фарков,
кандидат педагогических наук

Постоянные читатели журнала «Сельская школа» хорошо знакомы с автором этой статьи. Материалы к проведению математических олимпиад в 6–9-х классах (задания, решения и ответы) опубликованы в «СШ» 2006. №3–6, 2007. №1.
В публикуемой статье автор даёт рекомендации, как заинтересовать ребят математикой, как провести конкурс и выявить сильнейших математиков школы, какие задания предложить школьникам на уроках и внеклассных занятиях в период подготовки к районным соревнованиям.

Математические олимпиады наряду с математическими соревнованиями, кружками, факультативами, элективными курсами и неделями математики — и сегодня наиболее массовая форма внеклассной работы по математике с учащимися сельских школ.

Цели проведения математических олимпиад:
- расширить кругозор учащихся;
- развить их интерес к изучению математики;
- общий подъём математической культуры, интеллектуального уровня подростков;
- выявить учеников, проявивших себя по математике, для участия их в следующем туре олимпиад и для организации индивидуальной работы с ними;
- знакомство ребят с важнейшими проблемами и методами современной математики.

В современных условиях, в условиях конкуренции, олимпиады готовят учащихся к жизни. Умение решать задачи, особенно олимпиадные, всегда было одним из показателей математической одарённости ученика. Причём главная ценность олимпиад состоит не в выявлении победителей и награждении особо одарённых учащихся, а в общем подъёме математической культуры, интеллектуального уровня учащихся.

И для того, чтобы этот подъём культуры и интеллекта действительно произошёл, к олимпиадам учащихся надо готовить, тем более, что сегодня по итогам олимпиад оценивают итоги внеклассной и внешкольной работы по математике в школе, районе, области (крае, республике). Школьные, районные, региональные, окружные олимпиады по математике позволяют сравнивать качество математической подготовки и состояние преподавания математики в отдельных классах школы, в отдельных школах района, а также и в различных регионах и округах. Во многом и результаты работы учителя определяются тем, каких и сколько учащихся — призёров различного рода олимпиад — он подготовил.

Между тем природа может распорядиться так, что в конкретном регионе, в заданном месте не окажется таких одарённых детей, и усилия учителя не принесут результатов. С другой стороны, учитель математики может не предпринимать никаких особых усилий, а ученик блистает на различных соревнованиях, на олимпиадах самого высокого уровня. Он добивается этого благодаря своим особым математическим способностям, которые он продолжает развивать, работая с математической литературой самостоятельно, занимаясь на всевозможных математических курсах, школах при вузах и т.п.

Не будем дискутировать, правильно ли делает руководство образованием, оценивая только результат, а не то, как достиг этого результата учитель. Для нас важнее то, как учителю математики не только готовить учащихся к олимпиадам, но и сделать всё, от него зависящее, для математического развития учащихся.

В соответствии с законом «Об образовании» победы учащихся на олимпиадах международного и всероссийского уровней являются достаточным основанием для зачисления в вуз без экзаменов, а выдающиеся результаты, показанные в мероприятиях системы дополнительного образования — для приёма в вуз вне конкурса. Участие в олимпиадах по математике, математических кружках и факультативах планируется учитывать и при отборе учащихся в профильные классы.

Школа сегодня уже не единственный монопольный источник информации, знаний, умственного развития учеников, большой вклад в образование вносит система дополнительного образования детей. А поэтому результаты, достигаемые школьниками в различных мероприятиях, проводимых в этой системе, тоже, на наш взгляд, должны учитываться при определении перспектив дальнейшего обучения.

Так как наибольших успехов в олимпиадах добиваются дети с нестандартным, творческим мышлением, высокими математическими способностями, повышенной обучаемостью к математике, то один из путей подготовки к олимпиадам — развитие их математических способностей, мышления, интеллекта. Давно известно, что люди, систематически занимающиеся умственным трудом, имеют более высокий показатель интеллекта.

Остановимся подробнее на основных направлениях, которые можно выделить в подготовительной работе к олимпиадам любого учителя школы, не только математики.

Работа учителя математики на уроке

Глубоко не правы те учителя, которые при проведении уроков математики не уделяют внимания подготовке учащихся к олимпиадам. Чаще победителями олимпиад, начиная с городского (районного) тура, становятся одарённые учащиеся. Учить же, развивать одарённых детей только вне урока нереально. Всегда можно найти место на уроке, когда вместе с обучающими задачами можно решать и задачу развития ученика. Например, при изучении темы «Объёмы тел» (11-й класс) после решения ряда задач по нахождению объёма пирамиды можно предложить ученикам и такую задачу: «Найти объём пирамиды, у которой все боковые рёбра образуют между собой углы по 90°, а сами ребра имеют длины соответственно 3, 4, 5 см». Применяя подход, которым решались предыдущие задачи, можно найти стороны основания (по теореме Пифагора), затем площадь основания. Проблема возникнет при нахождении высоты пирамиды. Применив же нестандартный приём (переворачивание пирамиды таким образом, что основанием становится один из прямоугольных треугольников, а высотой — оставшееся третье ребро), мы сразу решим задачу. Подобного рода примеров можно привести много. Рассмотрим несколько подобного рода задач. Все они тесно связаны с темой урока, тем не менее, часто встречаются в олимпиадных заданиях.

1. Решение олимпиадных задач, тесно связанных с темой урока

1. Вычислить:
а) $90 + 89 + 88 + ... + 1 + 0 - 1 - 2 - - ... - 90 - 91 - 92 - 93$;
б) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 2005 - - 2006$.

Обе приведённые задачи — стандартные, но если выполнять действия по порядку, не применяя законов сложения и вычитания, на это потребуется много времени. А время на олимпиадах очень ценно. Поэтому ученик, нашедший более быстрое решение этих и подобных заданий, сэкономит время на решение других задач. На уроке такие задачи можно предложить при изучении темы «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел».

2. При изучении темы «Степень с натуральным показателем» можно предложить для решения учащимся следующие типы задач:
а) Сравните: 65^{23} и 255^{17}.
б) На какую цифру оканчивается число 2007^{2006}?

Решение.
а) $65^{23} > 64^{24} = (2^6)^{23}$. А $255^{17} < 256^{17} = (2^8)^{17}$. Так как $65^{23} > 2^{138}$, $2^{138} > 2^{136}$, а $2^{136} > 255^{17}$, то $65^{23} > 255^{17}$.

б) Так как последняя цифра числа 2007^{2006} определяется последней цифрой числа 7^{2006}, то найдём значения степеней 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 5^5 и т.д. и заметим закономерность: последней цифрой являются 7, 9, 3, 1, а далее они повторяются. Так как $2006 = 501\cdot 4 + 2$, то 7^{2006} оканчивается той же цифрой, что и 7^2, то есть цифрой 9. Тогда и число 2007^{2006} оканчивается на цифру 9.

3. При изучении темы «Алгебраические дроби» можно решить следующую задачу: «Вычислить сумму:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz = 1$».

Решение. Умножим числитель и знаменатель второй дроби на x, а третьей — на xy. Учитывая, что $xyz = 1$, получим у всех дробей одинаковые знаменатели. Сложим данные три дроби, в итоге получим дробь, у которой числитель и знаменатель равны одному и тому же выражению $1 + x + xy$. Значит, искомая сумма равна 1.

4. При изучении квадратных уравнений можно наиболее сильным ученикам класса предложить и такую задачу: «Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2006? А 2008?»

Рассмотрим решение этой задачи.

У квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in Z$, дискриминант $D = b - 4ac$. Так как $D = 2006$, то найдём целые решения уравнения $b^2 - 4ac = = 2006$. Так как правая часть уравнения делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2, поэтому $b = 2k$, тогда $4k^2 - 4ac = 2006$. Разделив обе части уравнения на 2, получим $2k^2 - 2ac = 1003$. В левой части уравнения получилось чётное число, а в правой — число нечётное. Поэтому уравнение решений в целых числах не имеет.

Для числа 2008 имеем $b^2 - 4ac = 2008$, а так как $b = 2k$, то получим: $4k^2 - 4ac = 2008$. Разделив на 4 обе части уравнения, получим: $k^2 - ac = 502$. Это уравнение имеет решения в целых числах, например: $a = 1$, $c = 27$, $k = 23$. Тогда уравнение $x^2 + 46x + 27 = 0$ имеет $D = 2116 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 2008$. Конечно, можно найти и другие решения.

На этом же занятии можно сказать, что с методами решения уравнений в целых числах подробно можно ознакомиться на занятии факультатива или элективного (если, конечно, факультативы или элективные курсы по математике проводятся в школе).

5. При изучении арифметической прогрессии можно рассмотреть задачу: «Докажите, что если в бесконечную арифметическую прогрессию с положительной разностью входят числа 25, 43, 70 (не обязательно стоящие рядом), то в эту прогрессию входит и число 2005».

Решение. Так как 25, 43, 70 — члены арифметической прогрессии, то $25 = a_1 + kd$; $43 = a_1 + nd$; $70 = a_1 + md$. Из данных трёх равенств следует, что $18 = (n - k)d$, $27 = (m - n)d$. Из данных двух равенств получаем: $9 = (m - 2n + k)d$. Так как $2005 = 70 + 1935$, а $1935 = 215 \cdot 9 = 215(m - 2n + k)d$, то $2005 = 70 + 215(m - 2n + k)d = a_1 + md + 215(m - 2n + k)d = a_1 + (216m - 430n + 215k)d$ или $2005 = a_1 + ld$, где $l > 0$.

6. При решении текстовых задач в различных классах можно предлагать учащимся решение и задач, которые были на олимпиадах различного уровня, обязательно указывая, сколько учеников их решили.

Например:

а) Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалось проехать треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B, если велосипедист после первой остановки больше в пути не останавливался?

Решение. Так как велосипедист стоял, дожидаясь, пока мотоциклисту останется проехать треть пути до B, то на треть всего своего пути велосипедист затратил времени меньше, чем мотоциклист на треть своего

($\frac{2}{3}AB$ от $2AB$ составляют $\frac{1}{3}$).

Значит, и на весь путь велосипедист затратит времени меньше.

б) Одну овцу лев съел за 2 дня, волк за 3 дня, собака за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение.

1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, то есть 1 овцу.

в) *Старинная задача.* «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть три женщины».

Решение. Обозначив число учеников Пифагора за x, получим, что $\frac{1}{2}x$ — изучает математику, $\frac{1}{4}x$ — музыку, а $\frac{1}{7}x$ — пребывает в молчании.

Так как, кроме того, есть ещё 3 женщины, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x.$$

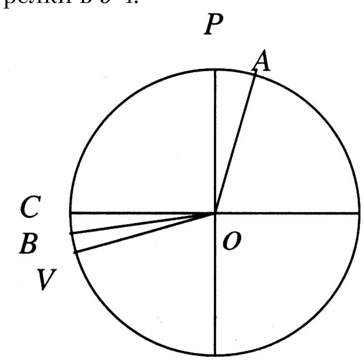
Решением этого уравнения будет $x = 28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 учеников.

Наибольшие трудности у учеников на олимпиадах, как показывает собственный опыт участия в олимпиадах разного уровня, а также проведения школьных и городских олимпиад, вызывают геометрические задачи, хотя именно геометрия прекрасно развивает нестандартное мышление и выделяет людей, способных заниматься математикой. Этот тип олимпиадных задач — самый обширный. Это задачи и на разрезания, и на построение, и на нахождение углов. Но чаще всего встречаются задачи, которые используют в своём решении какую-то необычную идею, чаще всего дополнительное построение.

Рассмотрим несколько примеров олимпиадных задач по геометрии, которые можно рассмотреть на уроке, увязав их решение с темой урока.

6. При изучении темы «Измерение углов» можно учащимся предложить необычные задачи на нахождение углов между минутной и часовой стрелкой типа: «Какой угол образует часовая и минутная стрелки часов в 8 ч 5 мин.?»

Решение. Изобразим положения стрелок и обозначим соответствующие углы буквами (смотри рисунок). Здесь точки *P, A, V, B, C* соответствуют следующим положениям стрелок: *P* — 12 ч; *A* — положение конца минутной стрелки в 8 ч 5 мин.; *V* — положение конца минутной стрелки в 8 ч; *B* — положение конца часовой стрелки в 8 ч 5 мин.; *C* — положение конца часовой стрелки в 9 ч.



Тогда $\angle POA = \frac{1}{12}\cdot 360° = 30°$, $\angle POC = 90°$, $\angle BOC = \frac{11}{12}\angle VOC = \frac{11}{12}\cdot 30° = 27{,}5°$. А искомый угол *BOA* будет равен сумме углов *AOP, POC* и *COB,* т.е. 147,5°.

7. При изучении геометрических построений можно предложить задачи на построение углов заданной градусной меры через известный угол. Например:

«Построить угол в 5°, если дан угол в 34°».

Решение. Отложить угол 34° 5 раз, тогда получится угол 170°. Так как разность развёрнутого угла и 170° будет равна 10°, то разделим угол в 10° на 2 равных угла и получим угол в 5°.

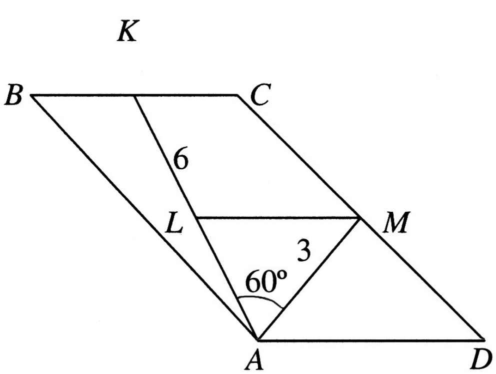
8. Так как на олимпиадах часто предлагаются задачи, в которых исполь-

зуются дополнительные построения, то подобного рода задачи необходимо рассматривать и на уроках, особо обращая внимание на эти дополнительные построения. Например, рассмотрим такую задачу: «Дан параллелограмм *ABCD*. *K* — середина стороны *BC*, *M* — середина стороны *CD*, $AK = 6$ см, $AM = 3$ см, $\angle KAM = 60°$. Найдите длину стороны *AD*. Ответ обоснуйте».

Решение. Задача имеет множество решений. Рассмотрим наиболее оригинальное. Проведём в трапеции *AKCD* среднюю линию *ML*. Она будет параллельна *AD* и *KC*, причём, $AL = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. Так как треугольник *ALM* — равнобедренный с углом при вершине 60°, то он — равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. А тогда, используя свойство средней линии трапеции,

имеем: $\dfrac{2x + x}{2} = 3$, откуда $x = 2$, а

значит, $AD = 4$ см.



Так как решение подобного рода задач требует применения некоторых качеств и приёмов мышления, то на уроке необходимо уделять внимание как развитию некоторых качеств ума (прежде всего, гибкости и глубины), так и приёмов умственной деятельности (в первую очередь, анализа, так как он чаще всего применяется в олимпиадных задачах, особенно геометрических).

2. Развитие качеств ума и приёмов умственной деятельности

Для развития *гибкости ума* на уроке надо:

- применять решение упражнений, в которых встречаются взаимно обратные операции;
- решать задачи несколькими способами, доказывать теоремы различными методами;
- применять различные переформулировки условия задачи;
- учить переключению с прямого хода мыслей на обратный;
- учить тому, какие знания, умения, навыки и в каком порядке применять в конкретной задаче и т.д.

Рассмотрим примеры задач, способствующих развитию этих качеств.

Упражнения на развитие гибкости ума

1. У двух зрячих один брат слепой, но у слепого нет зрячих братьев. Как это может быть? (Из первой фразы как будто следует, что речь в задаче идёт о братьях, тогда как на самом деле зрячими оказываются сёстры).

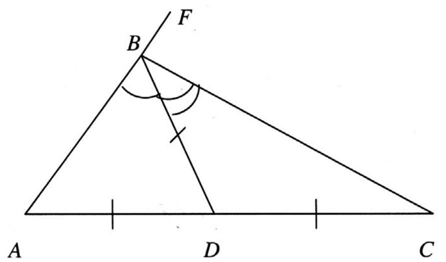
2. Два ученика подошли одновременно к реке. У берега реки стояла лодка (лишь для одного человека). Тем не менее, оба сумели переправиться через речку в одной лодке. Каким образом? (Из первой фразы как будто кажется, что ученики подошли к реке на одном берегу, но для решения задачи получается, что они подошли к реке на разных берегах).

3. Вам дано 5 спичек. Сложите из них 2 равносторонних треугольника. А если спичек будет 6, то сколько равносторонних треугольников вы можете изобразить?

Решение. Первая задача решается на плоскости, а вторая — на плоскости (тогда получается 2 равносторонних треугольника) или в пространстве (тогда получается 4 равносторонних треугольника).

4. Найдите как можно больше способов решения задач:

а) Докажите, что треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, является прямоугольным.



Решение.

Способ 1-й.

1) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 180°$.

2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 2 \cdot A\angle BD + 2 \cdot \angle DBC = 2(\angle ABD + \angle DBC) = 2 \cdot \angle ABC = 180°$.

4) $\angle ABC = 90°$, а значит ΔABC — прямоугольный.

Вывод: При доказательстве использовались теорема о сумме углов треугольника и свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Способ 2-й.

1) Рассмотрим треугольник ABD. $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$.

2) Рассмотрим треугольник DBC. $\angle ADB = \angle C + \angle DBC$.

3) В треугольнике ABD $\angle A = \angle ABD$.

4) В треугольнике DBC $\angle C = \angle DBC$.

5) $\angle ADB + \angle BDC = 180°$.

6) $\angle ADB + \angle BDC = \angle A + \angle ABD + \angle C + \angle DBC = 2 \cdot (\angle ABD + \angle DBC) = 180°$. А значит, $\angle ABD + \angle DBC = \angle B = 90°$.

Вывод: В данном способе использовались теорема о внешнем угле треугольника, свойство углов при основании равнобедренного треугольника, теорема о смежных углах.

Способ 3-й.

1) $\angle FBC = \angle A + \angle C$.

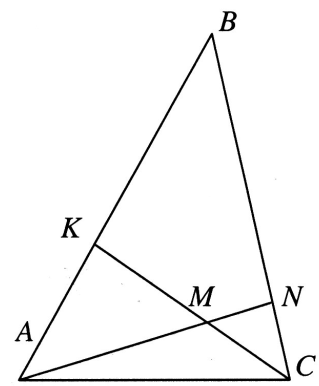
2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle FBC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$.

4) $\angle FBC + \angle ABC = 180°$, $\angle FBC = \angle ABC \Rightarrow ABC = 90°$.

Вывод: Применялись те же суждения, что и во втором способе, но в других комбинациях.

б) Высоты треугольника ABC, проведённые из точек A и C, пересекаются в точке M. Найдите угол AMC, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.



Решение.

Способ 1-й. Рассмотрим прямоугольные треугольники AKC и ANC. Из треугольника AKC находим $\angle KCA = 90° - 70° = 20°$. Из треугольника ANC находим $\angle NAC = 90° - 80° = 10°$. Рассмотрим треугольник AMC и найдём $\angle AMC = 180° - (20° + 10°) = 150°$.

Способ 2-й. Рассмотрим треугольник ABC. $\angle B = 180° - (80° + 70°) = 30°$. Из треугольника KCB находим $\angle KCB = 90° - 30° = 60°$. Из треугольника MNC находим $\angle NMC = 90° - 60° = 30°$. Так как углы NMC и AMC — смежные, то $\angle AMC = 180° - 30° = 150°$.

Способ 3-й. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30°$. Из треугольника ABN находим $\angle BAN = 90° - 30° =$

$= 60°$. Из треугольника AKM находим $\angle KMA = 90° - 60° = 30°$. Так как углы KMA и AMC — смежные, то $\angle AMC = 150°$.

Способ 4-й. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30°$. Так как $\angle KBN + \angle BNM + \angle NMK + \angle MKB = 360°$ (данный факт легко доказывается, если провести диагональ в четырёхугольнике $KBNM$), то $\angle KMN = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$. А так как углы KMN и AMC — вертикальные, то $\angle AMC = 150°$.

5. Чему равен угол между биссектрисами вертикальных углов? А смежных углов? (Изменение содержания задачи развивает гибкость ума).

6. Вычислите: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}$. (Предложены первые 3 примера одного типа, а четвёртый — другого. Для решения четвёртого примера необходимо перестроить деятельность).

7. Решите задачу: «За 18 дней бригада лесорубов в составе 15 человек заготовила 972 куб. м дров. Сколько дров заготовит бригада из 12 человек за 25 дней при такой же производительности труда?». Поставьте новый вопрос к задаче. Измените в соответствии с ним условие исходной задачи и решите новую задачу. Найдите другой способ только что решённой задачи.

8. Измените условие задачи: «Докажите, что каждый из углов равностороннего треугольника равен 60°» таким образом, чтобы в условии задачи были те же понятия, что и в заключении. (Видоизменение задачи развивает гибкость ума).

Для развития *глубины ума* на уроке надо учить учащихся:

- выделять главное отношение в задаче;
- выделять существенные признаки понятия;
- вычленять ведущие закономерные отношения явлений;
- отделять главное от второстепенного, уметь извлекать из текста не только то, что в нём сказано, но и то, что содержится «между строк»;
- *видеть главные причины происходящего, объяснять их сущность и т.д.*

Упражнения на развитие глубины ума

1. Известно, что сложению соответствует одно обратное действие — вычитание; аналогично для умножения обратным действием является деление. Почему же действие возведения в степень имеет два себе обратных: извлечение корня и логарифмирование? (Для возведения числа в степень переместительный закон не действует в отличие от сложения и умножения).

2. Является ли последовательность вида 3, 3, 3, ... арифметической прогрессией? А геометрической?

3. Подчеркните наиболее общее понятие: *медиана, отрезок, хорда, средняя линия треугольника.*

4. Выделите основное соотношение в задаче: «Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 660 км. Через 4 часа они встретились. Найдите скорость каждого поезда, если скорость одного на 15 км/ч больше скорости другого».

5. Выделите существенные признаки понятий «равнобедренный треугольник», «ромб».

Иногда одна и та же задача может развивать различные качества ума.

Упражнения на развитие нескольких качеств ума

1. Вася живёт на 5 этаже 12-этажного дома. Он решил покататься на лифте. Сначала он поднялся на 2 этажа, потом опустился на 4 этажа, потом поднялся на 6 этажей, потом опустился на 10 этажей, потом вновь поднялся на 3 этажа. На каком этаже в итоге Вася оказался? (Развитие осознанности и гибкости ума).

Решение. 5 + 2 – 4 + 6 – 10 + 3 = 2, но при решении получалось 5 + 2 – – 4 + 6 – 10 = – 1. Так как в процессе решения получилось – 1, то в задаче есть противоречивые данные. Но, если под «– 1 этажом» дома понимать подвал, то всё получается. Ведь лифт может иногда опускаться и в подвал.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см, а высота, проведённая к гипотенузе, равна 2 см. Чему равна гипотенуза треугольника? (Развитие осознанности и глубины ума).

Решение.

Так как $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$ (см).

Но $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot c = c$, поэтому $c = 6$ (см).

Но по теореме Пифагора:
$c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$ (см). Это задача с противоречивыми данными в условии. Противоречие можно получить и другим способом, найдя длины отрезков, на которые основание высоты разбивает гипотенузу.

3. Докажите тождество:

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Рассмотрев тождество как уравнение относительно переменной x (а это уравнение будет не выше второй степени), мы получим, что три значения: $x = a, x = b, x = c$ удовлетворяют этому «уравнению», а, следовательно, данное равенство является тождеством. При оригинальном решении этой задачи развиваются гибкость, глубина, критичность и другие качества ума.

Рассмотренные качества ума — гибкость, глубина и другие — это основные составляющие такой интеллектуальной особенности, как обучаемость учащихся математике, которую можно развивать как на уроке, так и вне урока. Мы рассмотрели основной путь развития этой интеллектуальной особенности через применение на уроке различных нестандартных и олимпиадных задач.

Ещё одно важное и необходимое условие повышения уровня обучаемости учащихся математике — развитие у них приёмов умственной деятельности.

Рассмотрим основные типы упражнений для развития некоторых приёмов.

Для развития *анализа* необходимо:

- предлагать дополнительные построения, нестандартные идеи для решения задач;
- обучать применению нисходящего и восходящего анализа для решения задач;
- обучать нахождению достаточных признаков справедливости заключения, отбирать требуемый признак для решения задачи и т.д.

Приведём примеры упражнений для развития этого важного приёма умственной деятельности.

Упражнения на развитие приёма умственной деятельности — анализа

1. Можно ли треугольник разбить двумя прямыми на
а) 5 треугольников;
б) 8 треугольников?

2. Можно ли разбить равнобедренный треугольник на:
а) 4; г) 7;
б) 5; д) 2006;
в) 6; е) 2007 равнобедренных треугольников?

Если можно, то покажите, как это сделать?

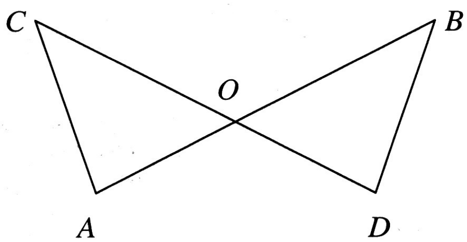
3. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника равняться 100°?

4. Каков вид треугольника, если:

а) один из его углов больше суммы двух других углов;

б) сумма любых его двух углов больше 90°?

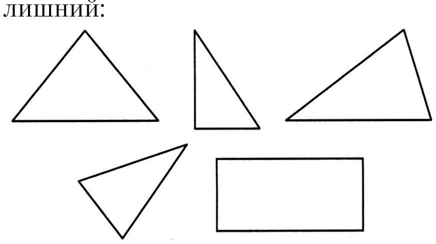
5. Что достаточно знать, чтобы утверждать, что на рисунке треугольники *CAO* и *BDO* были равными?



Приведём по несколько упражнений, предназначенных для развития других приёмов умственной деятельности.

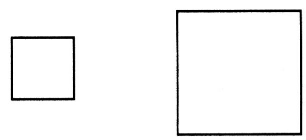
Упражнения на развитие приёма умственной деятельности — классификации

1. Выделите основные типы задач по изученной теме «Проценты».
2. Постройте различные классификации четырёхугольников.
3. Вычеркните одно лишнее слово: *параллелограмм, ромб, трапеция, квадрат, прямоугольник.*
4. Исключите из 5 данных на рисунке геометрических объектов лишний:

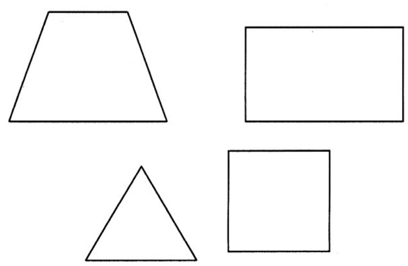


Упражнения на развитие приёма умственной деятельности — сравнения

1. Сравните параллелограмм и трапецию.
2. Сравните треугольник и тетраэдр.
3. Что общего у прямоугольника и ромба?
4. В чём отличие равностороннего треугольника от квадрата? А чем они похожи?
5. Посмотрите на рисунок и скажите, что общего у изображённых фигур и в чём их отличие:



6. Какая из изображённых фигур на рисунке отличается от остальных и чем отличается?



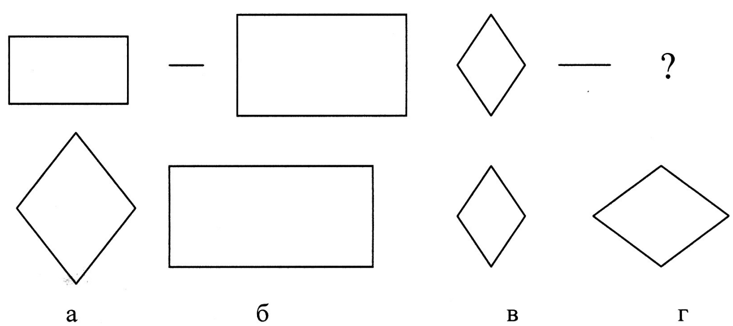
Упражнения на развитие приёма умственной деятельности — абстрагирования

1. Выберите из 5 предложенных математических терминов: *прямые, отрезки, лучи, точка, треугольник* два, которые бы наиболее точно определяли понятие *угол.*
2. Выделите существенные признаки понятия «треугольник».

Упражнения на развитие приёма умственной деятельности — аналогии

1. Решите задачу способом, аналогичным только что решённой задаче.
2. Найдите четвёртое понятие, которое бы так соотносилось с третьим понятием, как первое со вторым: *угол — вершина угла; окружность — ?*

3. На рисунке в верхнем ряду изображены 3 фигуры. Подумайте, как связаны первые две из них и укажите в наборе (а–г) четвёртую фигуру, которая точно так же связана с третьей:



Известно, что между приёмами умственной деятельности и качествами ума есть связь. Развитие некоторых приёмов умственной деятельности способствует и развитию определённых качеств ума. Например, предлагая задачи для развития приёмов «анализ» и «синтез» развивается гибкость ума и наоборот. А формирование приёмов абстрагирования и обобщения способствует развитию глубины ума.

Есть, конечно, и другие пути развития обучаемости учащихся математике, но это уже отдельный разговор.

г. Архангельск

ИДЕАЛ, ИДЕЯ

Идеал — это путеводная звезда. Без неё нет твёрдого направления, а нет направления — нет жизни.

Л. ТОЛСТОЙ

Без идеалов... никогда не может получиться никакой хорошей действительности.

Ф. ДОСТОЕВСКИЙ

Даже когда народ пятится, он гонится за идеалом и верит всегда в некое «вперёд».

Ф. НИЦШЕ

Люди сильны до тех пор, пока они отстаивают сильную идею.

З. ФРЕЙД

Ни одна армия не может противостоять силе идеи, время которой пришло.

В. ГЮГО