# Математические олимпиады в основной школе

## 9-й класс

**Александр Фарков,**
*заведующий кафедрой психологии, педагогики и методики преподавания математики Коряжемского филиала Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук, доцент*

**В 2006 г. журнал «СШ» опубликовал материал для проведения школьных математических олимпиад в 1–8-х классах основной школы: методические рекомендации, примерные тексты, указания к решению и ответы. Завершаем публикацию текстами и решениями для 9-го класса. Начало публикации — журнал «СШ». 2006. № 3, 4, 5.**

**Вариант 1**

**1.** Решите уравнение: $\frac{x^2}{3}\cdot\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

**2.** Найдите сумму: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}$.

**3.** Найдите углы треугольника со сторонами *a, b, c,* если его площадь равна $\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$.

**4.** Сколькими способами число 100 можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

**Вариант 2**

**1.** Найдите значение выражения:

$$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1+\sqrt[32]{a})(1-\sqrt[32]{a}).$$

**2.** Сократите дробь: $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$.

**3.** Решите систему уравнений: $\begin{cases}(3x+y)^2+2(x-y)^2=96,\\ 3x+y=2(x-y)\end{cases}$

**4.** Постройте график функции: $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$.

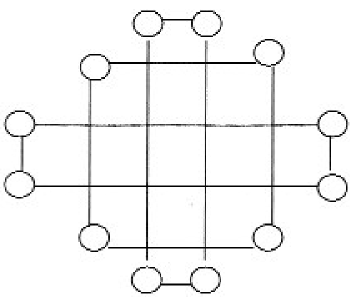
**5.** Четыре школьника сделали в магазине покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 руб.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 руб.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 руб.; четвёртый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвёртый школьник?

**Вариант 3**

**1.** Решите числовой ребус, если каждая цифра встречается всего один раз.

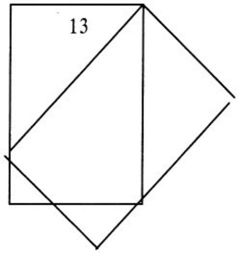
```
_***|**
  **|*
 ---
   *
```

**2.** Запишите числа от 1 до 12 так, чтобы три суммы чисел, записанных в вершинах каждого из двух прямоугольников и одного квадрата, были одинаковыми.



**3.** Число x возвели в третью степень. Докажите, что хотя бы одно из чисел $x^3 + x$ или $x^3 - x$ делится на 10.

**4.** Листок календаря частично закрыт предыдущим листком (см. рис.). Какая его часть больше — закрытая или открытая?




**5.** Найдите действительные решения уравнения: $(x + 2)^4 + x^4 = 82$.

**Вариант 4**

**1.** Антон, Борис и Владимир занимаются различными видами спорта: футболом, плаванием и теннисом. Кто из них каким видом спорта занимается, если известно, что Борис и Владимир не пловцы, а Борис — не теннисист?

**2. Задача Безу.** Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила его лошадь. Спрашивается, за какую сумму он её купил?

**3.** Докажите, что если $(x^2 + y^2)$ делится на 3 и $x$, $y$ — целые, то $x$ и $y$ делятся на 3.

**4.** Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на 4 треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.

**5.** При каких значениях $a$ квадратные трёхчлены $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$ имеют общий корень?

**Вариант 5**

**1.** Запишите число 10 с помощью семи «4», арифметических знаков и запятой. (4 б.)

**2.** Как с помощью циркуля и линейки разделить угол величиной в 19° на 19 равных частей? (6 б.)

**3.** Расстояние между пунктами $A$ и $B$ — 60 км. Из $A$ в $B$ выходит автомобиль, а из В в том же направлении одновременно с первым автомобилем выходит второй. Если скорость первого автомобиля увеличить на 10 км/ч, а второго — на 8 км/ч, то первый автомобиль догонит второй в том же месте, но на час раньше. Какова скорость каждого автомобиля? (6 б.)

**4.** 1997*** делится на 1996. Сколько способов существует заменить *** цифрами? (7 б.)

**5.** Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое знакомых или трое незнакомых между собой людей. (10 б.)

**Вариант 6**

**1.** Решите уравнение: $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

**2.** Автомобиль проехал 600 км. Первую половину пути он двигался со скоростью 100 км/ч, а вторую — 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля.

**3.** Равнобокая трапеция $ABCD$ разбивается диагональю $AC$ на 2 равнобедренных треугольника. Определите углы трапеции.

**4.** Сколько цифр содержит число $4^5 \cdot 5^{13}$?

**5.** Решить уравнение в целых числах: $x + y = xy$.

## Указания к решению, ответы

**Вариант 1**

**1.** $x = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{111}}{5}$.

**2.** Домножаем числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряжённое знаменателю дроби; упрощаем полученное выражение.

*Ответ:* $\sqrt{2001} - 1$.

**3.** $S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C$ и $S = \dfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$

Выразим из данных формул

$\sin C : \sin C = 1 + \dfrac{(a-b)^2}{2ab}$.

Так как $\sin C \le 1$, то $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} \le 0$.

Но $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} \ge 0$, поэтому $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} = 0$.

Тогда $\sin C = 1$, значит, $\angle C = 90°$. Так как $a = b$, то $\angle A = \angle B = 45°$.

*Ответ:* $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$

**4.** Обозначим первое число за $n$, последнее за $n + k$. Тогда сумма запишется следующим образом:

$n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + k) = 100$.

Найдя сумму членов арифметической прогрессии в левой части и упростив, получим: $(2n + k)(k + 1) = 200$, $200 = 2 \cdot 100 = 1 \cdot 200 = 4 \cdot 50 = 5 \cdot 40 = 8 \cdot 25$. Так как первый множитель больше второго и один множитель — чётный, а второй — нечётный, то получим:

$$\begin{cases} 2n + k = 25, \\ k + 1 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2n + k = 40, \\ k + 1 = 5. \end{cases}$$

Решая системы, получим: $n = 9$, $k = 7$ или $n = 18$, $k = 4$.

*Ответ:* $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100$ или $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$.

**Вариант 2**

**1.** Применяя формулу $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ последовательно для последних двух множителей, в результате получим: $\left(1 - \sqrt{a}\right)\left(1 + \sqrt{a}\right) = 1 - a$. При $a = 2002$ $1 - a = -2001$.

*Ответ:* $-2001$.

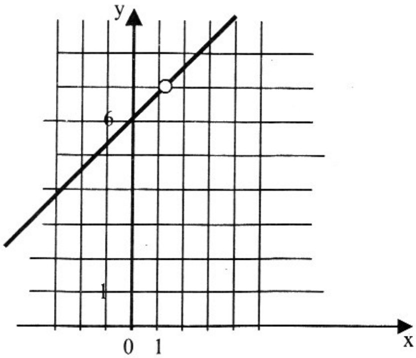
**2.** $$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x^2(x+5) - 4(x+5)}{(x+5)(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

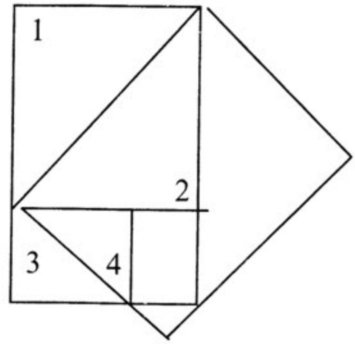
**3.** Введём новые переменные: $u = 3x + y$, $v = x - y$; решим систему уравнений относительно переменных $u$ и $y$. Затем найдём $x$ и $y$.

*Ответ:* $(3; -1)$; $(-3; 1)$.

**4.** $$y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x + 6, \text{ но } x \ne 1.$$

(см. график).




5. Вместе первый и второй мальчик купили пенал, 2 ластика и карандаш, заплатив 52 рубля за всю покупку. Так как третий мальчик заплатил 50 рублей за пенал, 2 тетради и карандаш, то ластик стоит дороже тетради на 1 рубль. Так как пенал и ластик стоят 40 рублей, то пенал и тетрадь будут стоить 39 рублей.

*Ответ:* 39 рублей.

**Вариант 3**

**1.**

$$\begin{array}{r|l} 103 & 48 \\ \underline{96} & 2 \\ 7 & \end{array}$$

**2.** Так как сумма всех чисел от 1 до 12 равна 78, то сумма четырёх чисел, записанных в вершинах квадрата, будет равна 26.

Возможный вариант записи может быть такой: 12, 9, 1, 4 — в вершинах квадрата; 11, 8, 2, 5 и 10, 7, 3, 6 — в вершинах прямоугольников.

**3.** Найдём последнюю цифру выражений $x^3 + x$ и $x^3 - x$:

Из таблицы видно, что хотя бы одно

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ оканчивается | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $x^3$ оканчивается | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |
| $x^3 + x$ оканчивается | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 |
| $x^3 - x$ оканчивается | 0 | 0 | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 0 |

из чисел $x^3 + x$ и $x^3 - x$ делится на 10.

**4.** Больше будет закрытая часть, так как $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$.

**5.** Обозначим $y = x + 1$, тогда данное уравнение примет вид $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82$, которое после упрощения примет вид: $y^4 + 6y^2 - 40 = 0$. Данное биквадратное уравнение имеет решения $y \pm 2$. Следовательно, $x = 1; -3$.

*Ответ:* 1; –3

**Вариант 4**

**1.** Антон — плавает, Борис — футболист, Владимир играет в теннис.

**2.** Обозначив за $x$ пистолей стоимость лошади и учитывая, что при продаже было потеряно $x$ %, имеем

следующее уравнение:

$$x - \frac{x \cdot x}{100} = 24.$$

Решая его, получаем $x = 40$ или $x = 60$ пистолей.

*Ответ:* 40 или 60 пистолей.

**3.** Пусть $x = 3q + r_1$, $y = 3p + r_2$, где $r_1$ и $r_2$ остатки от деления на 3, то есть 0, 1, 2. Тогда $x^2 + y^2 = (3q + r_1)^2 + (3p + r_2)^2 =$

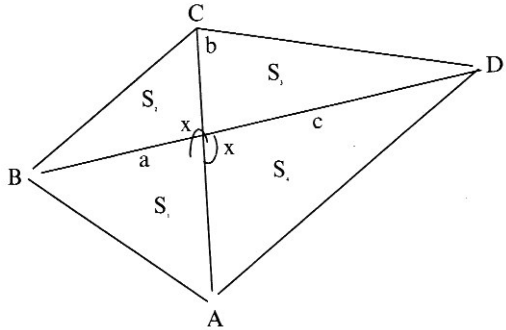
$= 3(3q^2 + 3p^2 + 2qr_1 + 2pr_2) + r_1^2 + r_2^2$.

Так как $x^2 + y^2$ делится на 3, то $r_1^2 + r_2^2$ тоже делится на 3.

Но $r_1^2 + r_2^2$ может быть равно лишь 0 или 1, или 2, откуда $r_1 = r_2 = 0$.

Следовательно, $x$ и $y$ делятся на 3.

**4.**




$$S_1 = \frac{ad\sin(180°-x)}{2},\quad S_2 = \frac{ab\sin x}{2},$$

$$S_3 = \frac{bc\sin(180°-x)}{2},\quad S_4 = \frac{cd\sin x}{2}.$$

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 = \frac{abcd\sin^2 x}{4}.$$

**5.** Пусть $x$ — общий корень данных трёхчленов, тогда $x_1^2 + ax_1 + 1 = 0$ и $x_1^2 + x_1 + a = 0$, то есть $x_1^2 + ax_1 + 1 = x_1^2 + x_1 + a$ => $ax_1 + 1 = x_1 + a$ => => $a(x_1 - 1) = x_1 - 1$ => => $(x_1 - 1)(a - 1) = 0$. Тогда $a = 1$ или $x_1 = 1$. Если $a = 1$, то оба трёхчлена имеют вид $x^2 + x + 1$ и не имеют корней.

Если $x_1 = 1$, то $1^2 + a\cdot 1 + 1 = 0$ и $1^2 + 1 + a = 0$. В обоих случаях $a = -2$.

*Ответ:* $a = -2$.

### Вариант 5

**1.** 44, 4:4 — 4,4:4= 10.

**2.** Построим окружность с центром в вершине угла, отложим на ней 19 раз угол 19°. В результате получим угол в 1° = 19°·19 – 360°. С помощью этого угла делим данный угол на 19 частей.

**3.** Скорости автомобилей равны 50 км/ч и 40 км/ч.

**4.** Существует всего один способ — 1997996. Если бы существовали другие способы, то они отличались бы от этого числа, по крайней мере, на 1996, то есть первые четыре цифры не совпадали бы с 1997.

**5.** Пусть эти шестеро: *A, B, C, D, E, M. A* находится в одном из двух отношений: «знаком» или «не знаком» хотя бы с тремя из них. Пусть это будут *B, C, D*. Если какие-то два из них находятся в том же отношении друг с другом, то они вместе с *A* образуют искомую тройку. В противном случае искомая тройка *B, C, D*.

### Вариант 6

**1.** $(x^2 - x - 1)^2 - 5 - x^3 = 0$ =>
=> $(x^2 - x - 1)^2 - 4 - x^3 - 1 = 0$ =>
=> $(x^2 - x - 1 - 2)(x^2 - x - 1 + 2) -$
$- (x^3 + 1) = 0$ => $(x^2 - x - 3)\times$
$\times(x^2 - x + 1) = (x + 1)\times(x^2 - x + 1) = 0$
=>$(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$ =>
=> $x^2 - x + 1 = 0$; $(x^2 - 2x - 4 = 0$

Первое из данных уравнений корней не имеет, корнями второго уравнения будут: $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

*Ответ:* $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

**2.** 600:2 = 300 (км) — половина пути;

300:100 = 3 (ч) — время на первую половину пути;

300:60 = 5 (ч) — время на вторую половину пути;

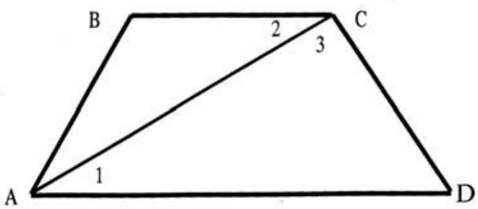
3 + 5 = 8 (ч) — время движения автомобиля;

600:8 = 75 (км / ч).

*Ответ:* средняя скорость автомобиля равна 75 км / ч.

**3.** Так как $\angle B > 90°$, то $\angle 1 = \angle 2$. Но $BC \parallel AD$, АС — секущая, значит $\angle CAD = \angle 2$. Так как $\angle 3 \neq \angle 2$ (иначе $\angle A = \angle C$, чего не может быть), то $\angle 3 = \angle D$. Но $\angle D = \angle A$, поэтому $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, тогда $\angle 3 = 2\angle 1 = 2\angle 2$. В результате имеем:
$\angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180°$;
$\angle 2 + 2\angle 2 + 2\angle 2 = 180°$; $5\angle 2 = 180°$;

откуда: $\angle 2 = 36^\circ$. Тогда углы трапеции будут $72^\circ$, $108^\circ$, $108^\circ$, $72^\circ$.




*Ответ:* $72^\circ$ и $108^\circ$

**4.** $4^3 \cdot 5^{13} = (2^{10} \cdot 5^{10}) \cdot 5^3 = 10^{10} \cdot 5^3 =$ $= 1250000000000$.

*Ответ:* 13 цифр.

**5.** Перепишем данное уравнение в виде $y = x(y - 1)$. При $y = 1$ решений нет. Пусть $y \neq 1$, тогда можно поделить обе части уравнения на $(y - 1)$. Получим:

$$\frac{y}{y-1} = x \Leftrightarrow \frac{(y-1)+1}{y-1} = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y-1} = x.$$

Так как $x$ — целое число, то и $\frac{1}{y-1}$ — целое число Но делителями единицы являются лишь числа 1 и $-1$.
В итоге получаем:
$y = 2, x = 2; y = 0, x = 0$.