Татьяна Николаевна Губина, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и информатики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В статье предлагается подход к преподаванию в вузах темы «Решение граничной задачи на нахождение собственных значений и собственных функций дифференциального уравнения в частных производных» в рамках специальных дисциплин, ориентированных на последующее обучение студентов физико-математического факультета в магистратуре.

Одна из таких дисциплин — курс по выбору «Решение спектральных задач для линейных операторов с использованием систем компьютерной математики», в рамках которого студенты решают задачи научного характера. Этот курс по выбору читается студентам, обучающимся по направлению 032100.00 «Математика с дополнительной специальностью».

Вопросами теории граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных занимались и занимаются многие математики: С. Геллестедт, М.А. Лаврентьев, М.М. Смирнов, Ф. Трикоми, А.А. Дезин, В.К. Романко, В.В. Корниенко, А.Б. Хасанов и др. По этой проблематике написано множество статей и книг, но студенту (аспиранту), начинающему работать в этом направлении, трудно в них ориентироваться. Во многих книгах ведущие знания и способы деятельности не выделены, методический аппарат учебников и частных методик слабо ориентирован на организацию познавательной деятельности студентов.

В государственном образовательном стандарте по направлению 032100.00 «Математика с дополнительной специальностью» от 14.04.2000 г. [1] не предусмотрены дисциплины, затрагивающие вопросы теории граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, не излагаются вопросы, связанные с теорией линейных операторов. Поэтому студенты, заканчивающие вуз по этой специальности, испытывают значительные затруднения при поступлении в аспирантуру по направлению 010102 «Дифференциальные уравнения». Чтобы ликвидировать разрыв в вузовском и послевузовском образовании по рассматриваемому направлению, предлагается серия специальных дисциплин — курсов по выбору. К ним относится и предлагаемый здесь курс. Его образовательная цель — познакомить студентов с линейными операторами, научить их находить собственные значения и собственные функции операторного уравнения, спектр линейного оператора.

Особое внимание уделяется решению задач научного характера. Такая работа способствует тому, что у студентов развивается интерес к научной работе, формируются знания о методах научного познания в области математики, вырабатываются необходимые для этого исследовательские навыки, умения самостоятельно решать встающие перед ними в процессе исследования задачи, а также навыки использования научной и специальной литературы.

Этот курс способствует формированию у студентов стиля научного мышления, что является основой сущностного подхода в педагогике и дидактике высшей школы. Тем самым улучшается система математической и профессиональной подготовки, а также сокращается разрыв между преподаванием математики и требованиями практики поступления в аспирантуру по специальности «Дифференциальные уравнения».

Так как применительно к учебному процессу и к научным исследованиям основополагающее значение имеют новые информационные технологии, то для повышения эффективности научно-исследовательской деятельности при решении ряда проблем, возникающих в ходе решения задач в рамках курса по выбору, мы используем систему компьютерной математики Mathematica 4.1/5.0. Это улучшает восприятие получаемой информации, способствует её запоминанию, улучшению мыслительной деятельности.

Большое значение имеет применение материала в жизненных ситуациях. В связи с этим, прежде чем переходить к постановке задачи, можно рассказать студентам о важности проблемы собственных значений и собственных функций, например, в инженерных расчётах. К ней сводятся такие задачи, как:

- ✦ решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих большое число реальных физических процессов;
- ✦ анализ устойчивости по Ляпунову состояния равновесия некоторых систем;
- ✦ нахождение главных нормальных напряжений и соответствующих направляющих векторов тензора напряжений любого тела или системы тел;
- ✦ расчёт собственных частот тела или системы тел, а также любой колебательной системы при анализе поведения мостов, зданий, летательных аппаратов, крыльев самолётов и других конструкций, характеризующихся малыми смещениями от положения равновесия, в том числе в задачах квантовой механики;
- ✦ расчёт критической массы радиоактивного вещества при решении задач ядерных реакторов.

Рассмотрим одну из задач, решаемых студентами на практических занятиях.

Постановка задачи. Найти собственные значения и собственные функции задачи:

$$t\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=f(t,x),\quad u\big|_{t=0}=0 \qquad (1)$$

Здесь $t\in[0,b]$, $b\in R$. Данное дифференциальное уравнение в частных производных сведём к обыкновенному дифференциально-операторному уравнению. Для этого будем искать функции $u(t,x)$ и $f(t,x)$ в виде:

$$u(t,x) = \sum_s u_s(t)e^{isx}\ ,\ \ f(t,x) = \sum_s f_s(t)e^{isx}\ ,$$

$s \in S$,

где S — множество нумерующих индексов s.

Тогда, вычислив частные производные функции $u(t,x)$ по переменным t и x, мы подставим найденные значения в исходное уравнение (1):

$$\sum_s tu_s'(t)e^{isx} + \sum_s isu_s(t)e^{isx} = \sum_s f_s(t)e^{isx}\ .$$

Пользуясь свойством операции суммирования, получим:

$$\sum_s e^{isx}(tu_s'(t) + isu_s(t) - f_s(t)) = 0\,.$$

Данное равенство будет выполнено тогда и только тогда, когда:

$$tu_s'(t) + isu_s(t) - f_s(t) = 0,$$

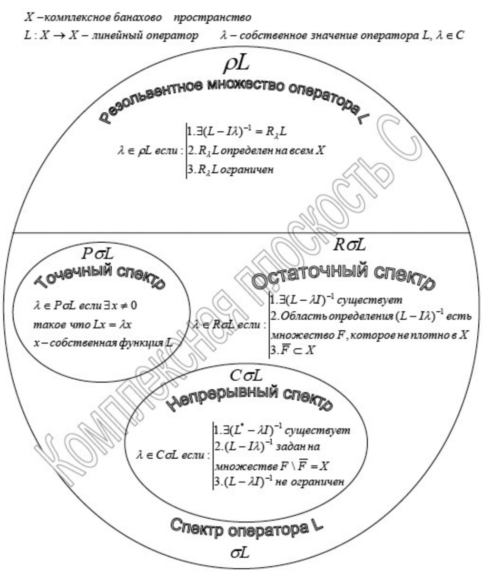

Схема 1. Структура спектра оператора

или, коротко,

$$tu' + isu - f = 0\,,\ u(0) = 0. \qquad (2)$$

В дальнейшем будем изучать вопросы спектральной теории дифференциально-операторного уравнения:

$$Lu \equiv tu' + Au = f\,,$$

где $A = is - \lambda$, λ — собственные значения оператора L, $\lambda \in \tilde{N}$, $u(t) \in L_2[0,b]$.

Для этого воспользуемся опорным конспектом для повторения понятий: регулярная точка оператора L, резольвентное множество оператора L, спектр оператора L: точечный, непрерывный, остаточный (см. схему 1). Применение опорного конспекта способствует лучшему визуальному восприятию информации, чёткому осмыслению, лучшему пониманию и быстрому запоминанию информации, выработке умения выделять главное. Тем самым активизируется познавательная деятельность студентов.

1. Найдём точечный спектр оператора L.

Пользуясь определением точечного спектра линейного оператора L, нам нужно решить уравнение

$$Lu \equiv tu' + Au = 0.$$

Переписав уравнение в виде:

$t\dfrac{du}{dt} + Au = 0$, приходим к уравнению с разделёнными переменными:

$\dfrac{du}{u} = A\dfrac{dt}{t}$. Интегрируя данное уравнение, находим его решение: $\ln|u| = A\ln|t| + \tilde{N}$ или, пользуясь свойством логарифма, $u(t) = \tilde{N}t^{-A}$, или $A = is - \lambda$.

Теперь нам нужно проверить, принадлежит ли найденное решение пространству $L_2[0,b]$. Для этого произведём оценку интеграла $\int_0^b |u(t)|^2 dt$, т.е. найдём, при каких значениях А решения $u(t) \in L_2[0,b]$. Для этого наш интеграл должен сходиться, т.е.

$$\int_0^b |u(t)|^2 dt < +\infty.$$

Для оценки интеграла нам понадобится формула для вычисления абсолютного значения положительного действительного числа, возводимого в комплексную степень, известная из курса теории функций комплексной переменной:

$$|t^z| = |t^{x+iy}| = |t^x(\cos y + i \sin y)| =$$
$$= \sqrt{t^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = t^x = t^{\operatorname{Re} z}.$$

Получаем:

$$\int_0^b |t^{-A}|^2 dt = \int_0^b t^{-2\operatorname{Re} A} dt \overset{\operatorname{Re} A \neq 1/2}{=} \left.\frac{t^{-2\operatorname{Re} A+1}}{-2\operatorname{Re} A+1}\right|_0^b = \frac{b^{1-2\operatorname{Re} A}}{1-2\operatorname{Re} A}.$$

Таким образом, мы видим, что интеграл будет сходиться, когда $1-2\operatorname{Re} A > 0$. Исходя из того, что $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re}(is-\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda)$, делаем вывод о том, что:

$\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$ (см. рис. 1).

2. Найдём собственные функции оператора *L*.

Для этого воспользуемся определением:

Определение. Элемент $u(t) \in L_2$ принадлежит области определения $D(L_2)$ оператора *L* и $Lu = f$, если найдётся последовательность

$\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ из $D(L_2)$ такая, что в $L_2[0,b]$ будут выполнены следующие равенства:

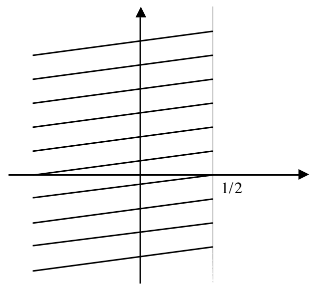

Рис. 1. Расположение собственных значений λ (точечного спектра оператора L) на комплексной плоскости

$$\lim_{n\to\infty}|u_n - u| = 0, \lim_{n\to\infty}|Lu_n - f| = 0. \qquad (3)$$

Так как мы ищем собственные функции оператора *L*, то получаем $f = 0$. Далее, учитывая, что функция *u(t)* должна принадлежать $D(L_2)$, то:

$$u_n(t) \in C[0,b] \cap C^1(0,b) \text{ и } u_n(0) = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что в методике решения рассматриваемой задачи мы стараемся вести процесс понимания выполняемых действий не на интуитивном уровне, а на рациональном с глубоким осмыслением происходящего.

Теперь посмотрим, выполняются ли эти условия для найденной функции $u(t) = Ñt^{-A}$. Возьмём для начала *u(t) = 1*, т.е. полагаем *C = 1, A = 0*. Видим, что в этом случае у нас не выполняется условие *u(0) = 0*. Тогда сгладим функцию *u(t)* следующим образом (см. рис. 2): выберем какое-нибудь значение переменной

$t = \frac{1}{n} > 0$ и достроим влево от этой точки нашу функцию *u(t)* как ветвь параболы с вершиной в точке $\left(\frac{1}{n};1\right)$.

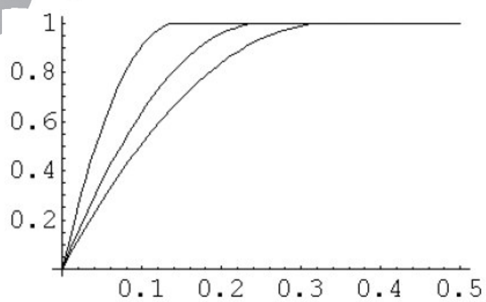

Рис. 2. Сглаживание решения u(t) = 1

Итак, у студентов вырабатываются такие мыслительные операции, как сравнение, сопоставление, анализ, синтез. Проделывая предлагаемые действия, они учатся вычленять существенное, сопоставлять данные и делать выводы о дальнейших действиях.

Для удобства и достоверности полученных результатов воспользуемся графическими возможностями системы компьютерной математики Mathematica 4.1. Возьмём в качестве вершин парабол три различных значения

$\left(\frac{1}{3};1\right)$, $\left(\frac{1}{4};1\right)$, $\left(\frac{1}{7};1\right)$.

n1=3; n2=4; n3=7;
s1=Plot[-n1 2(t-1/n1) 2+1, {t, 0, 1/n1}, DisplayFunction → Identity];
s2=Plot[1, {t, 1/n1, 0.5}, DisplayFunction → Identity];
s3=Plot[-n2 2(t-1/n2) 2+1, {t, 0, 1/n2}, DisplayFunction → Identity];
s4=Plot[1, {t, 1/n2, 0.5}, DisplayFunction → Identity];
s5=Plot[-n3 2(t-1/n3) 2+1, {t, 0, 1/n3}, DisplayFunction → Identity];
s6=Plot[1, {t, 1/n3, 0.5}, DisplayFunction → Identity];
Show[s1, s2, s3, s4, s5, s6, DisplayFunction → $DisplayFunction].

Таким образом, выполнено условие (4). Теперь необходимо проверить выполнение условий (3) в пространстве $L_2[0,b]$. Для этого воспользуемся известными из курса математического анализа и элементарной математики формулами:

Если $f(x)=\begin{cases} f1(x),\ a\le x\le c,\\ f2(x),\ c\le x\le b,\end{cases}$

то $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f1(x)dx+\int\limits_c^b f2(x)dx$,

$(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$.

Тогда получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^b\left|u_n(t)-u(t)\right|^2dt=\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^{1/n}\left|-n^2\left(t-\frac{1}{n}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+1-1\right|^2dt+\int\limits_{1/n}^b\left|1-1\right|^2dt\right)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{1/n}\left|n^4\left(t-\frac{1}{n}\right)^4\right|dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{1/n}\left|n^4\left(\frac{1}{n}-t\right)^4\right|dt$$

Если посмотреть на подынтегральную функцию, можно заметить, что когда *t* примет значение верхнего предела интегрирования, первообразная обратится в нуль, следовательно, можно упростить вычисление интеграла, взяв значение *t* по максимуму — $t=o$. Тогда получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{1/n}\left|u_n(t)-u(t)\right|^2dt\le\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{1/n}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Таким образом, первое условие выполняется. Теперь проверим выполнимость второго условия (3). При этом учтём, что рассматривается случай, когда *A = 0*.

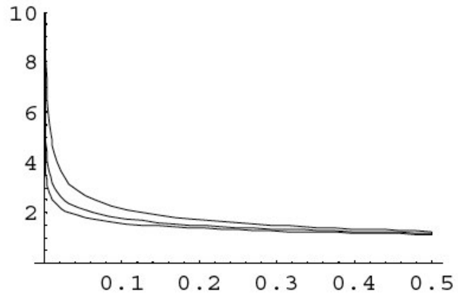

Рис. 3. Вид графиков функции $u(t) = \tilde{N}t^{-A}$
при $0 < \mathrm{Re}\,A < 1/2$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b \left|Lu_n(t) - 0\right|^2 dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^b \left|tu_n'(t) - Au_n(t)\right|^2 dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n}\left|t\left(-n^2\left(t-\frac{1}{n}\right)^2+1\right)'\right|^2 dt + \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^b \left|t\cdot 1'\right|^2 dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4n^4 \int_0^{1/n}\left|t^4 - \frac{2t^3}{n} + \frac{t^2}{n^2}\right| dt$$

Для вычисления последнего предела воспользуемся системой компьютерной математики Mathematica 4.1.

Limit[Int[(t 4–2t 3/n+t 2/n 2), {t, 0 1/n}], n → ∞] 0

Итак, получаем, что условия (3) — (4) выполняются, следовательно, $u(t) = \tilde{N}t^{-A}$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda = is$. Тем самым показано, что *A = 0* принадлежит точечному спектру.

Подберём последовательность функций $u_n(t)$ таким образом, чтобы все они для различных значений *A* (Re *A* < 1/2) удовлетворяли условиям (3) — (4) с той целью, чтобы показать, что точечный спектр располагается в комплексной плоскости, удовлетворяющей условию Re *A* < 1/2.

Если посмотреть на график получающейся функции $u(t) = \tilde{N}t^{-A}$, где 0 < Re *A* < 1/2, то можно увидеть, что он бесконечно растёт. На рис. 3 изображён вид графиков функции *u (t)*, полученных при их построении в Mathematica 4.1, в зависимости от значений действительной части *A* (в дальнейших рассуждениях полагаем $A \in R$).

A1=1/4; A2=1/3; A3=1/5;
Plot[{t (-A1), t (-A2), t (-A3)}, {t,0,0.5}, PlotRange → {0, 10}].

Ясно, что необходимо подобрать последовательность функций $u_n(t)$ так, чтобы их графики имели следующий вид:

Функции $u_n(t)$ подбираем таким образом, чтобы их значения совпадали со значением функции *u (t)* при значениях $t > \frac{1}{n}$, $u_n(0) = 0$, чтобы совпадали значения функций *u (t)* и $u_n(t)$ в точке $t = \frac{1}{n}$, а также совпадали значения их производных в этой точке, т.е.

$$u_n(0) = 0, \quad u\left(\text{если}\right)\ u_n\left(\frac{1}{n}\right), \quad u'\left(\frac{1}{n}\right) = u_n'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, как если сказано выше, должны выполняться условия (4) для постро-

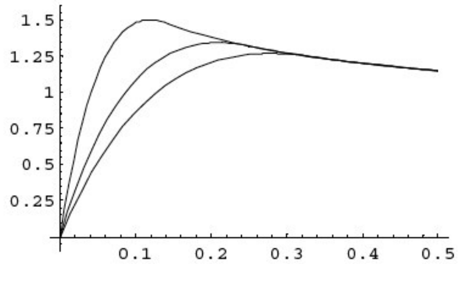

Рис. 4. Вид графиков функции $u_n(t)$

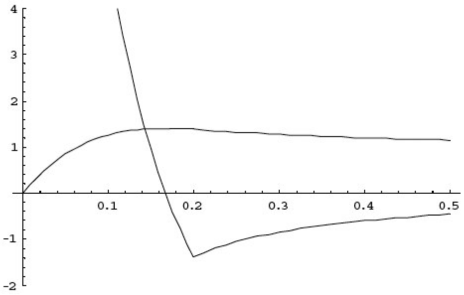

Рис. 5. График подобранной функции $u_n(t)$ и её производной при А = 1/5 и t = 1/5

енных функций $u_n(t)$. Ясно, что значения этих функций на промежутке

$\frac{1}{n} \le t < b$ совпадёт с самой функцией *u (t).*

Таким образом, в ходе работы над поставленной задачей отталкиваемся от того, что организуем активный поиск решения выдвинутых в обучении задач под руководством педагога. В этом случае процесс мышления активизируется, приобретает продуктивный характер, но при этом он направляется и контролируется педагогом и самими студентами.

Рациональным способом осуществлять подбор функций $u_n(t)$ на промежутке $0 \le t \le b$ является использование системы компьютерной математики Mathematica 4.1, поскольку с её помощью можно опустить всю рутинную работу по подсчёту значений подбираемой функции. Так, может быть получен следующий результат:

A: = 1/5; n: = 5; u[t_] = t (-A);
v [t_] = Exp[1+A-n*t-A*n*t]*t*n (A+1).

Проверка выполнения условия

$$u\left(\frac{1}{n}\right) = u_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

u[1/n]==v[1/n]//PowerExpand

Проверка выполнения условия

$$u'\left(\frac{1}{n}\right) = u_n'\left(\frac{1}{n}\right).$$

u'[1/n]==v'[1/n]//PowerExpand//FullSimplify

Построение графика функции $u_n(t)$.
Plot[{v[t], v'[t]}, {t, 0, 1/n}, DisplayFunction → Identity];
Plot[{u[t], u'[t]}, {t, 1/n, 0.5}, DisplayFunction → Identity];
Show[%,%%, DisplayFunction → $Display Function,
PlotRange → {-2,4}]

Тогда последовательность функций может выглядеть следующим образом:

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{-A}, \text{ если } \frac{1}{n} \le t \le b, \\ e^{1+A-nt-Ant} n^{1+A} t, \text{ если } 0 \le t \le \frac{1}{n}. \end{cases} \qquad (^*)$$

Из задания функций $u_n(t)$ следует, что $u_n(0) = 0$. Поэтому далее проверяем выполнение условий (3). Для этого проведём оценку пределов.

$$\lim_{n\to\infty} \left| u_n - u \right| = \lim_{n\to\infty} \int_0^b \left| u_n(t) - u(t) \right|^2 dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{1/n} \left| e^{1+A-nt-Ant} n^{1+A} t - t^{-A} \right|^2 dt + \right.$$

$$\left. + \int_{1/n}^b \left| t^{-A} - t^{-A} \right|^2 dt \right).$$

Как видно, интеграл при

$\frac{1}{n} \le t \le b$ обращается в нуль, а для вычисления интеграла при

$0 \le t \le \frac{1}{n}$ воспользуемся формулой, известной из курса элементарной математики: $(a-b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.

Получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n - u\right| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\left(2\int_0^{1/n}\left|e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t\right|^2dt + 2\int_0^{1/n}\left|t^{-A}\right|^2dt\right).$$

Далее учитываем, что

$\left|e^{1+A-nt-Ant}\right|^2 = e^{2+2\,\mathrm{Re}(A-nt-Ant)}$,

$|abc| = |a|\cdot|b|\cdot|c|$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\int_0^{1/n}\left|e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t\right|^2dt + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{1/n}\left|t^{-A}\right|^2dt\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\int_0^{1/n}e^{2+2}\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\int_0^{1/n}e^{2+2\,\mathrm{Re}(A-nt-Ant)}n^{2+2A}t^2dt + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{1/n}t^{-2A}dt\right)$$

Так как степень экспоненты достигает максимального значения при

$t=0,\ A=\dfrac{1}{2}$, то далее имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\int_0^{1/n}e^{2+2\,\mathrm{Re}(A-nt-Ant)}n^{2+2A}t^2dt + 2\int_{1/n}^{b}t^{-2A}dt\right)\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left(2e^3\int_0^{1/n}n^{2+2A}t^2dt+2\int_0^{1/n}t^{-2A}dt\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2e^3n^{2+2A}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{n}}+2\left.\frac{t^{-2A+1}}{-2A+1}\right|_0^{\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2e^3n^{2+2A}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3}+2\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{-2A+1}}{-2A+1}\right)=0$$

При вычислении последнего предела мы учли, что $0<\mathrm{Re}\,A<1/2$. Нам осталось показать, что выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left|Lu_n - f\right| = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|Lu_n-f\right| = \lim_{n\to\infty}\int_0^b\left|tu_n'(t)-Au_n(t)-0\right|^2dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1/n}\left|t(e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t)'-\right.\right.$$

$$\left.\left.-Ae^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t\right|^2dt+\int_{1/n}^b\left|t(t^{-A})'-At^{-A}\right|^2dt\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1/n}\left|t(e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}+\right.\right.$$

$$+(-n-An)e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t)-$$

$$\left.\left.-Ae^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t\right|^2dt\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n}\left|(1-A)n^{1+A}e^{1+A-nt-Ant}t-\right.$$

$$\left.-(n+An)e^{1+A-nt-Ant}n^{1+A}t^2\right|dt\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}2e^3\int_0^{1/n}\left((1-A)^2n^{2+2A}t^2+\right.$$

$$\left.+(n+An)^2n^{2+2A}t^4\right)dt.$$

Вычислив последний интеграл и взяв предел полученного выражения при $n \to \infty$ и $0 < \operatorname{Re} A < 1/2$, получим нуль. Поэтому делаем вывод о том, что построенная последовательность функций $u_n(t)$, определяемая по формуле (*), является собственной функцией рассматриваемой задачи, соответствующей собственному значению $\lambda = is - A$, $0 < \operatorname{Re} A < 1/2$.

В качестве самостоятельной работы студентам предлагается проверить, будет ли функция $u_n(t)$ собственной функцией в том случае, если A — комплексное число, что способствует переносу имеющихся у студентов знаний, умений и навыков в новые условия.

В работе со студентами мы определяем уровень их реальных учебных возможностей, учитываем необходимость организации процесса учения в зоне ближайшего развития, тем самым обеспечивая доступность обучения. Учитывая, что в развитии личности при обучении важнейшим компонентом является не только усвоение знаний, но и овладение процессом, способами и средствами деятельности, мы строим преподавание курса по выбору таким образом, чтобы помочь студентам усовершенствовать способы их мыслительной деятельности и сформировать у них практические умения по решению предлагаемых им задач. Такая работа способствует выработке прочности, осознанности и действенности знаний и умений студентов, их активности и самостоятельности в обучении, образованию в их сознании межсистемных ассоциаций.

Таким образом, современные информационные технологии позволяют по-новому решать проблемы организации образовательного процесса в высшей школе.