Татьяна Ивановна Кузнецова, *доцент кафедры естественных наук, Центр международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидаи педагогических наук*

«СВЁРТЫВАНИЕ» МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ НА ПОДГОТОВИТЕЛЬНОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

Два направления — свёртывание информации и свёртывание рассуждений. В первом направлении важны: 1) обобщение, аналогия и т.п. и 2) использование целесообразных символических записей, невозможных без знания элементов теории множеств и элементов математической логики. Во втором направлении важно сохранение методологической строгости (отсутствие методологических ошибок). При этом особое внимание уделяется ответственности авторов за конструирование популяризованных текстов, поскольку такие тексты это канва, которую по необходимости можно «расшить» полным содержанием рассматриваемого вопроса.

Процесс развития математики, процесс усовершенствования её изложения сопровождается свёртыванием информации, сокращением пути её передачи потомкам. Один из самых великих свёртывальщиков Виет, который стал обозначать переменные и параметры, участвующие в задаче, не словами, в буквами.

Свёрнутость информации. Первое направление сворачивания информации, о котором чаще всего говорится в литературе, это усовершенствование соответствующих записей. Особое место отводится ему в работе с иностранными студентами. Так, в [1], где обсуждается обучение математике китайских студентов в период их предвузовской подготовки, читаем: «Не менее важную роль в формировании математических знаний играют символические записи математических утверждений, посредством которых в компактной и обозреваемой форме задаётся смысл этих утверждений. Простота восприятия символических записей достигается за счёт свёрнутости суждений, выраженных знаками, по сравнению с развёрнутыми словесными формулировками. Приведём пример записи определения предела функции в точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{?} ((\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq a)(| x - a |< \delta \Rightarrow | f(x) - b |) < \varepsilon .$$

Из этой записи видно, что знание кванторов общности и существования позволяет коротко и организованно записать некоторые определения (см. [2, с. 131 132]). Их знание и использование невозможно без освоения универсальнейших средств основ теории множеств и математической логики, преподавание которых мы осуществляем с использованием пособий [3] [5].

Укорачивание записей это хорошо, но главное направление сворачивания информации, по нашему мнению, все-таки смысловое. Примеры такого сворачивания приведены в нашей работе [2] (см., например, § 5 и § 9 гл. 4), где оно преподносится как важный элемент обзорности, средство для проявления всеобъемлемости**.** Отметим, что при этом происходит укрупнение отдельных структурных элементов информационного материала. Это особенно ярко проявляется на стадии заключительного повторения курса математики, когда несколько разделов школьной математики излагаются буквально за считанное число минут. Использование языков информатики дает дополнительные возможности для сворачивания информации, увеличивающие наглядность (см. блок-схемное представление, объединяющее в себе целую цепочку определений степеней, изучаемых в средней школе, от натуральных до рациональных [2, с. 186 188] или [6, с. 54 56]).

Свёртывание процесса математического рассуждения. Говоря о подробнейших доказательствах, нельзя не учитывать того, что в ходе обучения математике учащиеся приобретают способность к свёртыванию процесса математического рассуждения при решении задач и доказательстве теорем знакомого типа — об этом писали ещё известные русские методисты С.И. Шорох-Троцкий (в 1916 г.) и Ф.А. Эрн (в 1915 г.). Они отмечали, что «при многократном решении однотипных задач учащимися отдельные этапы мыслительного процесса сокращаются и перестают осознаваться, но когда нужно, учащийся может вернуться к полному развернутому рассуждению» (см. [7, с. 180 182]; а также [8, с. 291]).

Обратим внимание на свёрнутый характер изложения учебного материала в учебниках. Обучая учащихся самостоятельному изучению нового материала, необходимо научить их разворачивать материал до такой степени, чтобы каждый шаг в рассуждениях мог быть обоснован. Для примера поучительно рассмотреть доказательство предела, о котором мы уже говорили в задаче 2 п. 2.2 § 3 гл. 3, изложенное в учебном пособии для студентов подготовительных факультетов (см. пример 3 в [9, с. 16], а также задачу 2 в [2, с. 194 195]):

Доказать, что при $c > 1$ последовательность $(c^{1/n}) \to 1$ при $n \to \infty$, , а затем попытаться скрупулёзно развернуть его. А ведь именно это должен уметь как учитель, так и «заинтересованный» ученик.

В плане свёртывания и «развёртывания» изучаемого материала интересен пример 14 из [2, с. 142 143], где обсуждается «подводный камень», образовавшийся именно из-за свёртывания материала как в учебниках, так и в объяснениях преподавателя:

Пример. На экзамене учащийся в процессе вывода формул корней квадратного уравнения записал:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{\text{Ä}}{(2a)^2}} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\text{Ä}}}{2a},$$

выучив эту запись, например, по пособию [3, с. 88]. Учитель вправе спросить о том, какое преобразование сделал ученик, на что ученик ответил, что он сначала извлёк корень из дроби по соответствующему свойству корня из дроби (корень из дроби равен частному корней из числителя и знаменателя), а затем извлек корень из знаменателя. На вопрос учителя: «По какой формуле $\sqrt{(2a)^2}\quad 2a$?», учащийся ответил: «По формуле $\sqrt{(2a)^2}=|2a|=2|a|$ ». Однако учитель проявил недовольство, сказав, что это неверно, и напомнил верную формулу. Затем учитель объяснил, что $|a|$ может быть равным $+a$ или a, поэтому

$$\pm\sqrt{\frac{\text{Ä}}{(2a)^2}}=\pm\frac{\sqrt{\text{Ä}}}{\pm 2a}.$$

Перебрав все возможные четыре варианта, учитель пришёл к окончательному ответу, написанному учащимся. Настоящая ситуация является иллюстрацией выявления «подводных камней».

Одним из ярких примеров свёртывания доказательства является доказательство с помощью слова «очевидно». Остановимся подробнее на этой проблеме.

В руководстве к решению конкурсных задач [10] в разделе «Решения, указания» читаем: «Запишем очевидные соотношения» (см. с. 125, № 12.17). Это высказывание отражает одно из часто употребляемых значений слова «очевидно» это свёрнутость выкладок. Ясно, что невозможно, да и не нужно, всё досконально доказывать, однако абитуриенты должны понимать, что в определённых ситуациях (например, по просьбе экзаменатора на устном экзамене) они должны уметь это сделать.

Интересно обратиться к заявлению И.Ф. Шарыгина в доказательстве теоремы о единственности перпендикуляра (см. теорему 2.4 в [11, с. 39]) об очевидности и дальнейшему её пояснению, которое, по большому счёту, является всего лишь пояснением достоверности рассматриваемого факта. О доказательстве здесь и не может быть речи, поскольку оно возможно только после введения аксиом, а именно, аксиомы откладывания углов (см., например, аксиому VIII и теорему 8.5 в [12, с. 16, 18]).

Позднее (на с. 99) И.Ф. Шарыгин подтверждает наше мнение следующим образом: «Ведь мы начали доказывать без всяких объяснений, опираясь лишь на здравый смысл». Конечно, переход от такого изложения к аксиоматическому изложению геометрии, который необходим для дальнейшего обучения учащегося в высшей школе, встретит определённые трудности переучивания. С воспитательной, психологической, точки зрения этот акт достаточно серьёзен, поскольку подвергает сомнению тот «здравый смысл», на который уже привыкли полагаться учащиеся.

Итак, некоторые утверждения, которыми мы пользуемся, считаются нами сами собой разумеющимися и поэтому не доказываются либо потому, что кажутся очевидными (в смысле «достоверными»), либо потому, что их доказательство невозможно на рассматриваемом этапе развития учащихся, что, как правило, связано с недостатком необходимой теоретической базы, ограниченностью времени обучения, всеобщностью обучения и т. п. А.П. Киселёв об этой проблеме в геометрии сказал так: «Конечно, в школьной геометрии нельзя провести такое строгое изложение, которое возможно в чистой научной геометрии. В школьных курсах приходится очень многие предложения принимать за интуитивные истины (без доказательства) и, в частности, допускать наложение фигур и вообще их перемещёние, не перечисляя всех аксиом движения» (см. [13, с. 52 53]). Благодаря использованию элементов философской и математической логики стало возможным доказать некоторые из таких предложений, причём, как показывает наше исследование, стало возможным сами доказательства проводить на более высоком научном и методическом уровне.

Но надо опасаться очевидности методологической вольный переход от очевидной эквивалентности в смысле формальной логики в область логики развития науки, так или иначе воспроизводимую в учебном процессе, в последовательности изложения материала, очень опасен. Пример тому («вольное» обращение с эквивалентностью равенства отрезков и равенства их длин) рассмотрен нами в гл. 2 [2] и объяснён там же в примере 4 п. 3.9.1 § 3 гл. 3. Таким образом, истории, подобные истории Лобачевского, повторяются — оказывается, здравый смысл не так-то прост — он многослоен и переход (особенно несознательный) с одного слоя на другой чреват опасными последствиями.

Использование различных языков описания информации превращает рутинную работу по повторению когда-то изученного в средней школе материала в увлекательный творческий полет см., например, [2, с. 126 130] или [14], где предлагается описание решения уравнений и неравенств с модулями на семи языках словесном, табличном, теоретико-множественном, логическом, графическом, блок-схемном и алгоритмическом (БЭЙСИКе). Заметим, что использование элементов информатики не только увеличивает наглядность представления решения задачи, но иногда и укорачивает практический путь к результату (см., например, вычисление приближений числа *e* в [2, с. 195 196] или в [6, с. 62 63]).

Популяризация специфическое свёртывание информации, особо деликатная демонстрация-свёртка развития мысли, поэтому очень важно при этом не сделать ошибок как математических, так и (главное) методологических! [2, с. 265–267]). В связи с этим остановимся на особенностях использовании в математических рассуждениях слова «следовательно» как отмечают философы, оно должно быть жестко связано с методологическим понятием, впервые встречающимся в процессе преподавания математики, с понятием «обоснование», или «доказательство» (см. [15, с. 125 127]). Обращаем внимание на то, что слово «следовательно», впрочем, так же, как и его синонимы «значит», «поэтому», атрибуты не индуктивных рассуждений, а исключительно дедуктивных.

К сожалению, в некоторых учебных пособиях слово «следовательно» используется довольно вольно. Например, в вводном курсе математики [16] на с. 23 в самом начале Занятия 3 читаем:

«12 : 4 = 3; частное 12 : 4 это натуральное число ($3 \in \mathbf{N}$). Следовательно, 12 **делится на** 4».

И только потом предъявляется опре-деление:

«Если *a* и *b* натуральные числа и *a* : *b* натуральное число, то *a* делится на *b*».

Налицо нарушение причинных связей.

Более серьезное нарушение видим далее в конце того же Занятия 3:

«Найдем НОД и НОК чисел 14 и 15.

НОД (14 ; 15) = 1 ; НОК (14 ; 15) = 2 × б 7 × б 3 × б 5 = 14 × б 15 = 210.

Следовательно, если числа *a* и *b* взаимно простые, то

НОД (*a*; *b*) = 1, НОК (*a*; *b*) = *a* × б *b* » (с. 26).

Ясно, что здесь на основании одного случая делается обобщение используется неполная индукция. Поскольку мы преподаем по этому пособию, то вынуждены просить учащихся заменить слово «Следовательно» на выражение «Вообще, можно доказать, что».

По поводу этих примеров следует сказать, что, конечно, все утверждения, участвующие в них, верные, поэтому кто-то может сказать, что ничего страшного. Однако мы должны учить своих учеников мыслить, и мыслить правильно, а ведь в рассуждениях слова-связки, каковыми и являются рассматриваемые слова, играют ключевую роль именно они определяют характер логической операции (см., например, [4, с. 8 16]). Интересно, что оба рассматриваемых пособия [16], [4] написаны одним автором.

Считаем, что следует обратить внимание и на одну ситуацию, связанную с пособием по планиметрии [17] для иностранных студентов, учащихся на подготовительном факультете университета . На с. 13 приведена аксиома, известная под названием «аксиома полуплоскостей с общей границей». Это сделано следующим образом:

«Аксиома IV. Любая прямая на плоскости делит плоскость на две части две полуплоскости».

На этом формулировка заканчивается и дальше начинается, как мы понимаем, толкование различных расположений точек, в том числе и толкование взаимного расположения двух точек:

«Две точки (например, точки *A* и *B*) лежат в одной полуплоскости (относительно прямой *a*), если отрезок, который их соединяет, не пересекает границу *a.* Отрезок *CD* пересекает прямую *a*, значит точки *C* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой».

Дело в том, что в аннотации к этому пособию автор отмечает:

«В предлагаемый лекционный курс включены главным образом базовые разделы планиметрии. Поскольку данный курс является все же повторительным, скрупулезная строгость в изложении материала скорее отсутствует, и, хотя стиль аксиоматического подхода в целом сохранен, традиционная систематичность изложения в отдельных местах нарушается».

Известно, что написание популярной и справочной литературы для школьников, а тем более для абитуриентов одно из самых сложных дел, поэтому в центральных издательствах (например, в Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука») редактирование такой литературы доверялось только самым опытным и добросовестным научным редакторам. Какое главное требование предъявляется к таким изданиям? Конечно, это отсутствие ошибок, логических и методологических в том числе.

Вернёмся к приведённой цитате. Во-первых, отметим, она не соответствует ни одному из известных школьных отечественных учебников геометрии см., например, у А.В. Погорелова [18, с. 8], у Л.С. Атанасяна и др. [19, с. 290], у А.Д. Александрова и др. [20, с. 382], у А.Л. Вернера и др. [21, с. 18], у И.Ф. Шарыгина [11, с. 31]. Во-вторых и в главных, — автор использовал связку «значит»! Однако здесь нет дедуктивного рассуждения, доказательства. Его и не должно быть, поскольку здесь налицо толкование, по большому счёту, толкование аксиомы, или, точнее сказать, второй части аксиомы IV —см., например, в нашем пособии [12] на с. 8:

«**Аксиома IV** (аксиома полуплос-костей с общей границей). Прямая делит плоскость на две части *полуплоскости*. Если концы отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

Эта прямая называется *границей* полуплоскостей».

Ясно, что автор сделал ошибку перепутал понятие «обоснование» с понятием «разъяснение», или «объяснение». Известно, что последние понятия тоже методологические и тоже впервые встречаются именно в процессе преподавания математики. Поэтому эти понятия «требуют в математике если даже и не могут быть точно определены по необходимости точного употребления» (см. [22, с. 125]). Ни у кого не вызывает сомнений убеждение философов в том, что «ученикам необходимо постоянно внушать и это не превысит возможностей даже самых маленьких, что объяснить это значит рассказать о том, *как* это делается, а обосновать означает объяснить, *почему* это делается так, а не иначе. Таким образом, ученики постепенно начинают понимать, что в познании важно продвинуться от понимания явлений к пониманию причинных связей, лежащих в их основе и, наконец, к пониманию закономерностей. Тем самым создается важная предпосылка для формирования научного мировоззрения» (см. там же, с. 126). Чтобы убедиться, как можно без особого мудрствования и без ошибок разъяснить рассматриваемый материал, достаточно заглянуть, например, в учебное пособие по геометрии для 7 класса общеобразовательных учреждений А.Л. Вернера и др. [21, с. 18].

ЛИТЕРАТУРА

1 *Лазарева Е.А., Вуколова Т.М.* Проблема обучения математике китайских студентов в период их предвузовской подготовки // Вестник ЦМО МГУ, ч. 3, 1999, № 2, с.?87 – 92.

2. *Кузнецова Т.И.* Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. М.: КомКнига, 2005. 480 с. (Серия «Психология, педагогика, технология обучения»).

3. *Лазарева Е.А., Пацей И.П.* Алгебра и элементарные функции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 136 с.

4. *Лазарева Е.А.* Элементы математической логики: Пособие по математике для студентов-иностранцев. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 61 с.

5. *Никольская И..Л.* Знакомство с математической логикой. М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998. 128 с.

6. *Кузнецова Т.И.* Методика использования информатики для активизации усвоения математического материала в предвузовском образовании // Вестник ЦМО МГУ, ч. 3, 1999, № 2, с. 54–86.

7. *Гетманова А.Д.* Логика: Учебник для студ. пед. вузов. М.: Высш. шк., 1986. 288?с.

8. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей. М.: Просве-щение, 1968. 432 с.

9. *Зверев Н.И., Холин Н.Н., Дмитриева Н.А.* Предел. Производная. Интеграл. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 115 с.

10. *Процко С.В., Азаров А.И., Федосенко В.С.* Руководство к решению конкурсных задач по математике: Справ. пособие. 3-е доп. и испр. изд. Мн.: ТетраСистемс, 1999. 208 с.

11. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. 5-е стереотип. изд. М.: Дрофа, 2001. 368 с.

12. *Кузнецова Т.И., Грибков И.В.* Геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 108 с.

13. *Киселев А.П.* Элементарная геометрия: Книга для учителя. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. 287 с.

14. *Антипов И.Н., Кузнецова Т.И., Петрова М.А.* Интеграция математики и информатики на практических работах с использованием функции модуля // Вестник ЦМО МГУ, ч. 3, 2002, № 4, с. 35–55.

15. Философы педагогам. Форми-рование научного мировоззрения в процессе преподавания естественных и математических дисциплин в средней школе / Пер. с нем. Ю.С. Лебедева; Под общей ред. В.В. Кумарина. М.: Прогресс, 1976. 220 с.

16. *Зверев Н.И., Лазарева Е.А., Олесинова М.М.* Математика. Вводный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 92 с.

17. *Лакоба И.С.* Лекции по планиметрии (в помощь иностранным студентам). М.: Ред.- Изд. Совет МОЦ МГ, 2004. 174 с.

18. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебник для 7 11 классов общеобразоват. учреждений. 8-е изд. М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 1998. 383 с.; 10-е изд. 2000. 383 с.

19. Геометрия: Учебник для 7 9 кл. общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 10-е изд. М.: Просвещение, 2000. 335 с.

20. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия для 8 9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М.: Просвещение, 1991. 415 с.

21. *Вернер А.Л. и др.* Геометрия: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. М.: Просвещение, 1999. 192 с.

22. *Икрамов Дж.* Математическая культура школьника: Методические аспекты проблемы развития мышления и языка школьников при обучении математике. Ташкент: Укитувчи, 1981. 278 с.