Красота методов решения математических задач

Ирина Асланян,
*учительница высшей категории средней общеобразовательной школы №1 Предгорного района Ставропольского края,
старший преподаватель кафедры математики Пятигорского государственного технологического университета*

Завершаем публикацию материалов для занятий по математике в предпрофильном 9-м классе. Цель таких занятий — повысить интерес к предмету, помочь учащимся выбрать математический профиль в 10-м классе. Этот материал можно использовать на факультативных занятиях или во внеклассной работе по математике. Начало публикации — «СШ». № 1–3. 2008 г.

Занятие 15

Теорема Пифагора

«Геометрия обладает двумя великими сокровищами. Первое — это теорема Пифагора, второе — деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Первое можно сравнить с мерой золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571–1630)

Историческая справка. Как это довольно часто случается в любой науке, формулировка теоремы была известна за 1200 лет до Пифагора в Китае и Индии, но именно этот древний учёный первым предложил её доказательство, и в его честь она названа. Ещё за 2000 лет до н. э. египтяне знали, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный. Этим свойством они, вероятно, пользовались при сооружении прямых углов у зданий.

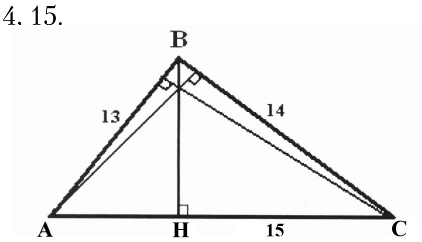
В настоящее время существует около ста способов доказательства теоремы Пифагора. Чертёж в одном из способов доказательства, основанном на достраивании на сторонах треугольника квадратов, в шутку называют «пифагоровы штаны». В течение долгого времени это доказательство считалось наиболее удачным, при этом не одно поколение школяров распевало стишки: «Пифагоровы штаны во все стороны равны».

Эту теорему в разных странах и в разное время называли довольно оригинально. Как мы уже слышали, в средневековой Азии её называли теоремой невесты. Во Франции и некоторых областях Германии она называлась «мостом ослов».

Интересно, что открытая этим же учёным теорема о сумме углов треугольника не носит его имени.

Решим несколько задач с применением теоремы Пифагора.

1. Найти меньшую высоту треугольника, стороны которого равны 13, 14. 15.



Решение:

1-й способ. Меньшая высота проведена к большей стороне треугольника. Пусть $AH = x$, тогда $HC= 15 - x$. По теореме Пифагора из треугольника ABH получим $BH^2 = 13^2 - x^2$, а из треугольника BCH:

$$BH^2 = 14^2 - (15 - x)^2.$$

Приравняем правые части полученных выражений:

$$13^2 - x^2 = 14^2 - (15 - x)^2;$$
$$169 - x^2 = 196 - 225 + 30x - x^2;$$
$$30x = 169 - 196 + 225;$$
$$30x = 198;$$
$$x = 6{,}6.$$

Значит, $BH^2 = 13^2 - 6{,}6^2$,

$$BH^2 = 169 - 43{,}56,$$
$$BH^2 = 124{,}44,$$
$$BH = 11{,}2.$$

2-й способ. По формуле Герона

$$S_{тр} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = 0{,}5(a + b + c)$.

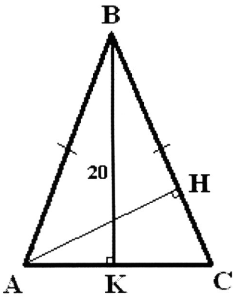
$$p = 0{,}5(13 + 14 + 15) = 21.$$

$$S_{тр} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$$
$$= \sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \sqrt{3\cdot 7\cdot 4\cdot 3\cdot 7\cdot 4} =$$
$$= 7\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 84.$$

По другой формуле $S_{тр} = 0{,}5ah$, откуда $h = \dfrac{S_{тр}}{a}$. Значит, $h = \dfrac{168}{15}$, $h = 11{,}2$.

Ответ: 11,2.

2. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 м, а высота, проведённая к основанию, — 20 м. Найти высоту, опущенную на боковую сторону.



Решение:

В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является биссектрисой и медианой. Поэтому $KC = 15$ м. Тогда по теореме Пифагора $BC^2 = BK^2 + KC^2$, $BC = \sqrt{20^2 + 15^2}$, $BC = 25$ м.

Найдём площадь данного треугольника по формуле $S_{тр} = 0{,}5ah$ сначала через основание, потом через боковую сторону.

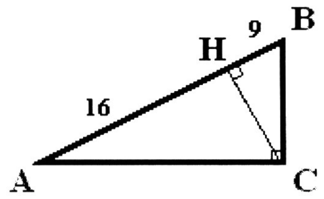
$S_{тр} = 0{,}5BK\cdot AC = 0{,}5\cdot 20\cdot 30 = 300$ м^2.

$$S_{тр} = 0{,}5AH\cdot BC,\quad AH = \frac{2S_{тр}}{BC},$$

$$AH = \frac{2S_{тр}}{BC},\quad AH = \frac{600}{25} = 24 \text{ м}.$$

Ответ: 24 м

3. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH, разделившая сторону AB на части 16 см и 9 см. Найти: высоту CH, стороны AC и BC.



Решение:

Пусть $CH = x$, тогда по теореме Пифагора $BC^2 = CH^2 + BH^2$,

$AC^2 = CH^2 + AH^2, AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Учитывая, что $BC^2 = 9^2 + x^2$, $AC^2 = 16^2 + x^2$, $AB = 16 + 9 = 25$, получаем уравнение:

$81 + x^2 + 256 + x^2 = 625,$

$2x^2 = 625 - 81 - 256,$

$2x^2 = 288,$

$x^2 = 144,$

$x = 12.$

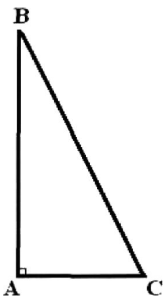
Таким образом, $CH = 12$ см,

$$AC = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ см.}$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ см.}$$

Ответ: $CH = 12$ см, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см.

4. Площадь прямоугольного треугольника ABC равна 6 см^2. Найти стороны этого треугольника, если они образуют арифметическую прогрессию.



Решение:

Пусть наименьшая из сторон данного треугольника равна $AC = x$. Тогда две другие будут равны: $AB = x + k$ и $BC = x + 2k$, где k — разность арифметической прогрессии ($k > 0$). Воспользуемся теоремой Пифагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$ и формулой площади прямоугольного треугольника $S_{тр} = 0{,}5AB{\cdot}AC$. В результате получим систему уравнений:

$0{,}5x(x + k) = 6,$

$x^2 + (x + k)^2 = (x + 2k)^2$

$x(x + k) = 12$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 = x^2 + 4kx + 4k^2;$

$$x + k = \frac{12}{x},$$

$x^2 - 2kx - 3k^2 = 0;$

$$k = \frac{12}{x - x},$$

$x^2 - 2kx - 3k^2 = 0.$

Подставим выражение для k во второе уравнение системы и решим его отдельно:

$$x^2 - 2x\left(\frac{12}{x} - x\right) - 3\left(\frac{12}{x} - x^2\right) = 0,$$

$$x^2 - 24 + 2x^2 - 3\left(\frac{144}{x^2} - 24 + x^2\right) = 0,$$

$$3x^2 - 24 - \frac{432}{x^2} + 72 - 3x^2 = 0,$$

$$\frac{432}{x^2} = 48,$$

$x^2 = 9,$

$x = \pm 3.$

По смыслу задачи $x > 0$, поэтому $x = 3$.

Тогда, учитывая первое уравнение системы, получаем: $k = \frac{12}{3} - 3 = 1$.

Значит, наименьшая из сторон данного треугольника равна 3, а каждая последующая на 1 больше, то есть 4 и 5.

Ответ: 3, 4, 5.

Вопрос на дом. Кто открыл формулу Герона?

Ответ. По арабскому преданию, известную нам формулу для вычисления площади треугольника открыл Архимед.

Занятие 16.

Геометрические задачи из текстов ЕГЭ

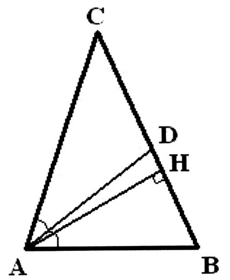
«Легче остановить Солнце, легче сдвинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике и свести параллели к схождению».

Советский математик В.Ф. Каган (1869–1953)

Историческая справка. Значение геометрии в развитии человека очень велико. Эта древняя наука развивает логическое и пространственное мышления, чёткость и лаконичность рассуждений, приучает грамотно строить чертежи. Всё это, несомненно, пригодится не только в профессиональной, но и в повседневной деятельности каждому человеку. Кроме всего прочего, знание геометрии объясняет многое в природе. Например, немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571–1630) говорил: «Геометрия есть прообраз красоты мира». Но не только математики указывали на красоту геометрических заданий и значение геометрии. Великий русский поэт Александр Сергеевич Пушкин писал, что «вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии». В древности на здании академии Платона (427–347 г.г. до н.э.) была надпись: «Не знающий геометрии сюда да не входит», которая ясно указывала на огромную роль, отводимую этой науке руководством академии.

Решение задач.

1. В треугольнике ABC угол α равен 84°, угол β — 76°. Найти (в градусах) угол между биссектрисой угла а и высотой, опущенной на BC.

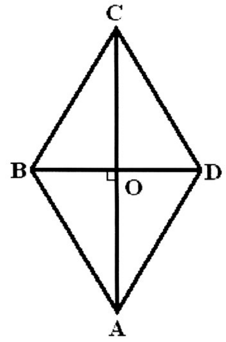


Решение:

Пусть AH — высота, опущенная на сторону BC, AD — биссектриса угла A. Тогда $\angle BAD = 42°$, а по условию $\angle B = 76°$, значит, $\angle ADB = 180° - (42° + 76°) = 62°$ (по теореме о сумме углов треугольника). Поскольку треугольник HAD — прямоугольный, то $\angle HAD = 90° - 62° = 28°$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника).

Ответ: 28°.

2. Периметр ромба 68 см, длина одной из диагоналей равна 30 см. Найти (в см) длину другой диагонали ромба.



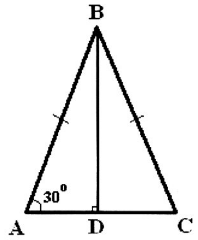
Решение:

Так как по условию периметр ромба равен 68 см, то длина стороны $AB = 68 : 4 = 17$ см. Пусть одна из диагоналей $AC = 30$ см, тогда $AO = 15$ см (по свойству диагоналей ромба). По этому же свойству $BO \perp AO$, тогда по теореме Пифагора $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2}$, $BO = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ см.

Значит, вся диагональ BD в два раза больше, то есть равна 16 см.

Ответ: 16 см.

3. Площадь равнобедренного треугольника равна $25\sqrt{3}$ см^2, угол при основании равен 30°. Найти (в сантиметрах) длину боковой стороны этого треугольника.



Решение:

Пусть боковая сторона треугольника ABC $AB = x$, тогда высота этого треугольника, расположенная в прямоугольном треугольнике ABD против угла в 30°, будет равна:

$BD = \frac{1}{2x}$. В этом случае по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Поскольку высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является медианой, то $2AD = x\sqrt{3}$. В результате по формуле площади треугольника

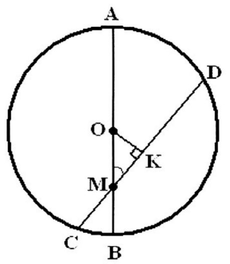
$S_{тр} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$ получим выражение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x \cdot x\sqrt{3}$, или $x^2\sqrt{\frac{3}{4}}$, которое по условию равно $25\sqrt{3}$.

Из уравнения $x^2\sqrt{\frac{3}{4}} = 25\sqrt{3}$

находим, что $x = 10$.

Ответ: 10 см.

4. В окружности хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка длиной 4 и 16 см. Найти в сантиметрах расстояние от центра окружности до хорды.



Решение:

Так как BM = 4 см, AM = 16 см, то диаметр окружности равен 20 см, следовательно, радиус $OA = OB$ = 10 см. Тогда OM = 6 см. В треугольнике OKM (OK — серединный перпендикуляр к хорде) $OK = \frac{1}{2} OM$. OM = 3 см по свойству стороны, лежащей против угла в 30° в прямоугольном треугольнике.

Ответ: 3 см.

5. В выпуклом пятиугольнике величины углов относятся, как 2:3:4:5:6. Найти в градусах величину большего из углов.

Решение.

Сумму углов выпуклого многоугольника найдём по формуле

$$\sum = 180°(n - 2).$$

Так как n = 5, то 180°(5 – 2) = 540°. Получим уравнение $2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 540$, где x — коэффициент пропорциональности. Отсюда $20x$ = 540, x = 27. Тогда наибольший из углов равен: 6·27 = 162°.

Ответ: 162°.

Вопрос на дом. Кто впервые открыл математическую теорию музыки?

Ответ. Пифагор.

Занятие 17.

Последнее занятие целесообразно посвятить подведению итогов занятий, вспомнить рассмотренные в течение курса темы, решение наиболее сложных заданий. Можно ознакомить учеников с некоторыми математическими играми, головоломками, загадками, занимательными задачами. Задания приносят сами учащиеся по своему усмотрению либо в виде маленького доклада, либо в виде устного сообщения. Таким образом, цикл занятий заканчивается самостоятельной деятельностью детей. По результатам **элективного курса учащимся выставляется зачёт.**

На этом же занятии выпускникам предлагается краткая заочная экскурсия по ведущим вузам региона, в которых математика является профилирующим предметом. При этом отдельно рассматриваются те специальности, где базовый курс математики изучается не менее двух лет.