Предпрофильный курс «Красота методов решения математических задач»

Ирина Асланян,
учительница высшей категории средней общеобразовательной школы №1 станицы Ессентукской, старший преподаватель кафедры математики Пятигорского государственного технологического университета

Продолжаем знакомить вас с программой и содержанием занятий по математике в 9-м классе, которые разработаны учительницей из Ставрополья. Цель таких занятий — показать красоту математики, повысить интерес к предмету, настроить учащихся на выбор математического профиля в 10-м классе. Этот материал можно использовать на факультативных занятиях или во внеклассной работе по математике.
Начало публикации — «СШ». № 1, 2. 2008 г.

Замена переменной в неравенствах

Занятие 13.

«Мыслить мыслимое — вот цель математика».
Американский математик *К. Дж. Кайзер* (1862–1947)

Историческая справка. В истории любой науки сохранились имена некоторых талантливых учёных, которые смогли бы добиться намного больших результатов, сложись их жизнь менее трагично. Назовём лишь двоих из их числа.

В Королевском парке в Осло стоит скульптура сказочного юноши, попирающего двух поверженных чудовищ. Это памятник Нильсу Генриху Абелю (1802–1829). Чудовища олицетворяют две важнейшие проблемы математики, которым посвятил свои исследования известный норвежский учёный: алгебраические уравнения пятой степени и эллиптические функции. В тот период в Норвегии ещё не было учёных, способных оценить значение трудов Абеля. Лишь за два года до смерти к работам учёного пришло признание. Всего 27 лет прожил норвежский учёный, постоянно нуждаясь в средствах и не находя на родине достойной работы.

Так же трагична и судьба французского математика Эвариста Галуа (1811–1832). Его математические работы занимают чуть более 60 страниц, но обессмертили его имя на века. Он прожил двадцать лет (убит на дуэли), всего пять из них занимался математикой. Его работы содержали окончательное решение проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Сегодня это одна из глав алгебры, названная теорией Галуа.

Можно только догадываться, сколько новых гениальных открытий могли бы совершить эти учёные, если бы их жизни не оборвались так рано.

Решить неравенства.

1) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$.

Решение:

Заметим, что в скобках повторяется выражение $x^2 + 3x$, поэтому сделаем замену: $x^2 + 3x = t$. Тогда неравенство примет вид $(t + 1)(t - 3) \geq 5$. Раскроем скобки:

$t^2 + t - 3t - 3 \geq 5$ или $t^2 - 2t - 8 \geq 0$.

Поскольку 4 и −2 — корни уравнения $t^2 - 2t - 8 = 0$, то последнее неравенство можно представить в виде $(t - 4)(t + 2) \geq 0$. Решение этого неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -2]\cup[4; +\infty)$. Чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, представим полученный ответ в виде совокупности неравенств:

$$\left[\begin{aligned}&x^2+3x\leq -2,\\&x^2+3x\geq 4;\end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{aligned}&x^2+3x+2\leq 0,\\&x^2+3x-4\geq 0.\end{aligned}\right.$$

Решим отдельно каждое из неравенств. Первое неравенство можно представить в виде $(x + 1)(x + 2) \leq 0$. Его решение — отрезок $[-2; -1]$. Так как числа −4 и 1 являются корнями уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$, то второе неравенство представимо в виде $(x + 4)(x - 1) \geq 0$. Его решение — $(-\infty; -4] \cup [1; +\cup)$. Объединяя решения обоих неравенств, получаем ответ.

Ответ: $(-\infty; -4]\cup[-2; -1]\cup[1; +\infty)$.

2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \leq 48$.

Решение:

• Обратите внимание учащихся на тот факт, что приём, применённый к этому неравенству, можно использовать и при решении подобных уравнений.

Сгруппируем множители попарно: первое с последним и второе с третьим:

$(x^2 + 3x)(x^2 + x + 2x + 2) \leq 48$ или $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) \leq 48$. Выполним замену $x^2 + 3x = t$. Тогда неравенство принимает вид $t(t + 2) \leq 48$ или $t^2 + 2t - 48 \leq 0$. Решая последнее неравенство методом интервалов, получим: $t \in [-8; 6]$. Возвратимся к переменной x:

$$\begin{cases}x^2+3x\geq -8,\\x^2+3x\leq 6;\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x^2+3x+8\geq 0,\\x^2+3x-6\leq 0.\end{cases}$$

Поскольку дискриминант уравнения $x^2 + 3x + 8 = 0$ отрицательный, то первое неравенство верно при всех $x \in R$. Для уравнения $x^2 + 3x - 6 = 0$ $D = 3^2 - 4(-6) = 9 + 24 = 33$. Значит, его корни имеют вид $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. Поэтому решение второго неравенства — отрезок $\left[\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right]$. В результате получаем, что решением всей системы неравенств является решение второго из неравенств.

Ответ: $\left[\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right]$.

• Обратите внимание учащихся на то, что в первом примере при возврате к переменной x была получена совокупность неравенств, а во втором — система. Необходимо провести чёткую параллель между знаком «$\cup$», союзом «или» и совокупностью. С другой стороны, эквивалентны знак «$\cap$», союз «и» и система уравнений или неравенств.

3) $\frac{1}{x(x+1)} \leq \frac{1}{2x^2+2x+3}$.

Решение:

В данном неравенстве одинаковые выражения первоначально не видны, поэтому сделаем преобразования:

$$\frac{1}{x^2+x} \le \frac{1}{2(x^2+x)+3}.$$

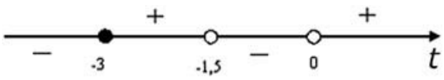
Теперь явно видна замена $x^2+x=t$. Неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{t} \le \frac{1}{2t+3};$$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2t+3} \le 0;$$

$$\frac{2t+3-t}{t(2t+3)} \le 0;$$

$$\frac{t+3}{t(t+1{,}5)} \le 0.$$



Ответ последнего неравенства имеет вид $t \in (-\infty; -3] \cup [-1{,}5; 0)$. Возвращаясь к переменной x, получим совокупность, включающую в себя систему неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x \le -3, \\ \begin{cases} x^2+x > -1{,}5, \\ x^2+x < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x^2+x+3 \le 0, \\ \begin{cases} x^2+x+1{,}5 > 0, \\ x^2+x < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности решения не имеет, так как дискриминант уравнения $x^2+x+3=0$ отрицательный и, следовательно, вся парабола $y=x^2+x+3$ расположена выше оси Ох. По той же причине первое неравенство системы верно для всех $x \in R$. Значит, решением всей совокупности является решение последнего из неравенств, то есть $x \in (-1; 0)$.

Ответ: $(-1;0)$.

4) $3x^2(x-4)^2 \le 32 - 5(x-2)^2$.

Решение:

В этом неравенстве, как и в предыдущем, сразу выполнить замену невозможно, поэтому вначале преобразуем его.

$$3x^2(x-4)^2 \le 32 - 5(x^2-4x+4);$$

$$3(x^4-8x^3+16x^2) \le 32-5(x^2-4x+4).$$

• Даже в таком виде одинаковая часть не выделилась, поэтому необходимо подсказать ученикам, что следует выполнить замену $x^2-4x=t$.

Заменим: $x^2-4x=t$, тогда после возведения обеих частей в квадрат получим $x^4-8x^3+16x^2=t^2$. Неравенство принимает вид $3t^2 \le 32-5(t+4)$ или $3t^2+5t-12 \le 0$. Решим соответствующее уравнение $3t^2+5t-12=0$. $D=52+4\cdot3\cdot12=$ $=25+144=169$. Тогда -3 и $\frac{1}{4}$ — корни уравнения. Значит, $t \in \left[-3; \frac{4}{3}\right]$.

Возвращаясь к переменной x, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x \ge -3, \\ x^2-4x \le \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0, \\ x^2-4x-\frac{4}{3} \le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство можно представить в виде $(x-1)(x-3) \ge 0$. Его решение: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. Для второго неравенства соответствующее уравнение $x^2-4x-\frac{4}{3}=0$ имеет дискриминант, равный $D=4^2+4\cdot\frac{4}{3}=16+\frac{16}{3}=\frac{64}{3}$. Корни уравнения имеют вид $\frac{4\pm8\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ или $2\pm4\sqrt{\frac{1}{3}}$. Чтобы избавиться от дроби под корнем, умножим числитель и знаменатель второй дроби на $\sqrt{3}$, получим $2\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Тогда решение второго неравенства принимает вид: $\left[2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\ 2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right]$. Пересечение ответов двух неравенств есть объединение множеств

$$\left[2-\frac{4\sqrt{3}}{3};\ 1\right]\cup\left[3;\ 2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right].$$

Ответ: $\left[2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\ 1\right]\cup\left[3{,}2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right].$

Вопрос на дом. Французский математик и физик Блез Паскаль (1623–1662) в раннем возрасте написал трактат по математике. Как назывался этот трактат и сколько лет было тогда учёному?

Ответ. В возрасте 12 лет Паскаль написал «Трактат о звуках».

Простейшие неравенства с модулями

Занятие 14.

«Много из математики не остаётся в памяти, но когда поймёшь её, тогда легко при случае вспомнить забытое».
Украинский математик
М.В. Остроградский (1801–1862)

Историческая справка. Сегодня мы поговорим о календаре. Нам совершенно естественно, что год делится на месяцы, а они в свою очередь на недели, дни, часы, минуты, секунды. Но что такое год? Это время, за которое Земля совершает по орбите полный оборот вокруг Солнца. По подсчётам астрономов, год составляет 365 суток 5 часов 48 минут и 46 секунд. Но пользоваться таким сложным числом очень неудобно. Поэтому в I веке до н. э. римский император Юлий Цезарь постановил считать одни годы по 365 суток, а другие по 366, чередуя три коротких и один длинный. Этот календарь называется юлианским. По нему средняя продолжительность года равна 365 сут. 6 ч, что больше истинной на 11 мин. 14 с.

В результате к XVI веку ошибка составляла уже около 10 суток. Поэтому следующую реформу провёл в 1582 году папа римский Григорий XIII. Созданная им комиссия постановила: сдвинуть числа на 10 дней, оставить чередование простых и високосных лет, но, если порядковый номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год простой. Таким образом, год 1800 — простой, а 2000 — високосный. В настоящее время расхождение между юлианским и григорианским календарями составляет три дня. Продолжительность григорианского года больше истинной лишь на 26 секунд, что намного точнее юлианского.

В России григорианский календарь был принят в 1918 году, при этом 1 февраля стали считать 14 февраля (вот откуда пошли старый и новый стили).

Интересную систему календаря составил в своё время известный математик древности Омар Хайям. Он предлагал считать високосными 8 лет из каждых 33, при этом погрешность составляла всего 19 секунд. Самый точный календарь рассчитал в 1864 году русский астроном И. Медлер, который вносил поправку в юлианский календарь: через каждые 128 лет пропускать один високосный год из 32, которые выпадают на этот период. Погрешность этого календаря равна 1 секунде. Но это предложение не было принято, скорее всего, из-за того, что 128 лет не является «круглым» числом.

В наши дни также поступают предложения от учёных о реформе календаря, которые касаются длительности недель и месяцев.

Решить неравенства.

1) $1<|2x-5|\le 3$.

Решение:

Избавимся от модуля, пользуясь геометрическим смыслом модуля (модуль — это расстояние от нуля до точки, изображающей данное число на числовой оси):

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2x-5<-1,\\ 2x-5>1,\end{array}\right.\\ 2x-5\ge -3,\\ 2x-5\le 3;\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2x<4,\\ 2x>6,\end{array}\right.\\ 2x\ge 2,\\ 2x\le 8,\end{array}\right.$$

Тогда после преобразований получаем:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<2,\\ x>3,\end{array}\right.\\ x\ge 1,\\ x\le 4.\end{array}\right.$$

Значит, решение данного неравенства имеет вид: $[1; 2) \cup (3; 4]$.

Ответ: $[1; 2) \cup (3; 4]$.

2) $|3-|x-2|| \le |x-7|$.

Решение:

Решим неравенство, пользуясь определением модуля. Для этого вначале раскроем внутренний модуль. Он раскрывается относительно числа 2, поэтому необходимо рассмотреть два случая: $x < 2$ и $x \ge 2$.

а) Если $x<2$, то неравенство принимает вид: $|3 + x - 2| \le |x - 7|$ или $|x + 1| \le |x - 7|$. Поскольку обе части последнего неравенства неотрицательны, то от возведения их в квадрат неравенство не изменится. Получим:

$x^2 + 2x + 1 \le x^2 - 14x + 49$,

$16x \le 48$,

$x \le 3$.

Учитывая, что первоначально $x<2$, получаем решение этого пункта: $(-\infty; 2)$.

б) Если $x \ge 2$, то неравенство принимает вид $|3 - x + 2| \le |x - 7|$ или $|5 - x| \le |x - 7|$. Воспользуемся тем же приёмом, что и в пункте а):

$25 - 10x + x^2 \le x^2 - 14x + 49$,

$4x \le 24$,

$x \le 6$.

Учитывая условие $x \ge 2$, получим решение данного пункта: $[2; 6]$. Объединяя ответы обоих пунктов, получаем: $x \in (-\infty; 6]$.

Ответ: $(-\infty; 6]$.

3) $(|x| - 1)(|x| - 2) \le 0$.

Решение:

Выполним замену: $|x| = t$, тогда неравенство принимает вид $(t - 1)(t - 2) \le 0$.

Решение запишем в виде двойного неравенства: $1 \le t \le 2$. Возвращаясь к переменной x, воспользуемся геометрическим смыслом модуля.

$1 \le |x| \le 2$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le -1,\\ x\ge 1,\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2.\end{array}\right.$$

Значит, $x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$.

Ответ: $[-2; -1] \cup [1; 2]$.

4) $\dfrac{2}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|-1}$.

Решение:

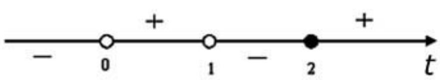
Выполним замену $|x| = t$, тогда неравенство принимает вид: $\dfrac{2}{t} \le \dfrac{1}{t-1}$.

Решим его методом интервалов.

$\dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t-1} \le 0$,

$\dfrac{2t-2-t}{t(t-1)} \le 0$,

$\dfrac{t-2}{t(t-1)} \le 0$.



Значит, $t \in (-\infty; 0) \cup (1; 2]$. Поскольку модуль по определению — расстояние, то принимать отрицательные значения он не может. Поэтому первая часть решения $|x|<0$

не имеет смысла. Вторая часть принимает вид $1 < |x| \le 2$. Решение аналогично предыдущему примеру, поэтому сразу записываем ответ.

Ответ: $[-2; -1) \cup (1; 2]$.

5) $x^2 + 4x + |x + 2| + 2 \le 0$.

Решение:

Представим неравенство в виде $x^2 + 4x + 4 + |x + 2| - 2 \le 0$ или $(x + 2)^2 + |x + 2| - 2 \le 0$. Так как $(x + 2)^2 = |x + 2|^2$, то возможно выполнить замену $|x + 2| = t$. Неравенство представляется в виде $t^2 + t - 2 \le 0$. Решение его: $-2 \le t \le 1$. Возвратимся к переменной x: $-2 \le |x + 2| \le 1$. Последнее неравенство можно записать в виде системы.

$$\begin{cases} |x+2| \ge -2, \\ |x+2| \le 1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы верно при любых значениях x. Второе запишем как двойное неравенство $-1 \le x + 2 \le 1$ или $-1 - 2 \le x \le 1 - 2$. Тогда $-3 \le x \le -1$.

Ответ: $[-3; -1]$.

Вопрос на дом. Какая геометрическая теорема в старину называлась «теоремой невесты»?

Ответ. Так называлась в средние века в Азии теорема Пифагора. Чертёж к теореме напоминал пчелу или крылатого муравья в полёте. По-древнегречески слово $\omega\mu\varphi\eta$ означает «молодая пчёлка», «крылатый муравей», «невеста», «нимфа».

Ставропольский край

Как много мы знаем и как мало мы понимаем.

Все уверены, что это сделать невозможно, но вот приходит некто, который этого просто не знает, — он-то и делает.

Дилетант подчас делает великие и неожиданные изобретения.

А. Эйнштейн

Интуиция есть орудие изобретения.

Ж.А. Пуанкаре

Познание начинается с удивления.

Аристотель

Практика без теории ценнее, чем теория без практики.

Квинтилиан