Предпрофильный курс «Красота методов решения математических задач»

Ирина Асланян,
учитель высшей категории средней общеобразовательной школы №1 станицы Ессентукской, старший преподаватель кафедры математики Пятигорского государственного технологического университета

В прошлом выпуске журнала мы начали знакомить вас с программой и содержанием занятий по математике в 9-м классе, разработанными учительницей из Ставрополья. Цель таких занятий — показать красоту математики, повысить интерес к предмету, настроить учащихся на выбор математического профиля в 10-м классе. Этот материала можно использовать на факультативных занятиях или во внеклассной работе по математике. Публикуем в этом выпуске большой объем материала с тем, чтобы учитель мог заблаговременно подготовиться к преподаванию тем, которые в школьном курсе представлены недостаточно.

Методы решения уравнений высших степеней

Занятие 6.

Историческая справка. Развитие математики до определённого времени происходило из-за практических потребностей людей. Дальнейшие открытия были сделаны математиками в связи с необходимостью разрешения внутренних проблем. К таким сложным вопросам в математике много веков относилась идея решения уравнения любой степени через его коэффициенты. В шестнадцатом веке усилиями нескольких итальянских математиков были найдены формулы для решения уравнений третьей и четвёртой степеней определённого вида. В 1545 году в книге Кардано «Великое искусство» было приведено решение уравнения вида $x^3 + px + q = 0$.

Эти открытия позволили учёным сделать предположение, что количество корней любого уравнения равно его степени, если считать все корни (действительные и комплексные), учитывая их кратность. Этому вопросу посвятил много времени голландский математик Альберт Жирар (начало XVII века). Примерно через 100 лет шотландец Колин Маклорен и великий математик Леонард Эйлер (по происхождению швейцарец, прожил более 30 лет в России) сформулировали основную теорему алгебры: «Уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами во множестве комплексных чисел имеет ровно n корней, если каждый кратный корень считать такое число раз, какова его кратность». Доказательством этой теоремы занимались многие известные математики, в их числе Декарт, Даламбер, Лагранж, Лаплас, Гаусс.

1

Продолжая изучение уравнений высших степеней, норвежский математик Нильс Абель в 1826 году доказал, что для общего уравнения пятой степени не существует формулы, которая выражает его корни через коэффициенты. Это не означает, что для отдельных частных видов уравнений высших степеней также невозможно найти такие формулы. Поэтому в решении этого вопроса ещё возможны открытия.

• *В существующих школьных учебниках алгебры при рассмотрении вопроса о решении уравнений второй степени для простоты изложения материала указывается, что, если дискриминант уравнения отрицателен, то уравнение не имеет корней. Это утверждение противоречит основной теореме алгебры, на что необходимо обратить внимание учащихся. С учётом этой теоремы целесообразно уточнить, что в этом случае нет действительных корней, а уравнение имеет два комплексных корня, которые не изучаются в средней школе. Необходимость такого уточнения обязательна, поскольку учащимся, привыкшим к неточной формулировке, будет очень сложно перестроиться при изучении комплексных чисел в курсе высшей математики.*

Запишем теорему Безу, которая позволяет найти корни многочлена.

Остаток $r(x)$ от деления многочлена $f(x)= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+ a_1 x + a_0$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$.

Отсюда следует, что, если число a является корнем многочлена, то остаток $r(a)$ будет равен нулю. Нам также понадобится теорема о корнях уравнения и следствия из неё.

Если несократимая дробь p/q является корнем уравнения $a_n x^{n+a}{}_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x+a_0 = 0$ с целыми коэффициентами, то число p является делителем свободного члена a_0, а q — делителем старшего коэффициента a_n.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, — целые.

Для решения уравнений существует специальная схема Горнера. Мы рассмотрим применение этих теорем на практике с помощью деления «уголком».

Примеры. Решить уравнения.

1) $x^3 + 15x - 16 = 0$.

Возможные целые корни ищем среди делителей числа 16: 1, 2, 4, 8, 16. Подставляя поочерёдно эти числа в данное уравнение, получаем, что 1 — корень. Разделим углом выражение $x^3 + 15x - 16$ на двучлен $x - 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 15x - 16 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & \overline{x^2 + x + 16} \\ \_\ x^2 + 15x & \\ \quad \underline{x^2 - x} & \\ \quad \_\ 16x - 16 & \\ \quad\quad \underline{16x - 16} & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

Два других корня найдём из уравнения $x^2 + x + 16 = 0$. Поскольку $D = 1 - 64 = -63$, то корни будут комплексными $x = \dfrac{-1 \pm 3i\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: 1; $x = \dfrac{-1 \pm 3i\sqrt{7}}{2}$.

2) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$

Как видно, в этом уравнении коэффициенты симметричны, поэтому такие уравнения называют возвратными. Для решения этого уравнения сгруппируем слагаемые с одинаковыми коэффициентами.

$6(x^4 + 1) + 5(x^3 + x) - 38x^2 = 0.$

Теперь разделим все слагаемые на переменную x в степени, в два раза меньшей, чем степень самого уравнения, то есть на x^2.

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t,$ тогда

$x+\dfrac{1}{x}=t, x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$ или

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2.$ Значит, уравнение

примет вид: $6(t^2 - 2) + 5t - 38 = 0;$
$6t^2 + 5t - 50 = 0,\ D = 25 + 4\cdot 6\cdot 50 = 1225.$

Корни этого уравнения

$t=-\dfrac{10}{3},\ t=\dfrac{5}{2}.$ Возвратимся к переменной x: $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$ или $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}.$

Умножив на $3x$ все слагаемые в первом и на $2x$ во втором уравнениях, получим:

$3x^2 + 10x + 3 = 0$ или $2x^2 - 5x + 2 = 0;$
$D = 100 - 4\cdot 3\cdot 3,\quad D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2;$
$D = 64,\quad D = 9;$
$x = -3,\ x=-\dfrac{1}{3}\quad x=\dfrac{1}{2},\ x=2.$

Ответ: $-3;\ -\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2};\ 2.$

3) $x^4 - 2x^3 + x = 0.$

Вынесем общий множитель x:

$x(x^3 - 2x^2 + 1) = 0;$
$x = 0$ или $x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$

Возможные корни второго уравнения 1 или −1. Подставляя эти числа в уравнение, получим, что 1 — корень. Разделим $x^3 - 2x^2 + 1$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 1 & x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 - x - 1 \\ -x^2 + 1 & \\ \underline{-x^2 + x} & \\ -x + 1 & \\ \underline{-x + 1} & \\ 0. & \end{array}$$

Корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ будут иррациональными $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Ответ: 0;1;(1)/2.

Вопрос на дом. В честь какой женщины-математика назван один из распространённых в настоящее время цветов?

Ответ. Известная французская вычислительница Гортензия Лепот (1723–1788) из путешествия по Индии привезла в Европу необычайно красивый цветок, который назвали в её честь гортензией.

Примечание: Знаком «•» отмечены рекомендации для учителя.

Методы решения систем уравнений

Занятие 7.

«...Правильному применению методов можно научиться, только применяя их на разнообразных примерах».
Датский историк математики
Г. Г. Цейтен

Историческая справка. Раздел математики, изучающий решение систем уравнений, носит название линейной алгебры. Задачи, решаемые с помощью систем уравнений, содержатся ещё в вавилонских текстах III–II тысячелетий до н. э.

Приёмы решения систем уравнений разрабатывали многие известные математики. Среди них французские математики Этьен Безу, Жозеф Луи Лагранж, Пьер Ферма, швейцарский — Габриель Крамер, немецкий — Готфрид Вильгельм Лейбниц, английский — Исаак Ньютон и другие. Среди наиболее распространённых методов решения систем линейных уравнений следует назвать «метод Крамера», метод исключения переменных Гаусса, графический и другие, большая часть которых изучается в курсе высшей математики.

При решении уравнений мы постоянно пользуемся четырьмя знаками арифметических действий, но не задумываемся, когда они появились в научных трудах и были общеприняты. А между тем символы эти были введены не так давно по сравнению с существующими математическими рукописями. Знаки «+» и «–» появились в 1489 году в научных трудах чешского математика Яна Видмана, преподававшего в Лейпцигском университете. И он же первым опубликовал таблицу умножения. Существующие знаки умножения и деления введены намного позже Лейбницем: в 1684 году символ «:» и в 1698 — «·». Редко применяемый в настоящее время знак умножения «×» опубликовал в 1631 году в своём научном труде английский математик Уильям Оутред. Знакомый всем нам знак равенства «=» был введён в обращение в 1557 году английским математиком и врачом Робертом Рекордом.

Каждый из этих символов прошёл свой часто сложный путь от создания до массового применения. Ведь до их появления ещё с древних времён четыре указанных действия уже применялись много веков и, очевидно, обозначались совсем иначе. Вам предлагается найти старинные обозначения арифметических действий.

Сегодня мы рассмотрим знакомый вам метод сложения, а также замену переменных в системах уравнений.

• *Несмотря на то, что указанные методы изучаются в общеобразовательном курсе математики, примеры, предлагаемые в существующих школьных учебниках, довольно просты и не в состоянии продемонстрировать всю многоплановость применения этих методов. При этом в младших классах её трудно показать, а в старших классах решение систем рациональных уравнений не предусмотрено. Поэтому мы постараемся лишь в малой мере исправить этот недочёт. Тем более что на вступительных экзаменах в вузы и в дальнейшем при изучении высшей математики умение решать системы играет важную роль.*

Рассмотрим один из приёмов решения систем в древности.

1) В «Арифметике» Диофанта дана следующая задача: «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а сумма их квадратов — 208».

Одно из возможных современных решений:

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208. \end{cases}$$

Решая систему подстановкой, получим ответ: $x = 8$, $y = 12$ или $x = 12$, $y = 8$.

Решение Диофанта. Пусть

$z=\frac{1}{2}(x-y)$, тогда $\frac{1}{2}(x+y)=10$,

значит, $$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)=z, \\ \frac{1}{2}(x+y)=10. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим:

$$\begin{cases} x=z+10, \\ y=10-z. \end{cases}$$

Выразим через z сумму квадратов x и y: $x^2+y^2=(z+10)^2+(10-z)^2=$
$=z^2+20z+100+100-20z+z^2=$
$=2z^2+200.$

По условию эта сумма равна 208. Получим уравнение $2z^2 + 200 = 208$, корнем которого является число 2. Тогда $x = 2 + 10 = 12$, $y = 10 - 2 = 8$. Следует учитывать, что во времена Диофанта ещё не были известны ни формула корней полного квадратного уравнения, ни отрицательные числа, поэтому учёному приходилось придумывать свои методы, в настоящее время практически не применяемые.

2. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$$

Выполним замену: $u = x + y$, $v = xy$, тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Получим систему:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 34, \\ u + v = 23. \end{cases}$$

Решая её подстановкой, найдём решение: $u = -10$, $v = 33$ или $u = 8$, $v = 15$. Возвратимся к переменным x и y.

$$\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 33; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных корней, а решение второй системы — две пары: (3; 5), (5; 3).

Ответ: (3; 5), (5; 3).

3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} xy + xz = -4, \\ yz + yx = -1, \\ zx + zy = -9. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения: $2xy + 2yz + 2xz = -14$. Тогда $xy + yz + xz = -7$. Сравнивая последнее уравнение с заданной системой, получим:

$$\begin{cases} yz = -7 + 4, \\ xz = -7 + 1, \\ xy = -7 + 9. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} yz = -3, \\ xz = -6, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Теперь умножим все три последних уравнения: $x^2y^2z^2 = 36$, откуда $xyz = \pm 6$.

В результате имеем две системы:

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \\ z = 3. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = -3. \end{cases}$$

Ответ: (−2; −1; 3), (2; 1; −3).

Вопрос на дом. Какой выдающийся математик XX века на самом деле не существует и никогда не существовал?

Ответ: Никола Бурбаки — псевдоним коллектива французских математиков, образованного в 1937 году из выпускников Высшей нормальной школы. В состав группы входят более сорока как всемирно известных учёных (Андре Вейль, Жан Дьедонне, Клод Шевалле), так и совсем неизвестных. С момента возникновения группа стала регулярно публиковать статьи в многотомном трактате «Элементы математики».

Текстовые задачи с процентами

Занятие 8.

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их».

Американский математик

Д. Пойа

Историческая справка. Гармония и красота математики увлекали древних людей. Вот почему почти все старинные задачи являются занимательными, будь то задачи из вавилонских клинописных таблиц, египетских папирусов или более поздних греческих источников.

Одни задачи имеют тысячелетний возраст, другие — вековой или десятилетний. Но замечательны они тем, что в процессе их решения появлялись и совершенствовались новые математические понятия, методы решения, символы.

Каждый народ наряду с распространёнными видами народного творчества (песни, сказки, поговорки, пословицы, загадки и т.п.) имеет и более редкий вид — занимательные математические задачи, которые передавались из поколения в поколение. Например, всем вам известна старинная русская задача VIII века о волке, козе и капусте, которых необходимо было переправить через реку. Не менее известна задача XVIII века о том, как гусь летел навстречу стае гусей и решил их сосчитать. Распространённая ситуация и в германской задаче: «За какое время лев, волк и собака могут съесть 3-х овец, если лев один может съесть овцу за 1 час, волк — за 3 часа, а собака — за 6 часов?». А вот болгарская задача, аналог которой есть у многих народов: «По улице шли 2 матери, 3 дочки и 2 сестры — всего 4 женщины. Как это может быть?»

Одни задачи развивали логическое мышление человека, другие — пространственное. Ещё какие-то 100 лет назад задачники по математике для школьников содержали в большинстве своём только текстовые задачи, решаемые по действиям или логическими рассуждениями. Решение задач с помощью уравнений также появилось ещё в древности. А вот решение отдельно взятых уравнений, не связанных с определённой задачей, практиковалось только у учёных.

• *Текстовые задачи — это одна из тех тем, задания которой с трудом решаются многими абитуриентами, что подтверждается статистическими данными многих вузов. Причин такого положения несколько.*

Во-первых, в школьных учебниках эти задачи встречаются в основном в младших классах, поэтому и уровень сложности у них соответствующий. Во-вторых, почти все предложенные задачи решаются с помощью уравнений, лишь задачи из начальной школы предлагаются по действиям. В результате ученики, не освоившие приёмы составления уравнения по данному тексту, до конца обучения в школе испытывают трудности психологического характера при решении таких задач. В-третьих, не существует спиральной системы изучения текстовых задач, когда уровень их постепенно усложняется. Тем более что в старших классах они не рассматриваются вообще, а на вступительных экзаменах уровень трудности задач многократно возрастает.

Текстовые задачи можно условно разделить по темам: проценты, производительность, смеси, движение, экономические, целочисленные, прогрессии и другие, более редко встречающиеся.

Рассмотрим некоторые приёмы решения задач с процентами.

1) Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили ещё на 15% и, наконец, после пересчёта произвели снижение ещё на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Пусть x — первоначальная цена товара, тогда цена после первого снижения станет равной: $x - 0{,}2x = 0{,}8x$. После второго снижения новая цена:

$$0{,}8x - 0{,}15 \cdot 0{,}8x = 0{,}8x - 0{,}12x = 0{,}68x.$$

И, наконец, после третьего снижения цена станет равной:

$$0{,}68x - 0{,}1 \cdot 0{,}68x = 0{,}68x - 0{,}068x = 0{,}612x.$$

Разность между первоначальной и конечной ценами будет равна:

$$x - 0{,}612x = 0{,}388x.$$

Это означает, что после трёх снижений цена уменьшится на 38,8%.

• *Многие ученики предлагают в этой задаче совершенно неправильное решение (20 + 15 + 10 = 45%), не учитывая, что каждое следующее снижение осуществлялось не над первоначальной ценой, а над уменьшенной. На это следует обратить особое внимание учащихся.*

Ответ: 38,8%.

2) Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12%. Сколько сухих грибов получится из 22 кг свежих?

Решение.

Решим эту задачу по действиям. Если в свежих грибах 90% воды, то остальные 10% — это вещество гриба, которое при сушке не уменьшается.

а) 100 – 90 = 10 (%) — вещество гриба.

б) (10·22)/100 = 2,2 (кг) — вещество гриба в 22 кг свежих грибов.

в) 2,2 + 0,12·2,2 = 2,2 + 0,264 = = 2,464 (кг) — сухих грибов.

Ответ: 2,464 кг.

• *Эту задачу можно прокомментировать, предложив учащимся высчитать выгоду от сбора, сушки и продажи грибов при данных условиях.*

3) Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

Решение.

Процентное содержание, концентрацию вещества в смеси или сплаве вычисляют по формуле: (массу вещества **:** массу раствора) · 100%. Аналогично находят объёмную концентрацию, только по объёмам. Внесём данные в таблицу, удобную для составления уравнения.

	1-й раствор	2-й раствор	Итого
Соль		0	
Вода			
% соли	5	0	1,5
Всего	30		

Неизвестные нужно ввести таким образом, чтобы полностью заполнились столбцы для исходных смесей. В первом столбце количество соли и воды легко посчитать: 30·0,05 = 1,5 кг соли и 30 – 1,5 = 28,5 кг воды. Обозначим через x массу чистой воды, которую необходимо добавить к морской. Последний столбец заполняется суммированием по строкам.

	1-й раствор	2-й раствор	Итого
Соль	1,5	0	1,5
Вода	28,5	x	28,5+x
% соли	5	0	1,5
Всего	30	x	30+x

Из последнего столбца по указанной выше формуле составим уравнение.

$1{,}5 : (30 + x) \cdot 100 = 1{,}5,$

$1{,}5 : (30 + x) = 0{,}015,$

$30 + x = 100,$

$x = 70.$

Ответ: 70 кг.

• *Задачи, подобные последней, практически не рассматриваются в школьном курсе, хотя на экзаменах в вузы их предлагают часто. Поэтому таким заданиям нужно обязательно уделять внимание.*

Вопрос на дом. Какой известный русский писатель окончил физико-математический факультет Московского университета?

Ответ. А. С. Грибоедов, поступив в Московский университет, прошёл за 6,5 лет курс 3 факультетов: словесного, юридического и физико-математического.

Текстовые задачи с целыми числами

Занятие 9.

«Обучение искусству решать задачи есть воспитание воли».
Американский математик
Д. Пойа

Историческая справка. Многие учёные с увлечением занимались изучением различных видов и свойств чисел. В связи с расширением числовых множеств появилась необходимость в новых терминах. Например, термин «иррациональный» ввёл в обращение английский математик Томас Брадвардин (1290–1349). Для обозначения бесконечности множества чисел в 1655 году английским математиком Джоном Уоллисом Валлисом был предложен знак «∞». Для упрощения расчётов французский астроном и математик Иоганн Буркхардт составил в 1814–1817 годах таблицы делителей всех чисел до 3036000 вместе с простыми числами.

Числа всегда привлекали к себе внимание учёных своими магическими свойствами. Ещё в древности учёные придумали математические шутки с числами, названные софизмами. Софизмы играли очень важную роль, поскольку способствовали повышению строгости математических выкладок, в результате чего приёмы и методы понимались и запоминались намного лучше и качественнее. Разбор софизмов способствует развитию логического мышления, сознательному, а не бездумному освоению математики.

Примеры имели искусно завуалированные математические ошибки, поэтому нерадивые ученики не всегда могли их заметить и в результате получали курьёзные ответы. Рассмотрим 2 примера, доказывающих, что $2\cdot 2 = 5$.

1) $25 - 45 = 16 - 36$,

$$25-45+20+\frac{1}{4}=16-36+20+\frac{1}{4},$$

$$5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(5-\frac{9}{2}\right)^2=\left(4-\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$5-\frac{9}{2}=4-\frac{9}{2},$$

$$5=4, \;\Rightarrow\; 2\cdot 2=5.$$

2) $4:4 = 5:5$, вынесем общий множитель

$4(1:1) = 5(1:1)$, разделим обе части на общий множитель

$4 = 5$, $=> 2\cdot 2 = 5$.

Попробуйте найти ошибку в предложенных примерах.

• *Задачи с целыми числами не рассматриваются в школьном курсе математики, поэтому абитуриенты испытывают огромные трудности уже на первом этапе решения таких заданий — при введении переменных. Для них проблематично представить, что каждое число можно разложить по разрядам, ведь эта процедура изучается лишь в начальной школе и очень редко упоминается в дальнейшем. По этой причине мы выбрали именно этот вид текстовых задач.*

Рассмотрим наиболее типичные задачи этого вида.

1) Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если цифры этого числа переставить, то полученное число будет на 18 меньше искомого. Чему равно искомое число?

Решение.

Пусть x — цифра десятков искомого числа, а y — цифра единиц, тогда это число можно записать в виде $10x + y$. По первому условию задачи $x + y = 8$. Если переставить цифры числа, то получим новое число $10y + x$. Так как последнее число по условию на 18 меньше искомого, то получим второе уравнение $10x + y - 18 = 10y + x$. В итоге составим систему:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 10x + y - 18 = 10y + x. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Сложим и вычтем полученные уравнения.

$$\begin{cases} 2x = 10, \\ 2y = 6. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Значит, искомое число равно 53.

Ответ: 53.

2) Трёхзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет больше утроенного первоначального числа на 1. Найти исходное число.

Решение.

Пусть цифра сотен искомого числа — x, а цифра десятков — y; так как цифра единиц равна 3, то это число имеет вид $100x + 10y + 3$. После переноса цифры 3 в начало числа получим число $300 + 10x + y$. По условию последнее число больше утроенного искомого на единицу. Значит,

$300 + 10x + y = 3(100x + 10y + 3) + 1$,
$300 + 10x + y = 300x + 30y + 10$,
$290x + 29y = 290$,
$10x + y = 10$, тогда $100x + 10y = 100$.

Поскольку искомое число имеет вид $100x + 10y + 3$, значит, это число равно $100 + 3 = 103$.

Ответ: 103.

• *Особенность этой задачи состоит в том, что значения переменных отдельно не найдены, но в этом и нет необходимости. На указанный факт следует обратить внимание учащихся, так как в школьных учебниках такой приём при решении задач не рассматривается.*

3) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке — число, равное сумме цифр исходного числа. Найти исходное число.

Решение.

• *В начале решения этой задачи необходимо напомнить ученикам, что если при делении числа **a** на **b** в частном получится **c**, а в остатке **r**, то данное число можно представить в виде суммы **a = bc + r**.*

Пусть данное число равно $10x + y$. Тогда по первому условию, с учётом указанной формулы, получим $10x + y = 7(x + y) + 6$. По второму условию получается уравнение $10x + y = 3(xy) + (x + y)$. Объединим оба уравнения в систему.

$$\begin{cases} 10x + y = 7x + 7y + 6, \\ 10x + y = 3xy + x + y. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x - 6y = 6, \\ 9x = 3xy. \end{cases}$$

После упрощения каждого из уравнений, получим систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x(3 - y) = 0. \end{cases}$$

Поскольку последнее уравнение распадается на два, то получим две системы:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 3, \\ x = 8. \end{cases}$$

Так как x и y — цифры, то значения из первой системы не подходят. Значит, искомое число равно 83.

Ответ: 83.

Вопрос на дом. В честь какого великого математика назван один из разделов алгебры? Дочь этого человека — всемирно известная писательница.

Ответ. Основоположник математической логики — ирландский математик Джордж Буль (1815–1864). В его честь раздел исследований назван «булевой алгеброй». Его дочь — Этель Лилиан

Войнич (Буль) — автор всемирно известного романа «Овод». Также перевела с русского на английский язык некоторые произведения Лермонтова, Гоголя, Шевченко, Достоевского.

Простейшие уравнения с параметрами и модулями

Занятие 10.

Историческая справка. Понятия «модуля» и «параметра» были приняты в математике сравнительно недавно. Знак модуля $|a|$ был предложен в 1841 году немецким математиком Карлом Вейерштрассом. Слово «модуль» происходит от латинского *modulus*, что в переводе означает «мера», «величина». Параметр специального обозначения не имеет, как правило, это первые буквы алфавита. Уравнение с параметром — это множество уравнений в зависимости от значений параметра. Но решать уравнение при каждом отдельном значении параметра — непосильная задача, поэтому рассматривают отдельно ключевые его значения и все остальные.

Сегодня мы уделим больше внимания решению примеров.

• *Рассмотреть всевозможные виды уравнений с параметрами и модулями на одном занятии невозможно, поэтому мы разберём решение лишь некоторых типичных примеров. При этом учтём, что в школьном курсе математики встречаются единичные случаи таких уравнений.*

1) При каких значениях параметра a уравнение $3x + a = ax + 7$ имеет корень, больший 1?

Решение.

$3x + a = ax + 7,$
$3x - ax = 7 - a,$
$x(3 - a) = 7 - a.$

Если $a = 3$, то $x_0 = 4$. Это равенство неверно при любых значениях x.

Если $a \neq 3$, то

$$x = \frac{7-a}{3-a}.$$

По условию корень уравнения больше 1, поэтому

$$\frac{7-a}{3-a} > 1,$$

$$\frac{4}{3-a} > 0, \quad \Rightarrow\ 3-a > 0,\ \ a < 3.$$

Ответ: при $a \in (-\infty;\ 3)$ данное уравнение имеет корень, больший 1.

2) При каких значениях k уравнение $(k - 2)x^2 + 2(k - 1)x + k - 3 = 0$ не имеет действительных корней?

Решение.

• *При решении этого примера следует обратить внимание учащихся на тот факт, что в аналогичных заданиях могут встретиться ситуации, когда уравнение имеет два различных корня или один (два равных) корень, или необходимо рассмотреть все три случая, которые также решаются с помощью исследования возможных значений дискриминанта.*

Заданное уравнение является квадратным относительно переменной x. Поэтому оно не будет иметь действительных корней в том случае, когда дискриминант будет отрицательным. Воспользуемся формулой дискриминанта для квадратного уравнения, у которого второй коэффициент — чётное число, т.е. $D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$

Получим

$D_1 = (k - 1)^2 - (k - 2)(k - 3),$
$D_1 = k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2k + 3k - 6,$
$D_1 = 3k - 5.$

Так как $D_1 < 0$, то $3k - 5 < 0$,

$$k < \frac{5}{3}.$$

Ответ: при $k \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ данное уравнение не имеет действительных корней.

2) Решить уравнение $|x| = \frac{x}{2} + 2$.

Решение.

• *На доске записать определение модуля, чтобы в двух следующих примерах применить его.*

По определению модуля если $x \geq 0$, то $|x| = x$, а если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит, уравнение примет вид:

1) $x = \frac{x}{2} + 2$, если $x \geq 0$,

2) $-x = \frac{x}{2} + 2$, если $x < 0$.

1) $x = 4$, если $x \geq 0$,

2) $x = -\frac{4}{3}$, если $x < 0$.

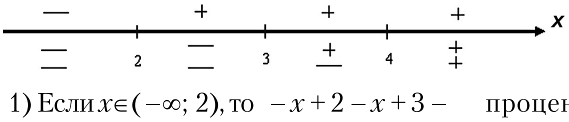
Ответ: $-\frac{4}{3}$; 4.

3) Решить уравнение $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$.

Решение.

• *При решении уравнений и неравенств с несколькими модулями удобно воспользоваться методом интервалов, который состоит в следующем: найти нули всех подмодульных выражений и нанести их на числовую ось; в каждом из получившихся промежутков указать знак каждого из выражений; раскрыть модули на каждом из промежутков отдельно с учётом знака и определения модуля; решить уравнение на каждом промежутке и объединить ответы.*

Корни подмодульных выражений $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ разбивают числовую ось на следующие промежутки:



1) Если $x \in (-\infty; 2)$, то $-x + 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9$, $-4x = -4$, $x = 1$, $1 \in (-\infty; 2)$, 1 – корень.

2) Если $x \in [2; 3)$, то $x - 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9$, $-2x = 0$, $x = 0$, $0 \notin [2; 3)$.

3) Если $x \in [3; 4)$, то $x - 2 + x - 3 - 2x + 8 = 9$, $3 = 9$ — неверно, корней нет.

4) Если $x \in [4; +\infty)$, то $x - 2 + x - 3 + 2x - 8 = 9$, $4x = 22$, $x = 5{,}5$, $5{,}5 \in [4; +\infty)$, 5,5 — корень.

Ответ: 1; 5,5.

Решить уравнение

$$\frac{3x-2}{a^2-2a} + \frac{x-1}{a-2} + \frac{2}{a} = 0.$$

Решение.

Уравнение является линейным относительно x. Рассмотрим ключевые значения параметра. В данном случае это те, которые обращают знаменатели дробей в нуль.

Если $a = 2$, $a = 0$, то решения нет.

Если $a \neq 2$, $a \neq 0$, то приведём все три дроби к общему знаменателю и воспользуемся правилом: дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

$3x - 2 + a(x - 1) + 2(a - 2) = 0$,
$3x - 2 + ax - a + 2a - 4 = 0$,
$3x + ax + a - 6 = 0$,
$x(3 + a) = 6 - a$.

Если $a = -3$, то решения нет.

Если $a \neq -3$, то $x = \frac{6-a}{3+a}$.

Ответ: если $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$, то решения нет; если $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{6-a}{3+a}$.

Вопрос на дом. Какой математический символ был введён благодаря типографской опечатке?

Ответ. Наборщик типографии при наборе математического текста вместо слова «*cto*» из-за неразборчивого почерка отпечатал знак «%» внешне похожий на это слово. Знак процента понравился всем своей простотой и стал применяться повсеместно.

Ирина Асланян

Обобщённый метод интервалов в неравенствах

Занятие 11.

«В математике следует помнить не формулы, а процесс мышления».
Украинский математик
В.П. Ермаков

Историческая справка. В 1631 году английский математик Томас Гарриот предложил знаки неравенства «>» и «<». Гарриот рассуждал следующим образом: если величины не равны, то чёрточки в знаке должны быть не параллельны, а пересекаться. Эти знаки стали общеупотребительными намного раньше введённого Рекордом за 74 года до этого знака равенства, несмотря на то, что знак «=» был для них прообразом. Дело в том, что в типографии для набора знаков неравенства применяли букву «v», в то время как знака, похожего на равенство, не было, а изготовление его было трудоёмким.

Нестрогие знаки «≤» и «≥» были введены в 1734 году французским математиком Пьером Буге. Если учесть, что знак равенства, введённый английским учёным, стал общеупотребительным лишь в XVIII веке благодаря работам немецкого математика Готфрида Лейбница и его последователей, то становится ясно, что интернациональному коллективу учёных пришлось в течение трехсот лет добиваться общественного признания нескольких математических знаков.

Разберём обобщённый метод интервалов для решения неравенств, отличающийся от описанного в ваших учебниках метода тем, что при его применении отпадает необходимость вычислять знаки выражения в каждом из промежутков.

• *Учащимся предлагается запись алгоритма обобщённого метода интервалов:*

1) Привести запись неравенства к стандартному виду $(x - a_1)^k (x - a_2)^m (x - a_3)^l \ldots (x - a_n)^t \vee 0$, *где* a_n *— все различные действительные числа, k, m, l, ... t — показатели степеней (могут быть одинаковыми), знак V подразумевает один из четырёх знаков: ≤, ≥, >, <.*

2) Отметить все a_n *на числовой оси с учётом знака неравенства: если знак строгий, то точки выколотые, а если нестрогий, то закрашенные. Если в левой части неравенства дроби, то числа из знаменателя выколоты всегда.*

3) В крайнем правом промежутке всегда знак « + », при переходе через корень нечётной кратности (степени) знак меняется, а чётной — не изменяется.

Рассмотрим несколько примеров.

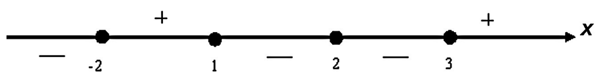
1) $(x-1)(3-x)(x+2)^3(x-2)^2 \le 0.$

Решение.

Вынесем из второй скобки знак « – » и, разделив обе части неравенства на –1, изменим знак неравенства на противоположный:

$$(x-1)(x-3)(x+2)^3(x-2)^2 \ge 0.$$

Отметим на числовой оси точки –2; 1; 2; 3. Так как 2 — корень чётной кратности (второй), то при переходе через эту точку знак не изменится.



Ответ: 1) $x \in [-2; 1] \cup \{2\}; \cup [3; +\infty]$.

2) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \le 0.$

Решение.

Разложим на множители два средних множителя, пользуясь формулами разности квадратов и кубов. Для разложения последней скобки дважды применим формулу разности квадратов:

$(x-1)(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)\cdot$
$\cdot(x-1)(x+1)(x^2+1)\le 0.$

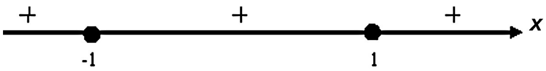
Поскольку $x^2 + x + 1 > 0$ и $x^2 + 1 > 0$, то деление обеих частей неравенства на эти выражения не изменит его знака:

$(x-1)(x-1)(x+1)(x-1)(x-1)(x+1)\le 0.$

Объединим одинаковые множители:

$$(x-1)^4(x+1)^2 0.$$

Отметим точки -1 и 1 на числовой оси и, так как оба корня чётной кратности, то во всех промежутках получим знак «+».



Ответ: -1; 1.

3) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}.$

Решение.

• *Обратить внимание учащихся на тот факт, что типичной ошибкой в подобных примерах является ответ $x<3$, и привести верное решение.*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3} < 0,$$

$$\frac{3-x}{3x} < 0,$$

$$\frac{x-3}{x} > 0,$$

$x\in(-\infty; 0)\cup(3; +\infty).$

Ответ: $x\in(-\infty; 0)\cup(3; +\infty).$

4) $x^5 - 34x^3 + 225x < 0.$

Решение.

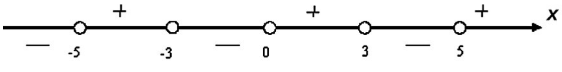
Разложим левую часть неравенства на множители:

$x(x^4 - 34x^2 + 225) < 0,$

$x(x^2 - 9)(x^2 - 25) < 0,$

$x(x-3)(x+3)(x-5)(x+5) < 0,$

Так как все корни первой кратности, то знаки чередуются.



Ответ: $x\in(-\infty; -5)\cup(-3; 0)\cup(3;5).$

Вопрос на дом. Какой английский математик писал нематематические детские книги, известные во всём мире?

Ответ. Английский математик Чарльз Лютвидж Доджсон (1832–1898), преподаватель Оксфордского колледжа, опубликовавший 256 своих сочинений, прославился благодаря двум детским книгам: «Приключения Алисы в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». К моменту выхода в свет сказок об Алисе автор принял сан священнослужителя, поэтому не мог подписать произведения своим именем. Именно по этой причине и появился его псевдоним «Льюис Кэрролл».

Обобщённый метод интервалов в системах неравенств

Занятие 12.

«Ни одна другая наука не учит так ясно понимать гармонию природы, как математика».
Американский издатель
и философ
Н. Карус

Историческая справка. Сегодня мы вспомним первую русскую женщину-математика Софью Васильевну Ковалевскую. Родившись в 1850 году в богатой семье, девочка получила хорошее образование. Первое знакомство с математикой произошло в восьмилетнем возрасте, когда маленькая Соня подолгу рассматривала наклеенные на стены в качестве обоев листы с лекциями известного математика М.В. Остроградского. В то время женщинам было запрещено учиться в университетах, поэтому Ковалевская уезжает в Германию, где занимается частным образом с известными немецкими математиками.

В 1874 году в Геттингенском университете ей была присуждена степень доктора философии. Но диплом доктора не помог Софье Васильевне получить работу преподавателя у себя на родине. Переехав в 1883 году в Швецию, Ковалевская до конца жизни проработала в Стокгольмском университете, так и не воплотив в жизнь свою мечту о научной работе в России.

Решение систем неравенств.

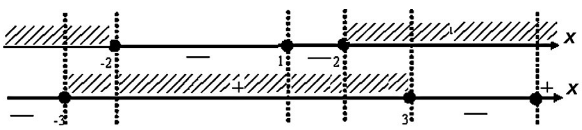
1) $\begin{cases} (x^2-4)(x^2-2x+1)\ge 0, \\ (x-14)(9-x^2)\le 0. \end{cases}$

Решение.

Применим формулы разности квадратов, квадрата разности, а также умножим обе части второго неравенства на -1, поменяв знак неравенства на противоположный:

$$\begin{cases} (x-2)(x+2)(x-1)^2\ge 0, \\ (x-14)(x-3)(x+3)\ge 0. \end{cases}$$

Отметим полученные решения на двух числовых осях. Учтём, что в первом неравенстве точка 1 двойной кратности, поэтому при переходе через неё знак функции $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)^2$ не меняется.



Ответ: 1) $x\in[-3;-2]\cup\{1\}\cup[2;3]\cup[14;+\infty]$.

2) $\begin{cases} x^4-3x^3+x^2+3x-2\ge 0, \\ x^4-2x^3+x^2-8x-12\ge 0. \end{cases}$

Решение.

Разложим на множители выражения, стоящие в левых частях заданных неравенств.

• *Возвратившись к занятию 6, напомнить учащимся некоторые теоретические сведения по решению уравнений высших степеней.*

а) $x^4-3x^3+x^2+3x-2=0$.

Целые корни этого уравнения ищем среди делителей числа 2: ±1; ±2. Подставим каждый из них в уравнение.

$x=1$, $1-3+1+3-2=0$ — верно, 1 — корень;

$x=-1$, $1+3+1-3-2=0$ — верно, -1 — корень;

$x=2$, $16-24+4+6-2=0$ — верно, 2 — корень;

$x=-2$, $16+24+4-6-2=0$ — неверно, -2 не является корнем.

Таким образом, найдены три корня, четвёртый вычислим путём деления многочлена $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ на выражение $(x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3-2x^2-x+2$.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-3x^3+x^2+3x-2 & x^3-2x^2-x+2 \\ \underline{x^4-2x^3-x^2+2x} & \overline{x-1} \\ -\,-x^3+2x^2+x-2 & \\ \underline{-x^3+2x^2+x-2} & \\ 0. & \end{array}$$

Значит, а) $x^4-3x^3+x^2+3x-2 = (x-1)^2(x+1)(x-2)$.

б) $x^4-2x^3+x^2-8x-12=0$. Целые корни этого уравнения будем искать среди делителей числа 12: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Поскольку чисел довольно много, найдём лишь два корня, чтобы понизить степень уравнения до второй.

$x=1$, $1-2+1-8-12=0$, — неверно;

$x=-1$, $1+2+1+8-12=0$, — верно;

$x=2$, $16-16+4-16-12=0$, — неверно;

$x=-2$, $16+16+4+16-12=0$, — неверно;

$x=3$, $81-54+9-24-12=0$, — верно.

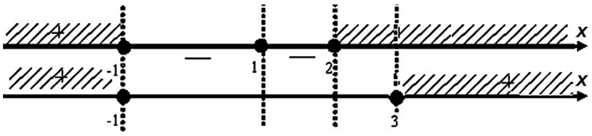
Для отыскания ещё двух корней разделим многочлен $x^4-2x^3+x^2-8x-12$ на выражение $(x+1)(x-3) = x^2-2x-3$.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-2x^3+x^2-8x-12 & x^2-2x-3 \\ \underline{x^4-2x^3-3x^2} & \overline{x^2+4} \\ -\,4x^2-8x-12 & \\ \underline{4x^2-8x-12} & \\ 0. & \end{array}$$

В результате получаем: $x^4-2x^3+x^2-8x-12=(x+1)(x-3)(x^2+4)$. Исходная система принимает вид:

$$\begin{cases}(x-1)^2(x+1)(x-2)\ge 0,\\(x+1)(x-3)(x^2+4)\ge 0.\end{cases}$$

Учитывая, что обе части второго неравенства можно разделить на выражение $x^2+4>0$, а также то, что для первого неравенства 1 — корень четной кратности, получим решение системы неравенств:



Ответ: $x\in[-\infty;\,-1]\cup\{1\}\cup[3;\,+\infty)$.

3) $1\le\dfrac{x+1}{2-x}<3.$

Решение.

● *Двойным неравенствам необходимо уделить достаточно внимания, так как они практически отсутствуют в школьном учебнике алгебры, за исключением самых примитивных. В то же время на вступительных экзаменах в вузы они встречаются в сочетании с различными видами выражений.*

Двойное неравенство лучше представить в виде системы неравенств.

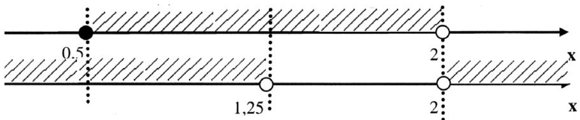
$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2-x}\ge 1,\\[2mm]\dfrac{x+1}{2-x}<3;\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{x+1-2+x}{2-x}\ge 0,\\[2mm]\dfrac{x+1-6+3x}{2-x}<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2-x}\ge 0,\\[2mm]\dfrac{4x-5}{2-x}<0.\end{cases}$$

Приведём числители и знаменатели дробей к стандартному виду:

$$\begin{cases}\dfrac{x-0{,}5}{x-2}\le 0,\\[2mm]\dfrac{x-1{,}25}{x-2}>0.\end{cases}$$

Отметим на двух числовых осях точки, соответствующие каждой из дробей, и найдём общую часть их решения.



Ответ: [0,5; 1,25).

4) $\begin{cases}a(x-2)\ge x-3,\\8(a+1)x>8ax+9.\end{cases}$

Решение.

● *Учтём сведения о параметрах, полученные учениками на 10-м занятии, а также всё, что связано с решением неравенств и систем.*

Преобразуем неравенства, сгруппировав в разных частях слагаемые с переменной и без неё:

$$\begin{cases}ax-2a\ge x-3,\\8ax+8x>8ax+9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}ax-x\ge 2a-3,\\8x>9.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(a-1)\ge 2a-3,\\x>\dfrac{9}{8}.\end{cases}$$

Если a = 1, то система принимает вид: $\begin{cases}0\ge -1,\\x>\dfrac{9}{8}.\end{cases}$

Эта система не имеет решения.

Если $a>1$, то $a-1>0$ и при делении на $a-1$ знак первого неравенства не изменится. Система примет вид:

$$\begin{cases}x\ge\dfrac{2a-3}{a-1},\\[2mm]x>\dfrac{9}{8}.\end{cases}$$

Выясним, при каких значениях параметра a правые части неравенств равны:

$$\frac{2a-3}{a-1}=\frac{9}{8},$$
$$16a-24=9a-9,$$
$$7a=15,$$
$$a=\frac{15}{7}.$$

Значит, при $a\in\left(1;\ \frac{15}{7}\right]$ будет выполняться неравенство $\frac{2a-3}{a-1}<\frac{9}{8}$, поэтому $x\in\left(\frac{9}{8};\ +\infty\right)$.

При $a\in\left(\frac{15}{7};\ +\infty\right)$ $\frac{2a-3}{a-1}>\frac{9}{8}$, поэтому $x\in\left[\frac{2a-3}{a-1};\ +\infty\right)$.

Если $a<1$, то система принимает вид:
$$\begin{cases} x<\frac{2a-3}{a-1}, \\ x>\frac{9}{8}. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $x\in\left(\frac{9}{8};\ \frac{2a-3}{a-1}\right]$.

Ответ:

если $a\in(-\infty;\ 1)$, то $x\in\left(\frac{9}{8};\ \frac{2a-3}{a-1}\right]$;

если $a\in\left[1;\ \frac{15}{7}\right]$, то $x\in\left(\frac{9}{8};\ +\infty\right)$;

если $a\in\left(\frac{15}{7};\ +\infty\right)$, то $x\in\left[\frac{2a-3}{a-1};\ +\infty\right)$.

Вопрос на дом. В каком европейском городе есть улицы, названные в честь великих учёных из других стран: Пифагора, Архимеда, Ньютона и Коперника?

Ответ. В столице Нидерландов — Амстердаме.

Примечание: Знаком «•» отмечены рекомендации для учителя.

Предгорный район
Ставропольского края

Мысли о способностях

Возможное порою невозможно —
Что просто одному, другому сложно.

Маарри

Способности человека, насколько нас учит опыт и аналогия, безграничны; нет никакого основания полагать даже какой-нибудь предел, на котором остановится человеческий ум.

Г.Т. Бокль

Свои способности человек может узнать, только применив их на деле.

Сенека

С течением жизни мы узнаём пределы своих способностей.

З. Фрейд

Способности мало значат без возможностей.

Наполеон I