Предпрофильный элективный курс «Красота методов решения математических задач»

Ирина Асланян,
учитель высшей категории средней общеобразовательной школы №1 станицы Ессентукской Предгорного района, старший преподаватель кафедры математики Пятигорского государственного технологического университета

Знакомим вас с программой и содержанием занятий по математике в 9-м классе, разработанными учительницей из Ставрополья. Программа рассчитана на 17 часов. Основная цель курса — показать ученикам методы, приёмы и примеры решения задач и заданий, редко применяемые в школьном курсе математики, но часто встречающиеся на вступительных экзаменах в вузы, на олимпиадах, обратить их внимание на те методы, которые используются не только в алгебре, но и в геометрии, физике, черчении. А дополнительная цель — показать красоту математики, повысить интерес к предмету, настроить учащихся на выбор математического профиля в 10-м классе. Сложилась уже определённая схема проведения уроков. На каждом занятии учительница приводит цитаты из высказываний известных учёных по вопросам, которые изучаются, рассматривает исторические факты, относящиеся к теме, знакомит учеников с именами великих математиков, физиков, философов, внёсших большой вклад в развитие науки. В конце занятия ученики получают для рассмотрения дома вопрос исторического или занимательного характера. Ответ на него заслушивают все вместе на следующем занятии и оформляют в виде краткой справки или небольшого доклада. Материал ребята выбирают по справочникам, энциклопедиям или сайтам из Интернета. Уровень заданий, используемых в курсе, различный: от элементарных, занимательных, старинных до олимпиадных, повышенной сложности, изучаемых в курсе высшей математики, заданий для абитуриентов. Этот материала можно использовать на факультативных занятиях или во внеклассной работе по математике.

Программа курса (17 ч).

Методы оперирования числами. Фигурные числа. Перевод периодических дробей в обыкновенные. Задачи с числами. Комплексные числа и простейшие действия над ними.

Методы решения уравнений. Метод замены или подстановки. Метод разложения на множители. Теорема Виета. Уравнения высших степеней. Возвратные уравнения. Замена в системах уравнений. Простейшие уравнения с параметрами и модулями. Текстовые задачи.

Методы решения неравенств. Обобщённый метод интервалов в неравенствах и системах неравенств. Замена в неравенствах. Простейшие неравенства с параметрами и модулями.

Методы решения геометрических задач. Применение подобия треугольников. Многоликая теорема Пифагора. Формула Герона для иррациональных длин. Алгебраический метод в геометрии.

Тематическое планирование

№№	Тема	Часы
1.	Методы оперирования числами	2
2.	Комплексные числа	1
3.	Методы замены и разложения на множители. Теорема Виета. Уравнения высших степеней. Системы уравнений	4
4.	Текстовые задачи	2
5.	Простейшие уравнения с параметрами и модулями	1
6.	Обобщённый метод интервалов в неравенствах и системах неравенств	2
7.	Замена переменной в неравенствах	1
8.	Простейшие неравенства с параметрами и модулями	1
9.	Алгебраический метод в геометрии	2
10.	Теорема Пифагора	1

Занятие 1. Перевод периодических дробей в обыкновенные. Фигурные числа

«Число есть начало всех вещей, воспринимаемых рассудком».
Немецкий философ и математик Николай Кузанский (1401–1464)

Историческая справка. Для нас совершенно естественно повсеместное применение чисел. Возможность всё пересчитать считается закономерной и существующей вечно, поэтому абсолютно не возникают мысли о том, как можно обходиться без счёта. А ведь без чисел наступил бы, скорее всего, хаос. Мы совершенно свободно оперируем числами, не задумываясь о том сложном пути, который прошло общество в применении счёта.

На первых порах расширение понятия числа происходило медленно. У многих народов число 40 достаточно долго было пределом счёта, поэтому выражение «сорок сороков» в старину означало число, которое даже невозможно представить.

На следующей ступени счёт достигает нового предела: десяти десятков — ста. Затем появляются тысяча, десять тысяч (тьма) и миллион. В современной математике граница счёта — бесконечность, которая не обозначает какое-либо конкретное число.

Столь же сложно происходило расширение понятия числа «вглубь»: сначала появились натуральные числа, затем целые отрицательные, потом дробные и т.д. Сегодня мы обсудим лишь одно небольшое правило о дробях, которое вы не рассматриваете в школьном курсе математики.

Вспомним способы перевода обыкновенных дробей в десятичные:
- разделить числитель на знаменатель;
- по основному свойству дроби умножить числитель и знаменатель

дроби на такой множитель, чтобы в знаменателе получилось число, которое является делителем или кратным 100.

Примеры:

1) $\frac{1}{5}=1:5=0,2$ или $\frac{1}{5}=\frac{(1\cdot 2)}{(5\cdot 2)}=\frac{2}{10}=0,2.$

2) $\frac{2}{9}=0,(9).$

3) $\frac{2}{7}=0,(285714).$

4) $\frac{2}{15}=0,1(3).$

Во втором и третьем примерах получились чисто периодические дроби, а в третьем — смешанная периодическая дробь. Также не сложен перевод десятичных дробей в обыкновенные: записываем дробь с помощью дробной черты так, как говорим вслух.

Примеры:

1) $3{,}3=\frac{33}{10}.$

2) $4{,}5=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}.$

Но таким образом нельзя перевести периодическую дробь в обыкновенную. Для такого перевода необходимо знать следующее правило:

Чтобы периодическую дробь представить в виде обыкновенной необходимо:

- **из числа, записанного до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и эта разность — числитель искомой дроби;**
- **в знаменатель записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде и дописать столько нулей, сколько цифр между целой частью и периодом.**

Примеры:

1) $2,(5)=\frac{(25-2)}{9}=\frac{23}{9}.$

2) $1,32(7)=\frac{(1327-132)}{900}=\frac{1195}{900}=\frac{239}{180}.$

3) $3,2(54)=\frac{(3254-32)}{990}=\frac{3222}{990}=\frac{179}{55}.$

Теперь разберём более сложные примеры, связанные с периодическими дробями, которые предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в вузы.

Примеры:

1) $$\frac{0{,}8333...-0,4(6)}{\frac{11}{6}}\cdot\frac{1{,}125+1{,}75-0,41(6)}{0{,}59}.$$

Решение:

$0{,}8333...=0,8(3)=\frac{(83-8)}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6};$

$0,4(6)=\frac{(46-4)}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15};$

$0,41(6)=\frac{(416-41)}{900}=\frac{375}{900}=\frac{5}{12};$

$\frac{5}{6}-\frac{7}{15}=\frac{25}{30}-\frac{14}{30}=\frac{11}{30};$

$\frac{11}{30}:\frac{11}{6}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5};$

$$1{,}125+1{,}75-\frac{5}{12}=\frac{9}{8}+\frac{7}{4}-\frac{5}{12}=$$

$$=\frac{(27+42-10)}{24}=\frac{59}{24};$$

$\frac{59}{24}:0{,}59=\frac{59}{24}:\frac{59}{100}=\frac{100}{24}=\frac{25}{6};$

$\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{6}=\frac{5}{6}.$

Ответ: $\frac{5}{6}.$

2) $$\frac{\left(\frac{5}{8}+2{,}708333...\right):2{,}5}{\left[1{,}3+0,7(6)+0,(36)\right]\cdot\frac{110}{401}}\cdot\frac{1}{2}.$$

Решение:

$$2{,}708333... = 2{,}708(3) =$$

$$= \frac{(27083-2708)}{9000} = \frac{24375}{900} = \frac{65}{24};$$

$$0{,}7(6) = \frac{(76-7)}{90} = \frac{69}{90} = \frac{23}{30};$$

$$0{,}(36) = \frac{(36-0)}{99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11};$$

$$\frac{5}{8} + \frac{65}{24} = \frac{15}{24} + \frac{65}{24} = \frac{80}{24} = \frac{10}{3};$$

$$\frac{10}{3} : 2{,}5 = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{25} = \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3};$$

$$1{,}3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11} = \frac{13}{10} + \frac{23}{30} + \frac{4}{11} =$$

$$= \frac{13}{10} + \frac{23}{30} + \frac{4}{11} = \frac{420}{330} + \frac{253}{330} + \frac{120}{330} =$$

$$= \frac{802}{330} = \frac{401}{165};$$

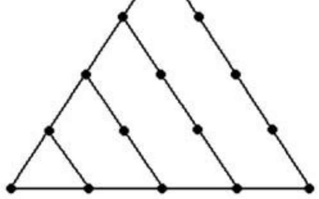
$$\frac{401}{165} \cdot \frac{110}{401} = \frac{110}{165} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 2;$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

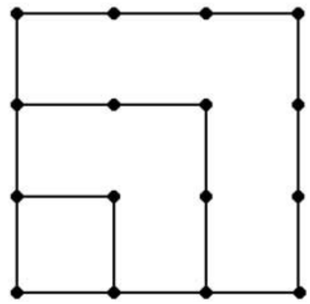
Ответ: 1.

Ещё в древнем мире учёные придумывали различные игры с числами. Например, Пифагор изображал числа точками, затем строил из точек различные фигуры и в результате пришёл к понятию фигурных чисел. Вот как он представлял треугольные числа.



Если начать с левой угловой точки и рассмотреть получившиеся треугольники, то количество точек, принадлежащих каждому из треугольников, образует последовательность чисел 1; 3; 6; 10; 15 и т.д. Возникает вопрос: как получается эта последовательность? Так как 3=1+2; 6 = 1 + 2 + 3 ; 10= 1 + 2 + 3 + 4 ; 15=1+2+3+4+5 и т.д., то видим, что каждое число есть сумма последовательных натуральных чисел.

Аналогично получаются и квадратные числа.



Из рисунка видно, что квадратные числа: 1; 4; 9; 16; 25 и т.д. Это квадраты последовательных натуральных чисел и, одновременно, — суммы последовательных натуральных нечётных чисел, так как 4=1+3; 9=1+3+5; 16=1+3+5+7 и т.д.

Учащимся предлагается дома по желанию нарисовать пятиугольные, шестиугольные числа и попробовать найти соответствующие закономерности.

Вопрос на дом: Какие числа называют вавилонскими?

Ответ: Вавилонскими называют тройки натуральных чисел, которые являются корнями уравнения $x^2+y^2=2z^2$. Например, такие тройки, как 1; 5 и 7 или 7; 13 и 17 и т.д.

Занятие 2. Треугольник Паскаля. Задачи с целыми числами

«Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир».
Немецкий поэт и мыслитель И.В. Гёте(1749–1832)

Историческая справка. В современном русском языке названия всех чисел до миллиарда составляются всего из 39 слов, обозначающих числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13,14,15,16,17,18,19,20,30,40,50,60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, миллион и миллиард. В основе словообразования всех чисел лежит число десять, поэтому наша система счёта называется десятичной.

Продолжая рассказывать о числах, не оставляю без внимания очень интересную конструкцию из чисел — «треугольник Паскаля». Хотя эта числовая таблица была частично известна в Индии ещё во втором веке до нашей эры, фигурировала затем в работах китайских и, позднее, среднеазиатских и европейских математиков, всё-таки наибольшую известность ей принесли работы французского математика семнадцатого века Блеза Паскаля.

Рассмотрим принцип составления и систему применения этого треугольника из чисел. По боковым сторонам этого равнобедренного треугольника стоят единицы. Вниз он может продолжаться до бесконечности. Внутри треугольника числа в каждой последующей строке располагаются между числами предыдущей строки и равны их сумме.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

и т.д.

Этот «арифметический треугольник» применяется для возведения в любую степень двучлена (бинома) $(a+b)$, поскольку в нём заключены биномиальные коэффициенты. Например, третья строка треугольника позволяет записать формулу квадрата двучлена:

$$(a + b)^2=1a^2 + 2ab + 1b^2.$$

Первое слагаемое содержит переменную a в той степени, в которую возводится вся сумма, затем степень a уменьшается на единицу, а степень b, наоборот, увеличивается на единицу. Продолжая таким образом, мы приходим к последнему слагаемому, которое содержит b в наибольшей степени. Например, по последней из записанных строк получим выражение для возведения бинома в седьмую степень:

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3 + \\ + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Умение построить и применить этот числовой треугольник позволит вспомнить формулы возведения суммы или разности двух выражений в любую степень. Для возведения в степень разности выражений необходимо чередовать знаки + и –. В дальнейшем вы ещё встретитесь с этой замечательной конструкцией из чисел не только в школе, но и в курсе высшей математики в университете.

Довольно часто мы встречается с числами и в текстовых задачах. Решим одну из них.

Задача. Произведение четырёх последовательных натуральных чисел равно 3024. Найти эти числа.

Решение:

Пусть наименьшее из чисел — x, тогда остальные три последовательных натуральных числа будут равны $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Учитывая условие задачи, составим уравнение:

$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=3024.$

Если умножить все четыре сомножителя, то получим уравнение четвёртого порядка, которое вы не сможете решить. Поэтому перемножим их попарно таким образом, чтобы два полученных выражения имели одинаковые слагаемые. Для этого объединим вместе первый множитель с последним и два средних:

$(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)=3024.$

Выполнив замену $y=x^2+3x$, получим следующее уравнение:

$$y\cdot(y+2)=3024,$$
$$y^2+2y=3024,$$
$$y^2+2y-3024=0,$$
$$Д=4+4\cdot3024=12100,$$
$$y_1=\frac{-2+110}{2}=54,$$
$$y_1=\frac{-2-110}{2}=-56.$$

Возвратимся к первоначальной переменной x:

$x^2+3x=54$ или $x^2+3x=-56$,

$x^2+3x-54=0$ или $x^2+3x+56=0$.

Из первого уравнения получаем корни $x=6$ и $x=-9$. Второе уравнение действительных корней не имеет, поскольку у него отрицательный дискриминант. Так как по условию искомые числа должны быть натуральными, то из полученных корней выбираем лишь 6. Итак, установлены четыре числа: 6, 7, 8, 9.

Ответ: 6; 7; 8; 9.

Как уже было сказано, много времени работе с числами посвящали древние математики. Рассмотрим задачу, которую включил в свою «Арифметику» великий древнегреческий учёный Диофант, и предложенное им решение.

Задача: Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96.

Решение Диофанта.

Из условия задачи ясно, что искомые числа не равны между собой, иначе их произведение было бы равно не 96, а 100. Значит, одно из них меньше половины 20, то есть $(10-x)$, а другое — больше, поэтому $(10+x)$. Тогда получим уравнение:

$(10-x)\cdot(10+x)=96,$

$100-x^2=96,$

$x^2=4,$

$x=2.$

Во времена Диофанта отрицательными числами ещё не пользовались, решать полные квадратные уравнения с помощью формул также не могли, поэтому был получен только один корень. Найдены числа 8 и 12.

Ответ: 8; 12.

Современное решение (предлагают ученики).

Например, пусть искомые числа x и y, тогда по условию задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=20, \\ x\cdot y=96. \end{cases}$$

Решая эту систему с помощью подстановки или применения теоремы, обратной теореме Виета, получим пары чисел (8;12) и (12;8).

Ответ: 8; 12.

Вопрос на дом: Какое число называли лудольфовым?

Ответ: Лудольфово число — приближённое значение числа «пи» с 35 верными десятичными знаками, найденное голландцем Лудольфом Ван Цейленом (опубликовано посмертно в 1615 году). Для поколения людей семнадцатого века, не пользовавшихся почти никакими вычислительными аппаратами, такое значение «пи» было сверхточным, поэтому и было названо по имени великого вычислителя. Придавая огромное значение своей работе, Лудольф завещал высечь на своём надгробном камне найденное им значение числа «пи».

Занятие 3. Комплексные числа

«Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание бытия с небытием».
Немецкий математик, физик и философ Г.В. Лейбниц (1646–1716)

Историческая справка. В 1545 году итальянский учёный Кардано столкнулся с проблемой решения некоторых систем уравнений и предложил ввести в рассмотрение числа, обладающие свойством: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=-a$. Он называл их «чисто отрицательными» или «софистически отрицательными», считал их бесполезными и старался по возможности не употреблять. Долгое время эти числа считались несуществующими, воображаемыми. Декарт назвал их мнимыми, Лейбниц — «уродом из мира идей».

С помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-то величины. Мнимым числам не было места и на координатной оси.

Но техника операций над мнимыми числами постепенно развивалась. В начале девятнадцатого века сразу несколько математиков (Вессель, Арган, Гаусс) предложили изображать комплексное число $z = a + bi$ точкой $M(a; b)$ на координатной плоскости, что позволило расширить область применения этих чисел. А названы они комплексными потому, что содержат действительные числа a и мнимые bi в комплексе.

Мы рассмотрим лишь самые простые формулы, понятия и операции из теории комплексных чисел, учитывая, что $i^2= -1$.

Если $b = 0$, то $z = a$ — действительное число; если же $a = 0$, то $z=bi$ — чисто мнимое.

Числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются равными, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, то есть равны их действительные и мнимые части.

Числа $z_1=a+bi$ и $z_2=a-bi$ называются сопряжёнными, их произведение равно a^2+b^2.

Суммой чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется число $z_1+z_2 = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$.

Разностью этих чисел называется число $z_1-z_2=(a_1-a_2) + i(b_1-b_2)$.

Произведение таких чисел выполняется по правилу умножения двух двучленов: $z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = =a_1a_2+ib_1a_2+ia_1b_2+i^2b_1b_2= =(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)$.

Деление комплексных чисел основано на применении основного свойства дроби: если числитель и знаменатель разделить или умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то значение дроби не изменится. При этом умножают на число, сопряжённое знаменателю дроби:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a^2+b^2}+\frac{i(b_1a_2+a_1b_2)}{a^2+b^2}.$$

Примеры:

1) $(7-3i)+(9i-10)=(7-10)+i(-3+9)= = -3+6i$;

2) $(4-5i)-(5-2i)=(4-5)+i(-5+2)= = -1-3i$;

3) $\frac{(2+3i)}{(3-2i)}=6+9i-4i-6i^2=12+5i$;

4) $\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+2i+i^2)}{(1+1)}= =\frac{2i}{2}=i$;

5) $\frac{(4-3i)}{(4+3i)}=\frac{(4-3i)(4-3i)}{(4-3i)(4+3i)}= =\frac{(16-24i+9i^2)}{(16+9)}=\frac{(7-24i)}{25}=0{,}28-0{,}96i$;

6) $$\frac{(-1+5i)^2(3-4i)}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i}=\frac{(-1+5i)^2(3-4i)5i+(10+7i)(1+3i)}{(1+3i)5i}=$$

$$=\frac{(1-10i+25i^2)(15i-20i^2)+10+7i+30i+21i^2}{5i+15i^2}=\frac{(-24-10i)(15i+20)+37i-11}{5i-15}=$$

$$=\frac{-360i-150i^2-480-200i+37i-11}{5i-15}=\frac{-523i-341}{5i-15}=\frac{(-523i-341)(-5i-15)}{(5i-15)(-5i-15)}=$$

$$=\frac{2615i^2+1705i+7845i+5115}{225+25}=\frac{2500+9550i}{250}=10+38{,}2i.$$

В примере 6) можно было умножить числитель и знаменатель каждой дроби на сопряжённое знаменателю, а затем сложить полученные дроби. Некоторые учащиеся по желанию решали таким образом.

1) Решить уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$.

Д$=16-4\cdot 29=16-116=-100=100i^2$,

$$x_1=\frac{(-4-10i)}{2}=-2-5i,$$

$$x_2=\frac{(-4+10i)}{2}=-2+5i.$$

Ответ: $-2-5i$, $-2+5i$.

Вопрос на дом. Когда тысячу тысяч стали называть миллионом?

Ответ: Слово «миллион» (буквально «тысячища») появилось в Италии в четырнадцатом столетии и обозначало первоначально 10 бочонков золота. В печати это слово появилось в сочинениях итальянского математика Луки Пачоли (1445–1514).

Занятие 4. Методы решения уравнений (метод замены и разложения на множители)

«Уравнение — это золотой ключ, открывающий все математические сезамы».

Современный польский математик
С. Коваль

Историческая справка. Обратимся лишь к одному небольшому эпизоду, связанному с историей алгебраических уравнений, а точнее с уравнением третьей степени вида $x^3 + px = q$.

В шестнадцатом веке в Италии были широко распространены математические поединки между учёными. В городе Болонья при большом стечении народа противники предлагали друг другу для решения определённое количество заданий по алгебре, которая в то время была наиболее популярна и называлась «Великим искусством», в то время как арифметика — «Малым искусством». Победитель такого диспута, решивший наибольшее число задач, как правило, награждался денежным призом, всеобщей славой и возможностью занять университетскую кафедру или другую должность.

Когда профессор математики Болонского университета Сципион дель-Ферро, одним из первых нашедший формулу для решения указанного уравнения, неожиданно скончался, тайну открытия знал лишь его ученик Фиоре, не очень способный математик. Тем не менее он решил воспользоваться секретом и вызвал на поединок одного из виднейших математиков Италии Николо Фонтана (Тарталья).

Последний понял, что его противник владеет формулой для решения уравнения третьей степени, и за 8 дней до диспута сам вывел нужную формулу. Благодаря своему усердию, он решил все предложенные ему задачи, в то время как Фиоре не смог решить ни одного задания. По иронии судьбы формула, о которой идёт речь, носит имя другого известного математика — Кардано. Тарталья, решивший сразу не раскрывать своего секрета, настолько затянул время, что уже третий учёный частично сам, а частью из записей дель-Ферро смог вывести формулу решения уравнения, чем и увековечил своё имя, хотя и не совсем честным путём.

Рассмотреть все методы и формулы, используемые при решении уравнений, на одном занятии невозможно, поэтому мы ограничимся сегодня лишь двумя методами. Первый из них — метод замены, применённый к решению уравнений высших степеней.

Примеры:

1) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Выполнив замену $x^4=y$, получим уравнение $y^2-17y+16=0$, корни которого $y=1$ или $y=16$. Тогда, возвращаясь к переменной $\boldsymbol{x}$, имеем два уравнения $x^2=1$ или $x^2=16$. Решая их, получаем корни исходного уравнения -1; 1; -4; 4.

Ответ: -4; -1; 1; 4.

2) $(x^2 + 5x)^2-2(x^2 + 5x)-24 = 0$.

Пусть $x^2 + 5x = y$, тогда $y^2 - 2y - 24 = 0$. Откуда $y = 6$ или $y = -4$. Возвращаясь к x, получим:

$x^2 + 5x = 6$ или $x^2 + 5x = -4$,

$x^2 + 5x-6 = 0$ или $x^2 + 5x + 4 = 0$,

$x_1 = -6, x_2 = 1$ или $x_1 = -1, x_2 = -4$.

Ответ: -6; -4; -1; 1.

3) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

Обозначим $x^2 + x + 1 = y$, тогда $x^2 + x + 2 = y + 1$. Значит, уравнение примет вид:

$y(y + 1) = 12$,

$y^2 + y = 12$,

$y^2 + y-12 = 0$,

$y_1 = -4, y_2 = 3$.

Возвратимся к переменной $\boldsymbol{x}$:

$x^2 + x + 1 = -4$ или $x^2 + x + 1 = 3$,

$x^2 + x + 5 = 0$ или $x^2 + x-2 = 0$,

Корни второго уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

В первом уравнении корни будут комплексными, поскольку Д = $= 1 - 4\cdot 5 = -19$, а $-19<0$. Тогда корни имеют вид:

$$x_1 = \frac{(-1-i\sqrt{19})}{2};\ x_2 = \frac{(-1+i\sqrt{19})}{2}.$$

Ответ:

$$-2;\ 1;\ \frac{(-1-i\sqrt{19})}{2};\ \frac{(-1+i\sqrt{19})}{2}.$$

Теперь рассмотрим метод разложения на множители. Здесь мы применим правило: произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Необходимо вспомнить, что способов разложения многочлена на множители вы изучили всего три: вынесение общего множителя, группировка, применение формул сокращённого умножения.

4) $x^3-4x^2-x + 4 = 0$.

Сгруппируем слагаемые, ориентируясь на коэффициенты:

$(x^3 - x) + (-4x^2 + 4) = 0$,

$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0$,

$(x^2 - 1)(x - 4) = 0$,

$x^2 - 1 = 0$ или $x - 4 = 0$,

$x = -1$ или $x = 1$, или $x = 4$.

Ответ: -1; 1; 4.

$x^4 + x^3 - 12x^2 = 0$.

Вынесем общий множитель x^2 и получим:

$x^2(x^2 + x - 12) = 0$,

$x^2 = 0$ или $x^2 + x - 12 = 0$,

$x = 0$ или $x = -4$, или $x = 3$.

Ответ: -4; 0; 3.

5) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$.

Сгруппировав первое слагаемое с последним, а второе с третьим и разложив первую скобку по формуле разности кубов, получим:

$(x^4 - x) + (-3x^3 + 3x^2) = 0$,

$x(x^3 - 1) - 3x^2(x - 1) = 0$,

$x(x - 1)(x^2 + x + 1) - 3x^2(x - 1) = 0$,

$x(x - 1)(x^2 + x + 1 - 3x) = 0$,

$x(x - 1)(x^2 - 2x + 1) = 0$,

$x = 0$ или $x = 1$, или $(x - 1)^2 = 0$.

Ввиду того, что корень $x = 1$ повторился три раза, его называют троекратным корнем. Таким же образом в квадратном уравнении с дискриминантом, равным нулю, грамотнее сказать, что уравнение имеет два равных корня или один двукратный, а не один.

Ответ: 0; 1.

Вопрос на дом. Какой смысл имел в математике символ **: :** ?

Ответ. Английский математик Оутред (1574–1660) выражал равенство $a/b = c/d$ записью $a,b::c,d$. Таким образом, это — знак пропорции. Этот знак применялся вплоть до девятнадцатого века.

Занятие 5. Теорема Виета

«Математические теоремы ...сводятся к небольшому числу простых истин».

Французский философ и математик Ж. Л. Даламбер

Историческая справка. Формулировка известной нам теоремы Виета во времена её открытия была совершенно не похожа на современную. Вот как сформулировал её сам Франсуа Виет (французский математик XVI века) в 1591 году: «Если $B + D$, умноженное на A минус A^2, равно BD, то A равно B и равно D». Поскольку A у Виета означала неизвестное, а B и D — коэффициенты при неизвестной, то в современной алгебре эта фраза выглядит следующим образом:

Если $(a + b)x - x^2 = ab$ или $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, то $x_1 = a, x_2 = b$.

Теорема Виета может быть обобщена для уравнения любой степени.

Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ имеет корни $x_1, x_2, ..., x_n$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_1 = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \text{.................................... ....} \\ x_1x_2x_3...x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Например, для уравнения получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

К сожалению, заданиям на применение такой замечательной теоремы в учебнике уделено мало внимания, в то время как свободное владение этой теоремой позволяет сэкономить достаточно много времени для решения более интересных задач. Особенно это наглядно в старших классах, когда различные виды уравнений после замены приводятся к квадратным (как правило, приведённым) и основное внимание должно быть сосредоточено на решении новых видов уравнений, а квадратные в большинстве случаев решаются устно.

Рассмотрим примеры, которые предлагались на вступительных экзаменах в вузы.

Примеры.

1. Не решая уравнения $x^2 + 13x + 45 = 0$, найти сумму квадратов его корней.

Решение:

Поскольку $x_1x_2 = 45, x_1 + x_2 = -13$, то $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = = (-13)^2 - 2{\cdot}45 = = 169 - 90 = 79$.

Задание можно было бы считать выполненным, но здесь допущена ошибка — не найден дискриминант. Так как $D = 169 - 4{\cdot}45 = = 169 - 180 = -11$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: во множестве действительных чисел задание не разрешимо.

• Предложенный пример наглядно демонстрирует, насколько внимательно нужно относиться к условию задачи, чтобы не упустить важных деталей. В заданиях для поступающих в вузы это внимание должно быть особенно обострённым.

2. Не решая уравнения $4x^2 - x - 4 = 0$, найти значения следующих выражений:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

г) $\frac{x_2}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_2}$.

Решение:

Так как D = 65, то преобразуем данное уравнение к приведённому $x^2 - \frac{1}{4}x - 1 = 0$.

Тогда $x_1 \cdot x_2 = -1$, а $x_1 + x_2 = \frac{1}{4}$. Значит, решение примет вид:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = -\frac{1}{4}$;

б) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{1}{16} + 2 = 2\frac{1}{16}$;

в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = -2\frac{1}{16}$;

г) $\frac{x_2}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_2} = \frac{x_2 + x_2^2 + x_1 + x_1^2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} = \frac{\frac{1}{4} + 2\frac{1}{16}}{1 - 1 + \frac{1}{4}} = \frac{2\frac{5}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$;

Ответ: а) $-\frac{1}{4}$; б) $2\frac{1}{16}$; в) $-2\frac{1}{16}$; г) $9\frac{1}{4}$.

3. Найти наибольшее значение параметра b в уравнении $x^2 + bx + 12 = 0$, при котором разность корней уравнения равна 1.

Решение:

По теореме Виета с учётом условия задачи и ограничения $b^2 - 48 \ge 0$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1x_2 = 12, \\ x_1 - x_2 = 1; \end{cases}$$

Сложим и вычтем первое и третье уравнения. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 = 1 - b, \\ 2x_2 = -b - 1, \\ x_1x_2 = 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-b}{2}, \\ x_2 = \frac{-b-1}{2}, \\ 1 - b^2 = -48; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 4, \\ x_2 = 3, \\ b = -7; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = -4, \\ b = 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Из двух полученных значений b наибольшим является 7.

Ответ: наибольшее значение параметра равно 7.

• Задания с параметрами должны присутствовать практически на каждом занятии, потому что их очень мало в действующих учебниках по алгебре и достаточно много в экзаменационных заданиях всех видов.

Вопрос на дом. Древний учёный Эпикур родился в 341 году до н. э. В 1959 году отмечали 2300 лет со дня его рождения. Правильно ли праздновали его юбилей?

Ответ. Неправильно, так как в 1959 году со дня рождения прошло 2299 лет.

Ставропольский край