Старинная задача о Кёнигсбергских мостах

Л.И. Дружинина

Имя задачи: Старинная задача о Кёнигсбергских мостах.

Автор: Дружинина Людмила Ивановна, учитель математики средней школы № 45 г. Калининграда.

Предмет: Математика.

Класс: 9.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Текст задачи. Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды? Многие кёнигсбержцы пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически во время прогулок. Но никому это не удавалось. Однако доказать, что это даже теоретически невозможно, тоже никто не мог. В 1736 г. задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, о чём он написал в письме итальянскому математику и инженеру Мариони. В этом письме Эйлер пишет о том, что смог найти правило, пользуясь которым легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них (в случае семи мостов Кёнигсберга это невозможно).

Осталась ли эта задача нерешённой и по сей день или же решение найдено? Попытайтесь найти ответ на этот вопрос.

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска;

б) Найдите и соберите необходимую информацию;

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию;

г) Сделайте выводы;

д) Сравните свои выводы с предложенным образцом.

Возможные информационные источники

Книги:

Детская энциклопедия. Т. 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика, 1972.

Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. 3-е изд., исправ. Минск: Вышейшая школа, 1978.

Интернет-ресурсы:

http://www.langeman.net

http://www.mathsisgoodforyou.com

http://www.krugosvet.ru

http://slovari.sosh.ru/slovo.

http://ru.wikipedia.

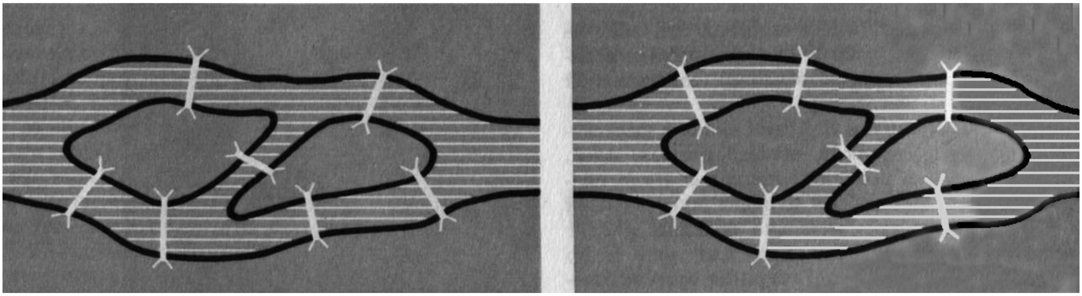
http://nauka.relis.ru

http://nuclphys.sinp.msu.ru/experiment/detectors/wchamber.htm

http://www.math.omsu.omskred.ru/info/learn/system/.

Культурные образцы

Детская энциклопедия. Т 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика, 1972.



Творчество Эйлера поражает исключительной продуктивностью. Он оставил более 800 трудов. Эйлер был не только самым плодовитым математиком всех времён. Он был необыкновенно разносторонним учёным, занимался всеми вопросами современной ему математики и её приложений. Некоторые отделы начал разрабатывать впервые. Теория чисел и теория движения Луны, геометрия и оптические приборы, алгебра и сопротивление материалов, тригонометрия и баллистика — всё это и многое другое интересовало его.

В геометрии Эйлер положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку — топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур. Приведём два замечательных открытия Эйлера, относящиеся к топологии.

Первое из них — решение задачи о мостах. Река образует острова, и через два речных рукава перекинуто семь мостов. Спрашивается: можно ли пройти все семь мостов так, чтобы каждый был пройден по одному лишь разу? Эйлер показал, что это невозможно, и рассмотрел более общую задачу, в которой речь идёт о любом числе местностей, как-либо разделённых рукавами рек и соединённых мостами. Задачу о мостах часто формулируют несколько по-иному, спрашивая, можно ли описать фигуру, составленную из отрезков прямых или кривых, так, чтобы каждое звено было пройдено один и только один, раз.

Другое открытие представляет важную теорему учения о многогранниках: Эйлер установил и доказал, что числа вершин **В**, рёбер **Р** и граней **Г** всякого многогранника, в котором нет «дыр», связаны формулой:

В + **Г** = **Р** + **2**.

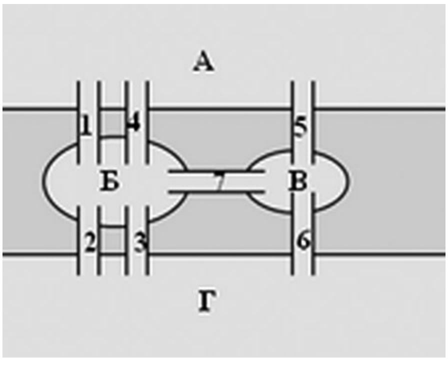
http://www.langeman.net
http://www.mathsisgoodforyou.com

Задача о мостах, Леонард Эйлер и теория графов

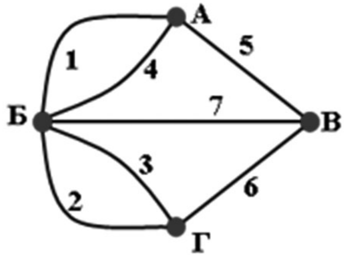
На упрощённой схеме части города (графе) мостам соответствуют линии (рёбра графа), а частям города — точки соединения линий (вершины графа). В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам:

- Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.
- Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
- Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кёнигсбергских мостов имел четыре нечётные вершины, следовательно невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды. (Если не прибегнуть к хитрости спрыгнуть в воду и доплыть до противоположного берега, что позволит решить задачу с мостами, но, к сожалению, изменит условие задачи с графами...).



Упрощённая схема мостов Кёнигсберга. Значение букв и цифр — см. комментарий к старинной карте Кёнигсберга



Граф кёнигсбергских мостов

Созданная Эйлером теория графов нашла очень широкое применение: например, её используют при изучении транспортных и коммуникационных систем, в частности, для маршрутизации данных в Интернете.

Леонард Эйлер. Задача о кёнигсбергских мостах

Решение задачи о кёнигсбергских мостах, точнее предложенный при этом метод, лежит в основе теории графов. А изложение этого решения можно найти в нескольких письмах Эйлера его коллегам. Например, в письме Карлу Готлибу Элеру от 3 апреля 1736 года. Ниже следует фрагмент этого письма, перепечатанный из книги: Леонард Эйлер. Письма к учёным. М.-Л., 1963.

Наконец, ты, славнейший муж, выражаешь желание ознакомиться с моим способом построения мостов; охотно представляю этот способ на твой суд. Ибо, когда ты попросил у меня решения этой проблемы, приспособленной к частному случаю Кёнигсберга, ты, вероятно, считал, что я предложил такого рода построение мостов, но я не сделал это, а только доказал, что такое построение вообще не может иметь места, и это следует принять вместо решения. Способ же мой является универсальным, так как с его помощью в любом предложенном мне случае этого рода я тотчас могу решить, следует ли строить переход с помощью отдельных мостов или нет, и в первом случае [могу установить], каким образом этот переход следует осуществить. Далее я изложу мой способ, а также опишу путь, которым я к нему пришёл.

Я рассмотрел произвольно взятую фигуру разветвления реки, а также мосты a, b, c, d, e, f, как это указано на **рис. 1**, и установил, что возможен переход, который я представляю следующим образом. Области, отделённые друг от друга водой, я называю буквами A, B, C, и когда предполагается переход через мосты из одной области в другую, [а именно] переход из A в B через мост или a или b, — наиболее удобно назвать [буквами] AB, из которых первая буква A будет обозначать область, из которой переходят.

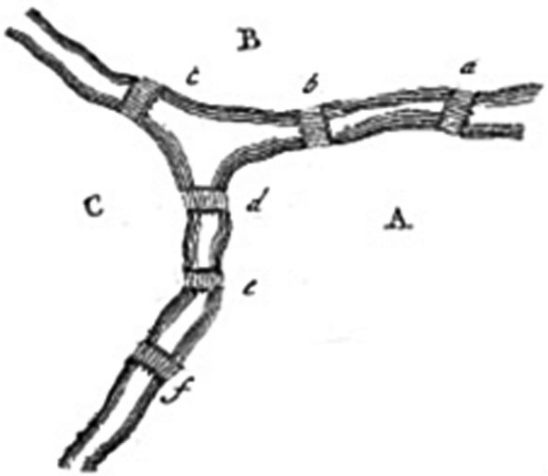
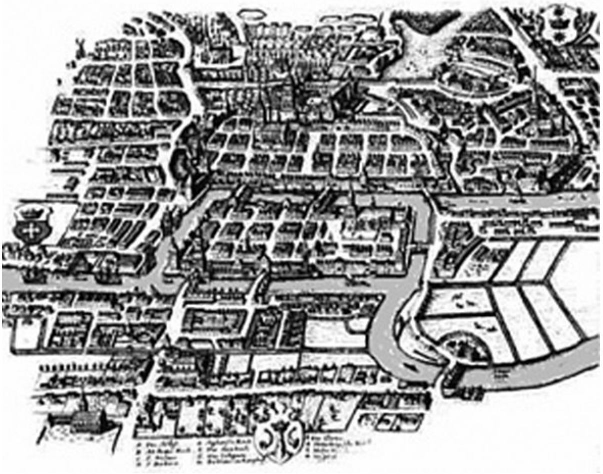


Рис. 1. Общая схема решения задачи (изображение с сайта www.mathsisgoodforyou.com)

Итак, ABCACAB будет определять переход, совершаемый через все мосты по одному разу; число этих букв должно быть на единицу больше, чем число мостов; это должно иметь место при любом возможном переходе описанным способом, в чём каждому легче убедиться самому, чем доказывать.

Теперь я рассматриваю, сколько раз в ряде букв A, B, C, A, C, A, B должны встретиться буквы ABC, о чём нужно судить по числу мостов, ведущих в каждую из областей. Так, к области A ведут пять мостов: a, b, c, d, e, и сколько раз буква A встречается в середине того ряда, столько раз встречаются два из этих мостов, ибо с одной стороны нужно перейти в область A, с другой стороны — выйти оттуда. Если A встречается или в начале, или в конце того ряда, тогда единственный переход моста соответствует A. Отсюда следует, что, если число мостов, ведущих в область A, будет нечётным, тогда переход через все мосты не может совершиться иначе, чем таким образом, чтобы он или начинался в области A, или заканчивался в области A.

Если число мостов, ведущих к A, будет чётным, тогда переход может быть совершён и без этого условия, чтобы начинаться или заканчиваться в A, но если он начинается в A, то должен будет там же и закончиться. Отсюда вытекает, что в ряде ABCACAB любая буква, за исключением первой



Кёнигсберг в XVIII веке (изображение с сайта gilco.inpg.fr)

и последней, обозначает переход, ведущий через два моста в область, обозначенную этой буквой.

Следовательно, надо держаться следующего правила: если на каком-либо рисунке число мостов, ведущих в некоторую область, будет нечётным, тогда желаемый переход через все мосты одновременно не может быть осуществлён иначе, как если переход или начинается, или заканчивается в этой области. А если число мостов чётное, отсюда не может возникнуть никакого затруднения, так как ни начало, ни конец перехода при этом не фиксируются.

Отсюда следует такое общее правило: если будет больше чем две области, к которым ведёт нечётное количество мостов, тогда желательный переход вообще не может быть совершён. Ибо представляется совершенно невозможным, чтобы переход и начинался, и заканчивался в какой-нибудь одной из этих областей. А если будут только две области такого рода (так как не могут быть даны одна область этого рода или нечётное число областей), тогда может быть совершён переход через все мосты, но с таким условием, чтобы начало перехода было в одной, а конец в другой из этих областей.

Когда в предложенной фигуре A и B есть области, к которым ведёт нечётное число мостов, а число мостов, ведущих к C, является чётным, то я считаю, что переход или построение мостов может иметь место, если переход начинается или из A, или из B, а если же кто-нибудь пожелает начать переход из C, то он никогда не сможет достигнуть цели. В расположении кёнигсбергских мостов я имею четыре области A, B, C, D, взаимно отделённые друг от друга водой, к каждой из которых ведёт нечётное число мостов (**рис. 2**).

Таким образом, поскольку есть больше чем две области, к которым ведёт нечётное число мостов, я утверждаю, что я доказал полную невозможность такого соединения мостов. Итак, с помощью очень лёгкого правила можно почти мгновенно определить для любой фигуры, допускается ли такого рода построение мостов, при котором переход будет происходить только через все мосты одновременно, или нет? Ибо возможным будет построение, если и не будет никакой области, или будут только две, к которым ведёт нечётное число мостов; в таких случаях начало перехода выбирается произвольно, но там же должен быть и конец перехода. В последнем же случае начало перехода должно иметь место в одной из тех областей, а конец — в другой. Построение невозможно, если будет более чем две области, к которым поведёт нечётное число мостов.

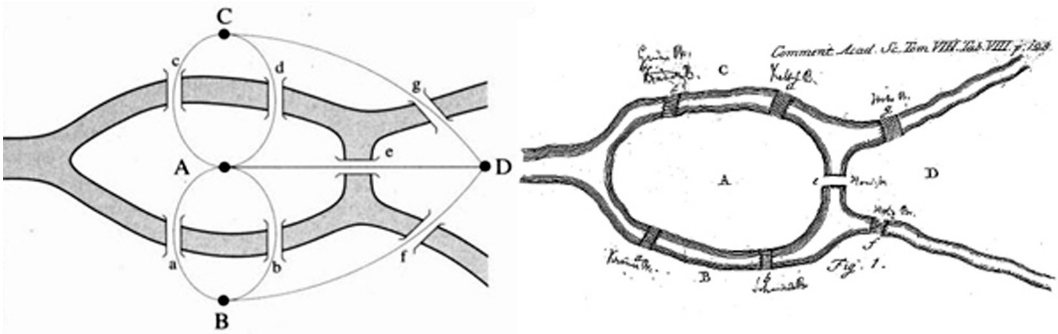


Рис. 2. Схема решения задачи о кёнигсбергских мостах (изображение с сайтов www.langeman.net и www.mathsisgoodforyou.com)

Следовательно, ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими [учёными]. Между тем ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, и что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу. Итак, я прошу тебя, если ты считаешь, что я способен нечто создать в этой новой науке, чтобы ты соблаговолил мне прислать несколько определённых, относящихся к ней задач…

Методический комментарий

***Цель данной работы*:** познакомить учеников с интереснейшей геометрической задачей, совершить заочное путешествие по мостам старого Кёнигсберга, подготовив тем самым учащихся к восприятию созданной Эйлером, которая нашла очень широкое применение. Знакомство с задачей о мостах расширяет кругозор школьников, повышает интерес к предмету. Учащимся продвинутого уровня предоставляется возможность ознакомиться с другими существующими источниками по этой теме, а также реализовать собранный материал в проектной деятельности.

В ходе работы можно порекомендовать направляемый учителем выбор ключевых слов для информационного поиска. Слова «Кёнигсберг», «мосты», «Эйлер Леонард» — ключевые для решения данной задачи. С их помощью можно отыскать достаточно много информации и, проанализировав её, ответить на поставленные для решения задачи вопросы и сделать выводы.