К.Н. Лунгу, профессор кафедры Дифференциальных уравнений Московского Государственного Открытого университета, кандидат физико-математических наук

ПОНИМАНИЕ КАК СИСТЕМНЫЙ КОМПОНЕНТ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

Вопрос о понимании возникает всегда, когда речь идёт об изучении какого-либо предмета, тем более математики. Каждый преподаватель стремится объяснить материал так, чтобы обучающиеся понимали его. Предлагая решить задачу, он намерен добиться того, чтобы решение было понято. Успешность обучения и усвоения знаний определяется пониманием предмета. Можно приводить много примеров применения слов «понять» и «понимание» при описании образовательной ситуации. Едва ли будет преувеличением сказать, что понимание есть одна из главных целей обучения.

Предлагая учащемуся самостоятельно решить задачу, преподаватель рассчитывает на то, что задача будет понята, а решение будет правильным. К этому его надо готовить, для чего есть возможности и условия, зависящие от них обоих. В статье предлагаются некоторые приёмы проектирования деятельности по достижению понимания для тех, кто этого хочет добиться.

Категория «понимание» — одна из важнейших в теории обучения, она занимает центральное место в этапах усвоения учебно-познавательной деятельности. Согласно В.П. Симонову[1], понимание представляет собой звено в процессе обучения и усвоения, который происходит по следующей цепочке

Узнавание ⇒ Понимание ⇒ Запоминание ⇒ Элементарные умения и навыки ⇒ Перенос.

В теории обучения выдвигаются различные формулы, в которых фигурирует понимание. Например, преподавательские усилия (ПУ) реализуются по формуле трёх «П»: **ПУ = Помнит + Понимает + Применяет**, а успешность обучения (УО), — по правилу четырёх «П»: **УО = Принимает + Понимает + Помнит + Применяет**. В полный цикл усвоения учебно-познавательной деятельности разные авторы вкладывают разное число компонент, например: принятие, осмысление, понимание, закрепление, запоминание, обобщение, систематизация, применение. Понимание входит в таксономию целей Б. Блума (знание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка).

С философской точки зрения «понимание» — присущая сознанию форма освоения действительности, означающая раскрытие и воспроизведение смыслового содержания

[1] *Симонов В.П.* Оценка качества образования. М, 2007.

предмета. Развитие понимания происходит от «предварительного понимания», задающего смысл предмета понимания как целого, к анализу его частей и достижению более глубокого и полного понимания, в котором смысл целого подтверждается смыслом частей, а смысл частей — смыслом целого[2].

С психологической точки зрения, «понимание» — состояние, выражающее правильность принятого решения и сопровождаемое чувством уверенности в точности восприятия или интерпретации какого-либо события, явления, факта. Л.Б. Ительсон подробно описывает достижение состояния понимания на примере исследования совокупности различий в двух системах объектов.

Результат решения задачи он интерпретирует так: «...отношение отношений мы не воспринимаем, не представляем, не знаем. Мы его **понимаем**. Понимание — оно не сводится ни к тому, что мы видим, ни к тому, что мы знаем и смыслим»[3]. Тем самым понимание рассматривается в контексте решения задач и с психологической точки зрения «понимание» представляет некоторое состояние, приходящее на самом деле до полного решения задачи, а с его помощью конструируется само решение.

С. Л. Рубинштейн отмечал, что понимание как процесс, как психическая мыслительная деятельность — это дифференцировка, анализ вещей, явлений в соответствующем контексту качестве и реализация связей (синтез), образующих этот контекст.

В книге А.А. Ивина «Искусство правильно мыслить» автор уделяет внимание термину «понимание» в таком контексте: «Понимание принципов мыслительной деятельности, несомненно, одно из ценных наших знаний. Оно делает ум максимально точным и ювелирно тонким в своём анализе, беспощадным к любой фальши и нелогичности, неизменно последовательным в своих выводах». Таким образом, понимание представляет собой многоаспектное, системное явление: понимание — цель, которую надо добиться в изучении и усвоении чего-либо; понимание — средство достижения этой цели; понимание — результат использования приёмов мыслительной деятельности; понимание — фильтр, отделяющий лишнее от главного; понимание — событие, которое не каждого посещает; понимание — состояние, которого надо добиться в исследовании чеголибо; понимание — феномен, который не каждому доступен; понимание — счастье, когда оно оказалось верным, а поступок выполнен правильно; понимание — умение объяснить чтолибо содержательно и лаконично.

По мнению Г.Б. Гутнера[4], под достижением понимания, подразумевается некоторый набор мыслительных способностей, апелляция к которым неизбежна, если при объяснении чего-либо мы рассчитываем получить ответную осмысленную реакцию от собеседника, в частности, слушателя, обучающегося. Эти мыслительные способности И. Кант в своей «Критике чистого разума» именовал как «рассудок», «воображение», «суждение».

Обеспечение понимания сложного математического материала является важной психолого-методической задачей. К сожале-

[2] Философский словарь, изд. 6. 1991. С. 350.

[3] *ИтеЕльсон Л.Б.* ЛЕекции по общей психологии. Минск: Харвест, 2003. С. 752.

[4] *Гутнер Г.Б.* Событие понимания в математическом образовании //Математика. Компьютер. Образование. Вып. 5. Ч. 1. М.: Прогресс-Традиция, 1998. С. 148 –152.

нию, она недостаточно разработана методически, хотя её актуальность очевидна.

Объяснение и понимание — две специфические операции мышления, которые дополняют друг друга. Они сопровождают человека всю жизнь. Понимание связано с усвоением нового содержания и включением его в собственную систему понятий, знаний и представлений.

Одной из наиболее распространённых причин непонимания является отсутствие сосредоточенности и внимательности человека к объекту понимания. Можно утверждать, что внимание есть необходимое условие понимания. Внимание есть то особое состояние сознания, которое обеспечивает направленность и сосредоточенность познавательной и практической деятельности человека на отдельном объекте или действии. Внимание выполняет также функцию «отключения» сознания от всех других объектов внешнего и внутреннего мира человека. По словам К.Д. Ушинского, «внимание есть именно та дверь, через которую проходит всё, что только входит в душу человека из внешнего мира».

Преподаватель, объясняющий учебный материал, должен учитывать состояние слушателя и закономерности понимания для того, чтобы он был понят. Он должен прежде всего организовать внимание слушателя.

В психологии принята трактовка мышления, выдвинутая С.Л. Рубинштейном: «Процесс мышления — это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; это затем абстракция и обобщение, являющиеся производными от них. Закономерности этих процессов и их взаимоотношения друг с другом суть основные закономерности мышления»[5]. По поводу отношения мышления к обучению С.Л. Рубинштейн писал: «Осмысление материала включает в себя все мыслительные процессы: сравнение, сопоставление и различение, анализ и синтез, абстракцию, обобщение и конкретизацию, переход от конкретного, единичного к отвлеченному, общему и от абстрактного, общего к наглядному, единичному — словом, всё многообразие процессов, в которых совершается раскрытие предметного содержания знания и в его всё более глубоких и многосторонних взаимосвязях».

Таким образом, мышление осуществляется посредством системы так называемых приёмов мыслительной деятельности: синтез, анализ, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация, классификация, систематизация. Многими педагогами и методистами признано, что обучение математике можно осуществить посредством формирования описанных приёмов, среди которых первые два являются ведущими (другие можно выразить в виде сложных, нелинейных комбинаций анализа и синтеза).

В методике преподавания математики приёмы мыслительной деятельности разработаны достаточно полно (В.А. Гусев, В.Г. Болтянский, Ю.М. Колягин, Н.А. Сёмина и др.).

Достаточно сложные задачи можно решить, используя суперпозиции этих приёмов «синтез через анализ» и «анализ через синтез». На этой основе построены системы задач, способствующих формированию приёмов мыслительной деятельности — синтеза и ана-

[5] *Рубинштейн С.Л.* О мышлении и путях его исследования. М., 1958.

лиза. Мы считаем, что анализ и синтез составляют основу, без которой достичь состояние понимания нельзя.

Практика обучения школьников приёмам мыслительной деятельности указывает на некоторое безразличие, эмоциональную отстранённость субъекта от решаемой задачи, от предмета деятельности. Сами приёмы не вызывают у человека эмоций, обучающийся безразлично использует попеременно сначала один приём, затем другой и т. д. Как только преподаватель прибегает к вопросам: «Понимаем?», «Понимаем, что делаем?», «Понимаем, откуда получен результат?», «Понимаем, что собираемся делать?» и т.п., — у тех же безразличных учащихся меняется настроение: оно улучшается, если деятельность сопровождается пониманием, и ухудшается — в противном случае. Понимание как процесс управляет мышлением, оно координирует последовательностью выполнения приёмов мыслительной деятельности и достигается в результате их использования. Понимание сопровождается позитивным эмоциональным состоянием.

Понимание — это способность субъекта вникнуть, уяснить смысл и значение, замысел чего-нибудь; это состояние сознания, когда субъект осознал изучаемое, пришёл к выводу, аргументировал его и раскрыл форму и содержание того или иного объекта или понятия, явления, осуществил его координацию с другими объектами, сознательно использовал способы действия в их познании и в решении поставленных перед ним проблем.

В этом пункте рассмотрим дидактический и психолого-методический аспекты понимания, т. е. речь идёт о выборе задачи и методики её решения, приводящих к достижению состояния понимания. Состояние понимания освещается с позиции субъекта учения, обучающегося, решающего задачу, т. е. рассматривается процесс достижения им события и состояния понимания в ходе поиска решения задачи. Этот процесс можно переносить на преподавателя как на объясняющего: он должен вербально объяснять процесс выполнения тех же действий, делая соответствующие паузы для того, чтобы убедиться в том, что его слова приводят к адекватной реакции у слушателя.

Задача 1. Числа 1, 2, 3, 4, ..., 3171 написаны в указанном порядке на окружности. Сначала вычёркиваются те числа, которые занимают нечётные места, затем среди оставшихся вычёркиваются те, которые лежат на нечётных местах, затем опять вычёркиваются числа, стоящие на нечётных местах. И так далее, пока не останется одно число. Указать это число.

Субъект легко ориентируется в ситуации, возникшей после первого и после второго действий вычёркивания, но следующие приводят к определённому хаосу. Сложность связана с «непониманием» структуры остающихся чисел после очередного вычёркивания. «Понимание» направляет мыслительные действия на структурирование соответствующих множеств чисел, что приводит к их «кодированию».

Исходную систему можно кодировать параметром n: 1, 2, ..., 3171. Поскольку натуральные числа можно представить в виде объединения чётных ($2m$) и нечётных ($2m + 1$), то после первого зачёркивания нечётных чисел остаются чётные: $n = 2m$: 2, 4, ..., 3170. Этим закодировано первое оставшееся множество. Процесс понимания требует перекодирования следующего шага и множества (после второго вычёркивания): число m можно представить как объединения чисел вида $2к$ и $2к + 1$. После второго вычёркивания остаются числа вида $n = 2m = 4к$: 4, 8, 12, ..., 3168 (каждое четвёртое). После третьего зачёркивания остаются чётные по отношению к параметру к: $к = 2p$, т. е. $n = 8p = 2^3p$: 8, 16, 24, ..., 3168 (3168 делится на 8) и т. д. Так происходит осознание эффективности действий, их свёртывание и понимание правильности пути решения. Все эти шаги сопровождаются хорошим настроением того, кто решает задачу. С каждым шагом настроение улучшается, поскольку он «понимает» правильность суждений.

Событие понимания приходит на десятом шаге: $2^{10}s$: 1024, 2048, 3072, когда виден последний шаг. Состояние понимания, выражающееся сильным эмоциональным чувством, достигается после вычёркивания крайних чисел.

Приём достижения состояния понимания — это *структурирование* соответствующих систем чисел и *систематизация* шагов решения задачи, а *кодирование* — это технология структурирования, позволяющая оптимизировать процесс решения.

Задача 2. К данному множеству чисел прибавить ещё два числа и составить формулу для общего члена a_n последовательности:

а) 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57;

б) 5, 23, 59, 119, 209, 335, 503.

Для решения задачи необходимо установить какие-либо связи между членами (числами) каждой системы.

Никаких связей между исходными числами не обнаруживается. Единственное, что подсказывает понимание — заменить эти системы другими, так что среди новых чисел обнаружится что-то полезное. Числа первой системы уменьшим на 1, а числа второй системы увеличим на 1:

а) 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56;

б) 6, 24, 60, 120, 210, 336, 504.

Положение благоприятное: новые числа можно разложить на множители и эти множители — сгруппировать так, чтобы в них обнаружилась бы видимая закономерность. Можно это делать, например, так:

а) 1„2, 2„3, 3„4, 4„5, 5„6, 6„7, 7„8;

б) 1„2„3, 2„3„4, 3„4„5, 4„5„6, 5„6„7, 6„7„8, 7„8„9.

Этим достигнуто событие понимания, а окончательные формулы: а) $a_n = n(n + 1) +1$; б) $a_n = n(n + 1)(n + 2) - 1$ подтверждают достижение состояния понимания. А теперь можно добавлять к данным числа и два, и любое их количество. В этом случае приёмом, приводящим к пониманию, было *преобразование условий* задачи и последующая структуризация.

Задача 3. Составить общий член последовательности, заданной рекуррентной формулой:

а) $a_{n+1} = 2a_n$; $a_1 = 3$

б) $a_{n+1} = 2 + a_n$; $a_1 = 3$

в) $a_{n+1} = 2a_n + 3$; $a_1 = 3$.

а) Читая первое условие: каждый следующий член в два раза больше предыдущего, а первый равен 3, понимаем, что это числа: 3, 6, 12, 24, 48, ..., которые принято называть геометрической прогрессией — $a_n = 3 \times 2^{n-1}$.

б) Такое же прочтение условий задачи приводит к пониманию системы чисел 3, 5, 7, — арифметическая прогрессия: $a_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$.

в) Субъект должен говорить себе всё то, что он видит и понимает: имею комбинацию случаев а) и б). Значит (неуверенно), результат нужно (можно ли?) представить в виде комбинации прогрессий (как это делать?). Кроме этого появляется гипотеза (пока не гарантированная, но сомнение усиливает смелость), что в a_n, согласно а), должна входить геометрическая прогрессия 2^{n-1}. Тогда результат можно (можно ли?) представить в виде $a_n = a \times 2^{n-1} + bn + c$. А как найти неизвестные a, b и c? По-видимому, нужно использовать тот факт, что при всех $n = 1, 2, 3$, и т. д. члены последовательности, получаемые по условию в) и по предполагаемой формуле совпадают (думаю, что так должно быть).

По формуле в) имею: $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 21$, $a_4 = 45$ и т.д.

По предполагаемой формуле имею: $a_1 = a + b + c$; $a_2 = 2a + 2b + c$; $a_3 = 4a + 3b + c$ (достаточно). Приравниваю эти выражения к тем числам. Получаю систему (уверенность возрастает, настроение улучшается, событие понимания — близко) $a + b + c = 3$; $2a + 2b + c = 9$; $4a + 3b + c = 21$, из которой $a = 6$; $b = -3$; $c = 0$. (**понял!?**). А тогда $a_n = 6 \times 2^{n-1} - 3n$.

Приёмом достижения понимания было *преобразование отношений*. Приведённые задачи относятся к теме «Числовые последовательности», относящейся к элементарной и высшей математике, и могут быть решены любым школьником. Следующая задача относится к «Комбинаторике», которая введена в школьную программу.

Задача 4 (о светофорах). На сложном перекрёстке (на выезде из Братеево) движение регулируется десятью светофорами. В некоторый момент их координация нарушилась, каждый светофор горит каким-то одним светом — красным, жёлтым, зелёным. Сколько вариантов освещения может при этом быть в данный момент времени?

Многие учащиеся рассуждают «от данного момента»: в данный момент один светофор может гореть красным (К) светом, другой — жёлтым (Ж), третий — зелёным (З), остальные — как угодно, и на этом «сумбуре и хаосе» рассуждение прекращается, понимание не достигается, настроение ухудшается.

Понимание должно достигаться за счёт структуризации и систематизации этого хаоса. Для одного светофора возможны три состояния (комбинации) (К, Ж, З). Для каждого из трёх состояний одного светофора возможны три состояния другого, а тогда число состояний двух светофоров в три раза больше, чем число состояний одного. Все эти состояния могут быть выписаны в виде таблицы, например, так .

$$\begin{pmatrix} (КК) & (КЖ) & (КЗ) \\ (ЖК) & (ЖЖ) & (ЖЗ) \\ (ЗК) & (ЗЖ) & (ЗЗ) \end{pmatrix}$$

Эта таблица (матрица) представляет собой структурную математическую модель задачи.

Число состояний, вариантов работы двух светофоров, равно $3 \times 3 = 9$ (это уже хорошо, намечен правильный ход понимания, настроение улучшается). При каждом из этих 9 состояний возможны 3 состояния третьего светофора, а значит совместное число их состояний — в три раза станет больше, т. е. $3 \times 3 \times 3 = 33$. Четвёртый светофор увеличивает число комбинаций в 3 раза (уже почти понятно). И так далее. Для всех 10 светофоров возможно 3^{10} комбинаций.

Приёмом достижения состояния понимания здесь было *моделирование*.

Приведённые задачи показывают, что объём предварительной информации, необходимой для их решения, минимален. Цель задач — научить мыслить, искать путь к пониманию связей условий и требований задачи. Событие понимания достигается в результате схватывания некоторой структуры, содержащей совокупность отношений между всеми фактами, фигурирующими в данной задаче.

Во многих задачах схватывание такой структуры удаётся не сразу, поскольку она складывается в результате использования большого объёма знаний, умений, проб. Структура как компонент системы достигается в результате систематизации всех её элементов и отношений между ними.

Покажем, как с этим справляется учащийся, добиваясь достижения состояния понимания при решении геометрической задачи.

Задача 5. Диагональ *AC* выпуклого четырёхугольника *ABCD* является биссектрисой угла *A*. Центр окружности, проходящей через точки *B*, *C* и *D* расположен на окружности, проходящей через точки *B, A* и *D*. Найти *AB*, если *AC* = 6, *BC* = 8, *AD* = 3.

Процесс пони77мания должен происходить за счёт обнаружения элементов системы в поиске дискурсивной конструкции, означающей «я знаю, как решить задачу».

Строим предварительный чертёж. На рис. 1 показан четырёхугольник *ABCD*, соответствующие окружности, *AC* — биссектриса угла *A*, т.е. –*CAD* = –*CAB*. Дано: *AC* = 6, *BC* = 8, *AD* = 3. Найти *AB*.

Решение задачи предполагает понимание того, в каких связях, отношениях находятся отрезки AD, AC, CB и AB.

Таких связей на рис. 1 нет. Необходимо привлекать другие элементы и отношения: точки *A, B, C, D* лежат на окружностях, а значит, в качестве элементов задачи можно использовать хорды окружностей, вписанные, смежные и вертикальные углы, углы с вершинами внутри окружности, треугольники, линию центров, диаметры Рис 1. окружностей. Эти элемент нужно сначала получить, поэтому нужны дополнительные построения.

На рис. 1 привлекают два треугольника — *ABC* и *ACD*. Углы с вершинами *B* и *C* вписаны в большую окружность. Стоит их анализировать, поэтому выполним новое построение, приводящее к рис. 2: провели линию центров oO,

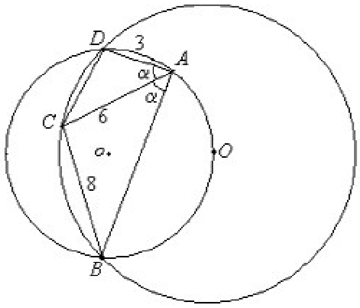

Рис. 1

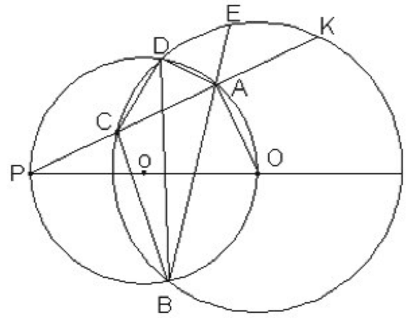

Рис. 2

соединили *B* с *D*, *A* с *O* продолжили *AC*, *BA*. Заметим, что можно строить рисунок, на котором точки *B, C, D* могут на меньшей дуге, а *B, A, D* на большей дуге окружности.

Появление новых элементов стимулирует интерес к выявлениювозможных связей между ними.

В качестве таких связей выступают: соотношения между вписанными углами и дугами окружностей, на которые они опираются, соотношения между сторонами подобных треугольников, между отрезками хорд, теоремы Пифагора, синусов, косинусов.

Визуальный анализ чертежа наводит на мысль о том, что треугольник *AOP* прямоугольный (гипотеза 1), если *PO* — диаметр (возможно) малой окружности. Рис. 2.

Возможно, что углы *DCK* и *CBE* как вписанные в большую окружность, равны и в таком случае треугольники *ABC* и *ACD* могли бы быть подобными (гипотеза 2). Таким образом, эти дополнительные построения приводят к предположению (предварительное понимание) о возможности решения задачи методом подобия (гипотеза 3). Проверим это.

1) Вписанные в меньшую окружность углы *DAP* и *BAP* равны по условию, а значит равны и дуги *DP* и *BP*, на которых эти углы опираются, $\cup DP = \cup BP$. Из симметрии точек *B* и *D* относительно линии центров следует, что точка *P* пересечения прямой *AC* с меньшей окружностью лежит на линии центров оО. Тем самым ΔAOP — прямоугольный. Решающий испытывает удовольствие от того, что оправдалось его предположение (гипотеза 1).

2) Отрезок *CK* является хордой большой окружности, а отрезок *OA* принадлежит радиусу этой окружности, поэтому он перпендикулярен хорде *CK*, а точка *A* делит отрезок *CK* пополам, т.е. $CA = AK$.

3) Далее, $\angle CAB = \angle KAE$ (вертикальные углы), $\angle CAD = \angle CAB = \angle KAE$. Продолжение радиуса *OA* делит угол ΔAE пополам, а тогда и дугу *DE*, и хорду *DE* делит пополам, значит ΔDAE — равнобедренный, т.е. $DA = AE$. Тем самым $DDAC = DEAK$, а тогда дуги *DC* и *EK* равны. Отсюда следует, что дуги *CE* и *DK* равны, следовательно равны и углы на них опирающиеся: $\angle ACD = \angle ABC$ (гипотеза 2).

В этот момент происходит позитивный эмоциональный взрыв: **Ура! Понятно!** Этим приближается событие понимания, хотя до окончания решения далеко, но решающий чувствует, что он почти понимает, как дальше решать задачу. Поиск подкрепления предчувствия продолжается.

4) Треугольники *ACD* и *ABC* подобны (по двум углам) и в первом известны две стороны, а во втором — одна. Этим достигается событие понимания. Пропорция: $AD:AC = AC:AB$, т.е. $3:6 = 6:AB$, позволяет получить $AB = 12$, и задача решена.

Создавая пространственную конструкцию, субъект делает реальной связь большого числа геометрических элементов и понятий. Конструирование единичной конфигурации показывает, что суждение действительно задаёт правило для способности воображения и в соответствии с ним может быть построен конкретный понятный объект.

Мы ограничимся приведённым способом решения, а значит и одним вариантом достижения состояния понимания, хотя задача допускает не менее трёх способов решения.

Вопросы технологизации и оптимизации процесса понимания решаются при помощи технологических карт, моделирующих процесс обучения, и информационных карт. Основой обучения «пониманию» являются приёмы умственной и практической деятельности, а также дидактические принципы подбора задач: доступность, однотипность, разнообразие, повторение, преемственность, непрерывность и последовательное нарастание трудности.

Поиск форм и способов повышения профессиональной компетентности преподавателя всегда связан с проектированием методической системы обучения, с организацией ситуаций понимания во взаимодействии преподаватель — учащийся, учащийся — учащийся, учащийся — содержание обучения. Основная задача педагогической деятельности преподавателя состоит не в том, чтобы довольствоваться передачей информации и знаний, а в том, чтобы находить надлежащий подход и язык для достижения состояния понимания у обучающихся. Способность понимания специально не развивается ни в средней, ни в высшей школе. Если явно направить образовательный процесс на понимание, а не на запоминание материала, то эффективность образования возрастает существенно: «Образование — не то, чему учили, а то, что при этом понял». Важно, чтобы параллельно с учебным предметом учить пониманию.

Задачи для проектирования собственной системы обучения можно найти в пособиях[6].

[6] *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. Ч. 1 и 2. М.: Айрис-Пресс, 2006; Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Задачи по математике. М.: МГОУ, 2000.