Исследовательские задачи при обучении математике в школе «Интеллектуал»

Сгибнев Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, учитель математики
Шноль Дмитрий Эммануилович,
заведующий кафедрой математики
ГОУ школа-интернат «Интеллектуал», г. Москва

Наш журнал продолжает публиковать методические материалы, ставшие лауреатами Конкурса образовательных разработок, пособий, проектов и программ по обеспечению исследовательской деятельности учащихся. В этом номере журнала представлены материалы, в которых раскрывается значение использования исследовательских задач на уроках математики. Показано, как работает ученик и учитель в условиях исследовательского подхода к обучению.

> Математика — это *человеческая деятельность*; сравнительная ценность задач и правильный их выбор в математике гораздо более важны, чем способность совершать сложные действия в уме.
>
> *Малыши и математика*
> *А. К. Звонкин*

> Что означает владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности.
>
> *Математическое открытие*
> *Д. Пойа*

Зачем нужны исследовательские задачи

При работе над научной проблемой важен не только результат, «ответ» на конкретный вопрос, но и изобретенный по ходу исследования метод, который можно применить при решении других задач. Если повезёт, накопленные результаты и методы складываются в единое целое — новую математическую теорию, и мы получаем цепочку развития реального исследования: задача — решение — метод — теория. При обучении же в школе (да и в университете) последовательность, как правило, обратная: ученику излагают в готовом виде теорию, из неё выводят методы решения, а потом предлагают решить определенное количество задач для овладения методом и усвоения теории. Редко перед школьником или студентом изначально ставят задачу, метод решения которой ему неизвестен.

Приведены примеры исследовательских задачи по математике из практики школы «Интеллектуал».

Итак, изучать материал можно в двух противоположных направлениях: «от задач» и «от теории». Сравним эти способы по нескольким параметрам.

Время. Способ «от теории» требует гораздо меньшего времени для *формального* овладения материалом, так как сразу отсекает ложные и тупиковые ходы.

Надёжность. Способ «от задач» срабатывает далеко не всегда и не со всеми, так как требует от ученика постоянной активности. Способ «от теории» гораздо надёжнее.

Системность. При изучении части законченной теории есть возможность сразу расставить верные акценты, выделить существенные связи. При самостоятельном построении теории «от задач», системные связи внутри теории не всегда сразу видны, пропорции важного/второстепенного могут быть нарушены.

Традиция также на стороне способа «от теории», достаточно посмотреть структуру любого учебника математики.

Особняком стоит «метод листочков», при котором учитель не объясняет теоретический материал, а ученик изучает тему, самостоятельно решая предложенные в определенной последовательности задачи. «Метод листочков» имеет существенные преимущества перед традиционным обучением, однако и он отражает далеко не все стороны реального научного исследования.

Когда учёный строит новую теорию, большую роль играет его умение *выбирать* значимые факты и перспективные направления (Анри Пуанкаре считал, что это умение основано на эстетическом чувстве). Когда ученику дают теорию в готовом виде, это умение не развивается, поскольку выбирать почти ничего не приходится. Обучая «от теории», мы воспитываем «пользователя» науки, который может успешно *применять* известные методы решения в известных ситуациях. Обучая «от задач», воспитываем «творца» науки, способного *изобретать* новые методы решения, ставить новые задачи. Таким образом, у детей, одарённых математически, появляется возможность углубляться в предмет не за счёт пассивного изучения сложной теории, а за счёт активного самостоятельного движения в том же самом материале.

По большому счёту, если ученик не освоил ни одной темы способом «от задач», нельзя сказать, что он понимает, *как устроена* математика. Если лес видел только с шоссе, то, войдя в него, тут же заблудишься.

Конечно, обучение «от задач» требует индивидуального подхода, в отличие от обучения «от теории», поэтому на уроках могут быть введены только некоторые элементы такого обучения.

Мы опишем особый жанр учебной работы, в котором реализуется способ обучения «от задач». Мы называем его жанром учебных исследовательских задач.

Исследовательские работы ведутся в школе «Интеллектуал» в течение трёх лет. В данной статье мы попытались суммировать и осмыслить свой опыт работы в этой области.

Как работает ученик

1. Ученик выбирает тему. Темы (исследовательские задачи) вывешиваются в начале года, каждый может выбрать что-то из предложенного или придумать собственную тему (у нас это редкий случай).
2. Ученик выбирает руководителя. Некоторыми темами руководят конкретные преподаватели, поэтому ребенок сразу выбирает себе и наставника. Школьник также может выбрать себе руководителя. Естественно, учитель может отказаться работать с пришедшим учеником (причиной может быть большая загруженность, специфика темы и т.п.), хотя у нас таких случаев пока не было.
3. Ученик разбирается в задаче. Задача почти всегда сформулирована так, чтобы можно было самостоятельно начать ее решать. При первой договоренности о сотрудничестве руководитель говорит примерно следующее: «Когда сделаешь в задаче всё, что сразу сможешь, придешь показать — обсудим».
4. Ученик читает литературу. Здесь всё зависит от решаемой задачи и от осведомленности руководителя. Иногда руководитель может порекомендовать книгу или статью, иногда ученик ищет необходимую литературу сам. Главное, что у него *нет обязанности* что-то изучить по теме, он обращается к литературе тогда, когда все собственные резервы исчерпаны, а решение еще не найдено.
5. Ученик решает задачу (часть задачи). Начинается индивидуальная работа над решением.
6. **Ученик оформляет решение.** Для многих это трудная часть. Хорошо, если развернутый ответ пишется по ходу работы и сразу обсуждается с руководителем. Такие случаи у нас бывали. Но чаще встречается другой вариант: текст пишется в последние несколько дней, тогда руководитель читает и критикует его в спешном порядке. Иногда текст правится совместно учеником и руководителем — это тоже форма обучения.
7. Ученик готовится к устному выступлению. Здесь роль руководителя очень велика. Как правило, создание плана выступления и его репетиция — это совместное творчество ученика и руководителя.
8. Ученик выступает и отвечает на вопросы о своей работе. Довольно часто при обсуждении работы слушатели выдвигают новые гипотезы или предлагают другие пути решения задачи. Автор, с одной стороны, получает эмоциональный заряд от заинтересованности коллег, с другой стороны, в свете критических замечаний начинает по-другому видеть свою работу или сделанный им доклад.

Как работает руководитель

Во-первых, нужно обозначить, что руководитель НЕ делает.
1. Руководитель не подсказывает прямо хода решения.
2. Руководитель не мешает ученику двигаться в выбранном направлении поиска, даже если ему кажется, что путь заведомо ложный.
3. Руководитель не требует изучения определенного корпуса литературы, а только советует, что может ученику помочь.
4. Руководитель не ставит жестких промежуточных сроков и подстраивается под ритм работы подопечного. Некоторые дети работают над темой регулярно, некоторые урывками, откладывая проблему на 2-3 недели; главное, чтобы ученик нашел свой ритм исследовательской работы.

Руководитель работает с учеником как с младшим коллегой, помогая ему, если есть просьба о такой помощи, и на равных обсуждая возникающие проблемы.

Зачем нужны доклады

Желание поделиться своими открытиями вполне естественно. Контрольная функция доклада должна быть сведена к минимуму. Доклад на секции — не экзамен, а награда, своеобразное поощрение тех, кто творчески поработал.

Работа над выступлением — важный этап. В докладе важно совместить увлекающий слушателей рассказ о собственных поисках, заблуждениях и удачах и строгое системное изложение полученных результатов и их доказательств. Нужно избегать обеих крайностей: как сухого изложения последовательности лемм и теорем, так и бессистемного рассказа «что я делал». Если до доклада ученик работает над *своей* задачей и в этой работе у него есть свои особые внутренние связи, привычные обозначения, удобный набор методов и ассоциации, то теперь ему нужно изложить задачу *другим:* выстроить работу логически, подобрать понятные обозначения и термины, сделать необходимые акценты и пояснения. Зачастую люди (и дети, и взрослые), решив задачу, достаточно быстро к ней охладевают, поэтому для них написание текста и подготовка к докладу — важный этап обучения тому, что дело нужно довести до конца, даже если ты к нему уже остыл.

Откуда берутся темы

Помните: «Тиха украинская ночь»?
Вот и задачи должны быть такими же.
А. Д. Александров

В некотором смысле темы исследовательских работ приходят сами. Бывает, что тема вырастает из кружковой или олимпиадной задачи, бывает, что она неожиданно возникает при подготовке к уроку или на самом уроке. Тема работы — это задача с перспективой, с продолжением, иными словами — это серия таких задач, которые естественно получаются из некоторой задачи обобщением, увеличением параметра и т. д. Обычно первые задачи из серии решаются сравнительно легко. Затем ученики доходят до разных степеней общности, каждый останавливается там, докуда смог добраться сам (а не там, куда его доставил на «вездеходе» учитель). В этом движении постоянно приходится выбирать направление следующего шага, то есть развивать важнейшее для математика умение (эстетическое чувство, о котором говорил Пуанкаре).

При таком движении активно используется индукция и аналогия: рассматриваем несколько частных случаев, угадываем закономерность, ставим аналогичную задачу. Здесь оказывается плодотворным взгляд на математику как науку *экспериментальную*.

Заметим, что наши постановки задач, как правило, понятны ученику без предварительной подготовки — мы стараемся отталкиваться от известного.

Несколько конкретных историй

Чтобы передать дух и атмосферу работы над исследовательскими задачами, мы решили описать несколько конкретных историй.

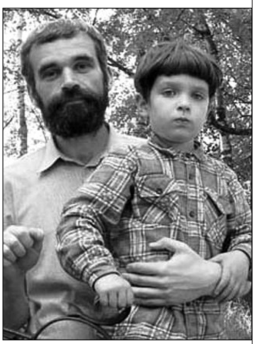
Сгибнев А. И. Как возникали темы

Серёжа Злобин (VI класс) на занятии в кружке долго не мог решить задачу о разрезании на полоски 1×3 квадрата 8×8 без угловой клетки. Дома он взялся за дело всерьёз и полностью исследовал разрезание квадрата $2^n\times2^n$ без угловой клетки на такие полоски. Оказалось, что результат зависит от остатка при делении n на 3. Задача несложная, но при решении понадобились разнообразные методы. В итоге на докладах работа смотрелась очень неплохо. К тому же задачу ученик поставил сам.

Другая тема появилась в ходе обсуждения задачи о построении пятиугольника по серединам его сторон. Аналогичная задача для треугольника была, что называется, «на слуху» — и так возникла тема исследования: восстановить многоугольник по серединам его сторон, исследовать количество решений (Краснер Паша, IX класс).

Шноль Д. Э. Задача про «пифагоров кирпич»

В одной из книг я прочел, что до сих пор неизвестно, существует ли «пифагоров кирпич»: прямоугольный параллелепипед с целыми ребрами, диагональю и диагоналями граней. Пример параллелепипеда, у которого нецелые только две диагонали боковых граней, легко найти (ребра 3; 4; 12): $13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$, при этом $3^2 + 4^2 = 5^2$. Мне показалось, что было бы интересно поработать с такими параллелепипедами, а также попытаться найти те параллелепипеды, у которых диагональ только одной грани нецелая (мы их назвали «слабыми по одной грани»). В таком виде и была вывешена тема для исследовательской работы в начале года. Сам я в ней не разбирался, так что мог работать наравне с учеником, который ее выберет. К моему удивлению, ею заинтересовался пятиклассник Алеша Рухович. Во-первых, используя формулы для пифагоровых троек, Алеша вывел общую формулу для «пифагорова кирпича, слабого по двум граням». О пифагоровых тройках он сам прочитал в одной из популярных книг, а потом применил их на деле. Сделать это несложно, но очень важна самостоятельность. Во-вторых, он написал программу, которая нашла несколько примеров «пифагорова кирпича, слабого по одной грани». Мы вместе всматривались в эти примеры, но особых закономерностей не обнаружили. Тогда Алеша снова использовал формулы для пифагоровых троек, получил некоторое уравнение 4 степени в целых числах, решение которого и дает ответ. Как решить такое уравнение, мы не знали, и, казалось, это был тупик. Тогда Алеша сам предложил попробовать поработать с делимостью. Известно, что во взаимно простых пифагоровых тройках одно число четное, а два других — нечетные. Алеша исследовал, какими могут быть взаимно простые целые числа, задающие ребра «пифагорова кирпича», с точки зрения делимости на степени двойки. Результат оказался довольно интересным: одно число должно быть нечетным, второе — делиться на 4, но не делиться на 8, третье — делиться на 8. На этом закончился первый год исследований, при этом бывали длительные периоды (до месяца), когда исследование «буксовало». Во время работы над темой инициатива того или иного хода решения почти всегда исходила от ученика, я, как правило, выступал только как квалифицированный слушатель. Времени и сил, чтобы самому подробно разбираться в задаче, у меня не было, и это было только к лучшему: Алеша смог получить полное удовольствие от собственных открытий. Работа Алеши была принята к докладу на Колмогоровских чтениях, и он был отмечен как самый молодой участник.



Сгибнев А. И. Две исследовательские работы

Я расскажу о двух работах (или одной, как считать), показательных во многих отношениях. Всё началось с того, что шестиклассник Володя Иванов взял задачу об аликвотах — обыкновенных дробях с числителем 1. Древние египтяне использовали почему-то только такие дроби. Другие дроби представляли в виде сумм аликвот. Сохранился папирус Ахмеса, в котором дробь вида $2/(2n+1)$ представлялась в виде суммы двух, трёх или четырёх аликвот. Володя задался вопросом: любую ли дробь такого вида («папирусную») можно представить в виде суммы двух аликвот? Оказалось, что любую, да ещё несколькими вариантами. Всегда присутствует, во-первых, тривиальное разложение $\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}$ (которое мы договорились даже не учитывать), во-вторых, ещё такое: $\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(n+1)}$ (можно проверить тождество непосредственно). Володя искал разложения численно на компьютере, и открыл, что для многих n есть и другие разложения. Этим закончилось первое полугодие, но тут наш коллега подкинул идею посмотреть частоты распределения количеств разложений. Володя обсчитал все дроби с n от 1 до 500. Оказалось, что вполне можно говорить о статистической закономерности: 1, 4, 7, 13 вариантов встречались стабильно больше остальных. Примерно в этот момент я понял, что нашу задачу можно сформулировать так: дано натуральное число h; сколько есть пар натуральных чисел a и b, для которых h является средним гармоническим? Новая формулировка задачи привела, во-первых, к тому, что мы стали исследовать и чётные знаменатели (для них закономерности оказались такие же). Во-вторых, была поставлена серия аналогичных задач: дано натуральное число r. Сколько существует пар натуральных чисел a, b, для которых r является 1) средним арифметическим? 2) средним геометрическим? 3) средним квадратичным? За эти задачи взялся Миша Пядёркин (VI класс). Но вернёмся к Володе. За следующие полгода мы поняли, что количество вариантов разложения папирусной дроби в сумму двух аликвот однозначно определяется видом разложения её знаменателя на простые множители. Наконец, в четвёртом полугодии я смог по Володиным таблицам и классификациям угадать общую формулу для количества вариантов. Мне хотелось, чтобы Вова на майском докладе доложил этот результат, но сам он никак до формулы не догадывался, а лишать его открытия было нечестно... Он придумал формулу осенью, а в августе корейский учитель Ким Янг Вон, которому я озвучил нашу гипотезу как пример того, на что способна индукция в школьной математике, дал строгий и простой вывод формулы.

Тем временем Миша легко решил задачу о среднем арифметическом. Решение задачи о среднем геометрическом я знал, поэтому подсказал нужную комбинаторную идею. После этого мы на вторые полгода завязли в задаче о среднем арифметическом *трёх* чисел. Сложность была в том, что при подсчёте троек чисел мы вводили «ограничения» (как называл их Миша), то есть отождествляли все варианты, получаемые друг из друга перестановкой (например, 1 + 2 + 3 и 3 + 2 + 1 считали за 1-й вариант). Поэтому надо было отдельно считать случаи, в которых все три числа различны, в которых два числа совпадают и в которых все три совпадают. Миша проделал всю работу сам с большим энтузиазмом (я только вылавливал ошибки и давал советы). Получились разные ответы для чётных и нечётных r.

В задаче о среднем квадратичном даже двух чисел просветов не было видно. Миша сделал для неё компьютерную таблицу разложений (как Вова когда-то), и на этом мы расстались на лето. В начале осени я посмотрел на таблицу и стал догадываться, что к чему. К сожалению, дальнейшее происходило при весьма слабом участии Миши, поэтому расскажу кратко: я опять угадал общую формулу и, кажется, могу теперь доказать, что количество вариантов *не меньше*, чем утверждает формула.

Удивительно, что дети могут плодотворно заниматься одной темой по два года и больше! Очевидно, это возможно не с любой задачей, а с задачей, допускающей постепенные продвижения, «вживание» (которого почти никогда не бывает на уроках). А в результате этого «вживания» со временем решаются задачи, к которым вначале совсем не видно подхода.

Стоит отметить и большую роль обсуждения задач с коллегами по ходу решения.

Приложение 1

Формулировки некоторых исследовательских задач, выполнявшихся в школе «Интеллектуал»

1. (Задача Иосифа Флавия) По кругу расположены точки с номерами от 1 до n. Точки начинают вычёркивать через одну, считая от первой. Как узнать номер точки, которая останется последней? Что если вычеркивать каждую третью точку?

2. Разбойники поймали мудрецов, выстроили их в колонну, надели на каждого чёрный или белый колпак и спрашивают каждого: какого цвета колпак на нём? Если ответил правильно — отпускают, если ошибся — убивают. Как надо действовать мудрецам, чтобы их спаслось как можно больше? (Мудрец видит только колпаки тех, кто стоит перед ним. Перед тем, как отгадывать цвет своего колпака, мудрецы могут о чем-то договориться.) Обобщить задачу на n цветов колпаков.

3. Есть 10-этажный дом и 2 кокоса, которые можно сбрасывать с любого этажа и можно подбирать. Помогите обезьяне определить, с какого этажа кокосы начинают разбиваться. Учтите, что обезьяна ленивая и хочет бросать кокосы как можно меньше раз. Обобщить на n этажей и m кокосов.

4. Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: 15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5. А сколько таких способов для числа 101? Как найти количество способов для произвольного числа?

5. Дано натуральное число, надо понять, для скольких пар натуральных чисел оно является: а) средним арифметическим; б) средним геометрическим; в) средним квадратичным; г) средним гармоническим.
6. Как восстановить многоугольник по серединам его сторон? Единственно ли решение? А если рассматривать также невыпуклые многоугольники? А если поделить стороны в отношении 1:*a*?
7. Свойства шестиугольников. Равносторонний четырехугольник (ромб) имеет две пары равных углов и перпендикулярные диагонали, равноугольный четырехугольник (прямоугольник) имеет две пары равных сторон и равные диагонали. Найдите и докажите свойства шестиугольников с равными углами, с равными сторонами, с равными соответствующими диагоналями, рассмотрите среди них вписанные и описанные шестиугольники.
8. Построить многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень. Построить многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством (доказать, что степень наименьшая). Обобщить на случай суммы трёх корней.
9. Классификация графиков дробно-квадратичных функций. Исследовать, какие типы графиков могут получиться, если в числителе и в знаменателе дроби — многочлены степени не выше 2.
10. Последовательность $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$ $(a_1 = 1,\ a_2 = 1)$ является периодической. При каких ещё коэффициентах для последовательности $a_{n+2} = ka_n + ma_{n+1}$ получается периодичность? Какой длины может быть период?
11. Если (a_n) — арифметическая прогрессия, то, зная только a_2, можно найти $a_1 + a_2 + a_3$, зная 3-й член, можно найти сумму первых пяти, и т.д. Оказывается, для последовательности Фибоначчи (u_n) (т. е. $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$) тоже есть такие свойства. А именно, сумма первых десяти членов однозначно выражается через седьмой член: $u_1 + u_2 + ... + u_{10} = 11 \times u_7$ (*), причём равенство верно для последовательностей с любыми начальными членами u_1, u_2. Вопросы: а) нельзя ли найти другие равенства типа (*) (т. е. с другими числами вместо 1, 10, 7, 11), верные для всех последовательностей Фибоначчи; если можно, то как связаны эти параметры; б) нельзя ли построить подобные равенства для других рекуррентных последовательностей (хотя бы вида); если можно, то как.

Приложение 2

Несколько аннотаций исследовательских работ школьников

1. Одна задача теории чисел

(выполнила Безменова Александра, VI класс; руководитель Сгибнев А. И.)

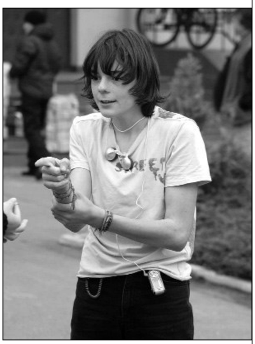
Работа посвящена задаче о выразимости натуральных чисел через выражения вида $ax + by$, где a и b — заданные взаимно простые числа, а x и y — целые неотрицательные числа. В первой части задача исследуется индуктивно: делается вывод, что все числа, большие $ab - a - b$, выражаются через комбинации вида $ax + by$, а само это число не выражается. Во второй части этот результат доказывается строго.

2. Построение многоугольника по точкам, делящим стороны в известном отношении

(выполнил Краснер Павел, IX класс; руководитель Сгибнев А. И.)

Вначале решена частная задача: восстановить многоугольник по серединам его сторон. При решении возникают два случая:

1) Число сторон нечётно. В этом случае решение существует, и оно единственно для любого расположения исходных точек. Если исходные точки образуют многоугольник, то решение невырождено.



2) Число сторон чётно, тогда либо решения не существует, либо их бесконечно много (в зависимости от расположения исходных точек).

Общий случай исследован для треугольника. Показано, что решение существует и оно единственно (с точностью до вырожденности). Указан способ построения для рационального отношения. Выдвинута гипотеза о том, что решение существует и оно единственно для n-угольника с любым n, в том числе и с чётным (если это верно, то случай середин сторон является исключительным).

3. Исследование числовых последовательностей, заданных линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами

(Выполнил Власенко Дмитрий, IX класс; руководитель Шноль Д. Э.)

По аналогии с выводом формулы n-го члена последовательности Фибоначчи выведена формула n-го члена произвольной последовательности, заданной линейным рекуррентным уравнением второго порядка.

Введено понятие взаимно сопряженных последовательностей: таких последовательностей, у которых нечетные члены совпадают, а четные взаимно противоположны. Доказано достаточное условие того, что две последовательности являются взаимно сопряженными.

Найдено и доказано условие того, что последовательность является периодической. Доказано, что все члены периодической последовательности лежат на синусоиде, период которой явно выражен через коэффициенты уравнения.

Введено понятие суммы двух последовательностей, рассмотрены простейшие свойства этой операции.