# Программа курса «Геометрические построения на плоскости»

**Михалева Татьяна Леонидовна,**
педагог дополнительного образования ГОУ ЦДОД «Дистантное обучение» г. Москва

**Программа курса «Геометрические построения на плоскости» составлена для преподавания специального раздела элементарной геометрии школьникам 14–16 лет. Материал рассчитан как на учащихся старшего школьного возраста в классах с углубленным изучением математических дисциплин, так и на обучающихся в учреждениях дополнительного образования, изучающих дополнительные главы математики и расширяющих свой кругозор.**

Курс позволит учащимся систематизировать, расширить их знания, связанные с геометрическими построениями на плоскости, научиться решать задачи различной сложности; будет способствовать выработке и закреплению логических навыков.

Требуемый уровень первоначальной подготовки слушателей данного курса соответствует знаниям базовой общеобразовательной программы 9 класса по алгебре и геометрии.

Рекомендуемый уровень подготовки преподавателей, использующих программу курса «Геометрические построения на плоскости», — высшее образование по специальности «математика» или «преподаватель математики», или среднее профессиональное по специальности «преподаватель математики».

Программа элективного курса предполагает знакомство с теорией и практикой рассматриваемых вопросов и рассчитана на 76 академических часов: 37 теоретических часов, 39 практических часов.

Содержание курса состоит из пяти разделов. В зависимости от уровня подготовки учащихся, уровня сложности изучаемого материала и восприятия его школьниками, преподаватель может взять для изучения темы, увеличив при этом количество часов на изучение других.

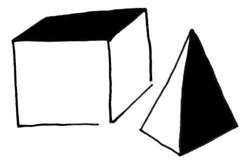
Программа содержит темы исследовательских работ, список понравившихся задач и список литературы.

Составление этого курса продиктовано желанием познакомить слушателей с интереснейшим, но скромно представленным в современной базовой общеобразовательной программе разделом элементарной геометрии о методах, истории и теории решения геометрических задач на построение. Задачи на построение являются прекрасным средством для развития логического и ассоциативного мышления. Соприкосновение с глубокой историей этой области математики (первые упоминания конструктивных геометрических задач встречаются у древнегреческих математиков еще в 6 в. до н.э.) и биографиями известных математиков, чьи имена связаны с развитием этой области, расширят математическую культуру слушателя.

Геометрические построения могут сыграть серьезную роль в математической подготовке школьника. Ни один вид задач не даёт столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащегося. Теория геометрических построений составляет основу практической графики: многие чертежные приемы опираются на решение геометрических задач на построение. Кроме того, открывается связь теории геометрических построений с некоторыми важными вопросами других областей математики и смежных наук. Так, при обсуждении разрешимости задачи о построении правильного n-угольника органично вводится понятие комплексных чисел и операции над ними. Наглядность геометрических построений делает доступным для школьников понимание основ этого важнейшего раздела математики.

В программу курса вошли основные разделы:

- краткий исторический обзор теории геометрических построений;
- обоснования конструктивной геометрии (основные понятия, аксиоматика этого раздела геометрии);
- основные методы геометрических построений (геометрическое место точек, простейшие геометрические преобразования, движение плоскости, гомотетия, инверсия, аналитический метод, комплексные числа);
- некоторые классические задачи, не разрешимые циркулем и линейкой, способы приближенного решения этих задач;
- геометрические построения при различных ограничениях (Мор, Маскерони, Штейнер).



В конце каждого раздела приводятся вопросы для закрепления материала и задачи для практических занятий. В план решения каждой геометрической задачи на построение обязательными элементами входят анализ, построение, доказательство и исследование. В этом смысле исследовательская деятельность будет сопровождать учащихся на протяжении всего курса. Некоторые интересные задачи будут предложены для внимательных слушателей в конце курса с целью сравнить различные методы решения.

*Целью* курса является расширение и углубление знаний по теме «Геометрические задачи на построение», систематизация методов геометрических построений, обретение практических навыков построения циркулем и линейкой и опыта исследовательских задач на построение.

*Задачи курса:*

- ознакомить учащихся с историей конструктивных геометрических задач, с древними задачами на построение;
- ввести учащихся в аксиоматику конструктивной геометрии;
- систематизировать методы построения в конструктивных задачах;

• сформировать навыки применения методов геометрических построений на плоскости;
• сформировать умения и навыки самостоятельной исследовательской работы;
• способствовать развитию логического и ассоциативного мышления;
• способствовать формированию познавательного интереса к математике.

**Учебно-тематический план**

| № | Тема | Теорет. часов | Практ. часов | Опорная литература по теме |
|---|---|---|---|---|
| **I** | **История теории геометрических построений. Связь со смежными науками** | **2** | | **[1], [9]** |
| **II** | **Обоснования конструктивной геометрии** | **4** | **6** | |
| | Базовые вопросы конструктивной геометрии: Основные аксиомы, инструменты, схема решения задач на построение. Обсуждение вопроса: «Что значит решить задачу на построение?» | 2 | 2 | [4] |
| | Элементарные геометрические задачи на построение. Использование элементарных построений в конструктивных задачах. Примеры решения задач на построение с отработкой схемы решения. Исследование по ходу построения | 2 | 4 | [2], [3] |
| III | Основные методы геометрических построений | 11 | 17 | |
| | Геометрическое место точек: понятие о ГМТ, обзор элементарных ГМТ, задачи на построение по методу геометрических мест, метод аналитической геометрии. Задача: окружность Аполлония | 2 | 4 | [4], [5] |
| | Движения на плоскости и их применения к геометрическим построениям (тождественное преобразование, параллельный перенос, осевая симметрия, поворот) | 2 | 4 | [7] |
| | Гомотетия: определение, основные свойства. Решение задач на построение методом подобия. | 2 | 2 | [4], [6] |
| | Инверсия: определение, основные свойства, теоремы без доказательств. Решение задач на построение методом инверсии | 2 | 2 | [6], [2] |
| | Алгебраический метод. Построение отрезка, заданного простейшими формулами, построение корней квадратных уравнений. Понятие об однородных функциях; практика построения некоторых однородных выражений циркулем и линейкой | 2 | 4 | [1], [5] |
| | Построение тригонометрических выражений | 1 | 1 | [2], [7] |

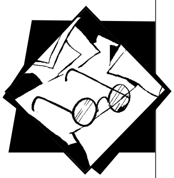
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| IV | Некоторые задачи, не разрешимые циркулем и линейкой | 12 | 10 | |
| | Задача о квадратуре круга. Приближенное решение этой задачи | 2 | 1 | [4], [9] |
| | Задача удвоения куба (делийская задача). Неразрешимость построения циркулем и линейкой. Построение Платона (по двум прямым углам) | 2 | 1 | [9] |
| | Задача о трисекции угла | 2 | 2 | [9] |
| | Комплексные числа, их связь с построением правильных многоугольников | 4 | 2 | [2], [4] |
| | Критерий Гаусса. Практика построения правильных многоугольников | 2 | 4 | [1], [2], [4] |
| V | Геометрические построения при различных ограничениях | 6 | 6 | |
| | Построения одним циркулем. Примеры задач на построение одним циркулем. Теорема Мора–Маскерони | 2 | 2 | [8] |
| | Построения одной линейкой. (Мор, Ламберт, Штейнер). Теорема Штейнера | 2 | 2 | [12] |
| | Построения с недоступными точками: понятие недоступной точки, элементарные геометрические задачи на построение с недоступными точками (Ламберт). Практические задачи из геодезии | 2 | 2 | [4] |
| | Итоговое занятие | 2 | | |
| | Всего: 76 часов | 37 | 39 | |

## Содержание курса

### I. История теории геометрических построений *(2 часа)*

*Материал дается обзорно. К концу курса возможно выполнение реферативных работ по биографиям математиков с докладом на итоговом занятии.*

Геометрия древнегреческих математиков. Пифагор (V в. до н.э.) — построение правильного пятиугольника. Формулировка классических древних задач о квадратуре круга, удвоении куба, трисекции угла. Задача Аполлония. Постулаты Евклида как основа конструктивных методов в геометрии. Геометрические построения XVII–XX вв. при развитии аналитической геометрии, начертательной геометрии, теории алгебраических уравнений. Мор (1672), Л. Маскерони (1797) — возможность построения циркулем



всякой конструктивной задачи, разрешимой циркулем и линейкой. Я. Штейнер (1833), Ж.-В. Понселе (1822) — геометрические построения, выполняемые линейкой при наличии начерченной окружности с отмеченным центром. И. Г. Ламберт (1774) — построения на ограниченном куске плоскости (находит практическое применение в черчении, геодезии). К. Ф. Гаусс (1796) — при каком натуральном n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник. Практический интерес приближенного способа решения геометрических задач на построение. Архимед (III в. до н.э.) — приближенное построение семиугольника.

И. И. Александров (1881) — первая классификация способов исследования всей неисчерпаемой области задач на построение; при этом некоторые геометрические идеи оказались рычагами решения целого класса задач.

**II. Обоснования конструктивной геометрии** *(10 часов)*

*Понятия конструктивной геометрии*: точка, прямая, отрезок, интервал, луч, окружность, круг, пересечение фигур, объединение фигур.

*Постулаты (аксиомы) конструктивной геометрии:*

**1.** Прямую и отрезок считать построенными тогда и только тогда, когда построены две точки прямой или концы отрезка.

**2.** Окружность считать построенной тогда и только тогда, когда даны ее центр и две точки, определяющие радиус (одна из них может быть центром окружности, а другая — точка на окружности).

**3.** Точка построена, если она лежит в пересечении двух данных или построенных прямых.

**4.** Точка построена, если она лежит в пересечении прямой и окружности.

**5.** Точка построена, если она лежит в пересечении двух данных или построенных окружностей.

*Оборудование*: циркуль и линейка.

Элементарные построения, выполняемые циркулем; элементарные построения, выполняемые одной линейкой.

*Элементарными построениями* будем считать:

**1.** Построение прямой и отрезка по двум точкам.

**2.** Построение окружности, если определена точка-центр и отрезок-радиус.

**3.** Построение дуги окружности по ее концам и центру.

**4.** Нахождение общих точек двух данных прямых.

**5.** Нахождение общих точек данной прямой и данной окружности.

**6.** Нахождение общих точек двух данных окружностей.

*Конструктивная задача элементарной плоской геометрии считается решенной*, если она приведена к конечному числу элементарных построений, после выполнения которых искомая фигура будет считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии. Решить задачу на построение — значит найти все ее решения или доказать, что фигуры с заданными свойствами не существует.

Цепочка решения: анализ — построение — доказательство — исследование; значимость каждого этапа. На этапе исследования устанавливаются условия разрешимости задачи и определяется число решений.

*Вопросы для повторения:*

**1.** Перечислить основные (элементарные) построения, выполнимые при наличии одного циркуля (линейки).

**2.** Из каких этапов состоит полная схема решения геометрической задачи на построение?

**3.** Какова цель исследования решения геометрической задачи на построение?

*Задачи:*

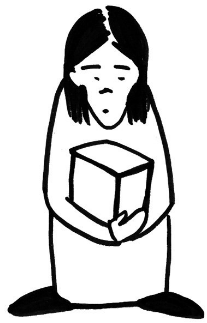
**1.** Построить треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.

**2.** Построить общую касательную к двум данным окружностям.

**3.** Построить треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.

**4.** Построить треугольник по двум углам и периметру.

**5.** Построить треугольник по двум высотам и медиане к третьей его стороне.



### III. Основные методы геометрических построений *(28 часов)*

Понятие задания фигуры как *геометрического множества точек (ГМТ)*. Построение простейших геометрических мест. Общий принцип построения по методу геометрических мест. Примеры построения ГМТ. Аполлониева задача о касании.

Решение алгебраического уравнения и геометрическое место точек. Примеры.

*Задачи:*

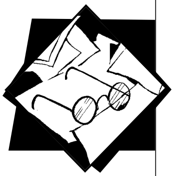
**1.** Перечислить ГМТ, рассматриваемые в школьном курсе геометрии. Обсуждение известных в школьной программе алгебраических уравнений и ГМТ, задаваемых этими уравнениями.

**2.** Найти ГМТ центров окружностей, проходящих через две данные точки.

**3.** Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и проходящую через данную точку.

**4.** Построить треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности. Провести исследование на количество решений, при каком условии решений не существует.

*Движение* как преобразование плоскости. Образы фигур при движении: отрезок преобразуется в отрезок, прямая — в прямую, луч — в луч, окружность — в окружность того же радиуса. Некоторые виды движений и их применение к геометрическим построениям.



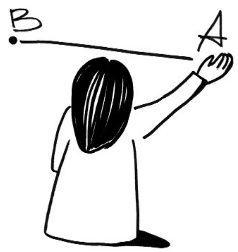
*Параллельный перенос.* Пользуясь параллельным переносом, можно придать фигуре более удобное расположение на плоскости. Разбор задачи: построение трапеции по заданным сторонам. Разбор задачи на построение моста через реку для получения кратчайшего расстояния из пункта А в пункт В, разделенных рекой.

*Осевая симметрия.*

*Поворот.*

*Задания:*

**1.** Построить треугольник, зная сторону, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон треугольника.
**2.** Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
**3.** Построить трапецию по основаниям и диагоналям.
**4.** Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.




Определение *гомотетии* как взаимно однозначного преобразования плоскости. Подобные фигуры. Свойства гомотетии: прямая преобразуется в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, окружность — в подобную окружность, угол — в равный угол, треугольник — в подобный треугольник. Построение гомотетичных (подобных) фигур. Решение задач на построение методом подобия: сначала строят фигуру, подобную искомой, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строят уже искомую фигуру, как фигуру, подобную построенной и удовлетворяющей опущенному требованию (чаще всего на этом этапе происходит увеличение или уменьшение).

*Задания:*

**1.** Сколько центров подобия имеется у двух несовпадающих окружностей?
**2.** Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.
**3.** В данный остроугольный треугольник вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на основании треугольника, а две — на боковых сторонах.
**4.** Построить прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а сумма катетов и высоты, опущенной на гипотенузу, равна данному отрезку.
**5.** В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого одна сторона в три раза больше второй.

*Инверсия.* Определение, образы основных геометрических фигур при инверсии. *Задача повышенной трудности.* Решить аполлониеву задачу с привлечением метода инверсий (построение решения, исследование количества решений).

*Алгебраический метод построения.* Алгебраический метод заключается в составлении уравнения, связывающего величину неизвестного отрезка искомой фигуры с данными величинами. Если геометрическая задача на построение решается с помощью уравнения первой или второй степени, то построение всегда возможно с помощью циркуля и линейки. Если геометрическая задача сводится к решению уравнения третьей и более степеней, то решение возможно лишь в некоторых частных случаях.

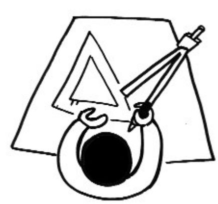
На основании метрических соотношений в треугольнике и круге даются способы построения циркулем и линейкой отрезков, заданных простейшими формулами. По данным отрезкам *a, b, c, d*

построить $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{n}$, $a \cdot n$, *(где n, m — натуральные числа),*

$\frac{a \cdot b}{c}$, $\sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{ab+cd}$, $a \cdot \sqrt{2}$.

*Обсудить задачу.* Пусть даны $p$ и $q$. Без вычисления построить отрезки, длины которых равны действительным корням квадратных уравнений $x^2+px+q=0$. Рассмотреть два способа построения — по формуле корней квадратного уравнения и через формулу Виета.

*Теорема (без доказательства).* Для того чтобы циркулем и линейкой можно было построить отрезок, длина которого является заданной положительной функцией длин данных отрезков, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было выразить через длины данных отрезков с помощью конечного числа основных действий (сложение, умножение, деление, извлечение квадратного корня).



*Обсудить задачу:* По известным отрезку $a$ и углу $\alpha$ построить $a \cdot \cos\alpha$, $a \cdot \sin\alpha$, $a \cdot \cos^3\alpha$, $a \cdot \sin^3\alpha$.

*Задачи.*

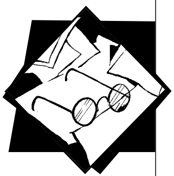
**1.** Построить угол $a$ зная, что $\sin\alpha = a/b$.
**2.** Построить угол $a$ зная, что $\cos\alpha = (a-b)/(a+b)$.
**3.** Построить угол $a$ зная, что $\cos\alpha = (a^2-b^2)/(a^2+b^2)$.
**4.** Вписать в круг радиуса $R$ прямоугольник данного периметра $2p$.

## IV. Некоторые задачи, не решаемые циркулем и линейкой *(22 часа)*

*Тема дается обзорно, теоремы приводятся без доказательств; отметить историю решения этих задач, связанные с ними имена математиков.*

Понятие неразрешимости задачи на построение.

Древняя задача о *квадратуре круга* (связь с задачей о спрямлении окружности). Луночки Гиппократа (5 в. до н.э.). Связь задачи о квадратуре круга с задачей о построении отрезка длины $\sqrt{\pi}$. В 1882 г. (Линдеманн) было доказано, что $\pi$ не является алгебраическим числом, т.е. не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами. А значит, $\sqrt{\pi}$ не может быть построено с помощью конечного числа рациональных операций и операций извлечения квадратного корня.



*Тема исследовательской работы* для подготовленного слушателя:

Приближенные решения задачи о спрямлении окружности (квадратуре круга), данные Архимедом, Маскерони, Коханским.

Делийская задача *об удвоении куба*. Уравнение вопроса о разрешимости: $x^3=2a^3$. Неразрешимость уравнения в квадратных радикалах (теорема Адлера), а, следовательно, неразрешимость делийской задачи с помощью циркуля и линейки.

Приближенное решение Платона (4 в. до н.э.) с привлечением двух прямых углов.

*Трисекция угла*. Сведение задачи к решению уравнения $x^3-3x-a=0$. Частные случаи разрешимости этого уравнения в квадратных радикалах. Решение Архимеда с помощью циркуля и линейки с двумя отметками. Трисектор.

*Тема исследовательской работы*:

Приближенное решение Дюрера.

*Метод построения правильных многоугольников.*

Деление окружности на $n$ равных частей. Деление дуги окружности пополам. Деление окружности на 16 равных частей.

*Теорема:* Если число разлагается на два взаимно простых множителя, то возможность деления окружности на $n$ равных частей равносильна возможности деления окружности в отдельности на $p$ и $q$ равных частей.

Геометрическое представление комплексных чисел $z=x+yi$. Формула Муавра. Сведение задачи о делении круга на $n$ равных частей к построению точек

$$z_k=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right),\ k=1,2,...,n-1.$$

Уравнения деления окружности: $z^n-1=0$, $z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1=0$.

*Теорема Гаусса (1796):* Построение правильного $n$-угольника с помощью циркуля и линейки возможно в том и только том случае, когда число $n$ может быть представлено в виде $2^m p_1 p_2 ... p_s$, где $p_1, p_2, ..., p_S$ — различные простые числа вида $2^{2k}+1$.

Следствие: Возможность построения правильных 3-е, 5-и, 17-и угольников. Невозможность построения 7-и, 9-и угольника.

Практическое построение правильного 10-и угольника с помощью циркуля и линейки. Связь с уравнением $z^2+z-1=0$ [1].

*Задача.* Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить окружность на 11, 12, 25, 100 равных частей?

*Исследовательская задача для хорошо подготовленного слушателя.* (*).

Исследовать различные способы построения правильного 17-ти угольника (метод Жерара, метод Гаусса, метод Штейнера).

**V. Геометрические построения при различных ограничениях** *(12 часов)*

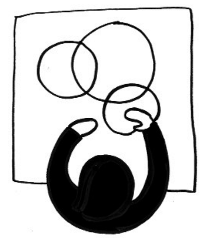
*Теорема Мора (1672) — Маскерони (1797):* Каждая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть точно решена и одним циркулем.

Провести доказательство разрешимости одним циркулем элементарных конструктивных задач (см. 1–5 из раздела II). Практика построения одним циркулем.

*Задачи на построение одним циркулем:*

**1.** Восстановить перпендикуляр к отрезку AB в точке A.
**2.** Построить середину данной дуги окружности.
**3.** Построить отрезок, равный $1/n$ данного отрезка.
**4.** Разделить отрезок на 3 равные части (способ Маскерони).
**5.** Построить отрезок, равный $1/2^n$ данного отрезка AB.

*Теорема Штейнера:* Геометрические задачи на построение, разрешимые с помощью циркуля и линейки, могут быть решены путем проведения одних прямых линий, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и ее центр.



Разбор задачи: провести прямую, параллельную данной прямой линии (провести исследование случаев взаимного расположения данной прямой и окружности).

Разбор задачи: Построить биссектрису данного угла.

Разбор задачи: Удвоить данный угол.

*Задачи на построение одной линейкой:*

**1.** Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Построить середину этого отрезка.
**2.** Зная середину M данного отрезка AB, провести через данную точку C прямую, параллельную AB.
**3.** Через центр данного параллелограмма провести прямую параллельно его стороне.

*Понятие недоступной точки.* Разрешимость задач с недоступными точками. Практика построения прямой AB через данную точку A и недоступную точку B.

Практика деления в данном отношении *m:n* отрезка AB, один конец которого недоступен. Практика деления пополам угла, вершина которого недоступна.

Комбинируя рассмотренные примеры можно предложить большой ряд интересных задач на построение.

**VI. Итоговое занятие** *(2 часа)*

Занятие проводится в виде докладов по реферативным и исследовательским работам. Подведение итогов. Рекомендации по литературе для дальнейшего самостоятельного изучения конструктивных задач.

**Уверенное умение решать простые конструктивные задачи позволяет развить ассоциативное мышление при решении нетривиальных задач на построение.**

**Ожидаемые образовательные результаты.** Учащиеся, успешно освоившие программу курса, нарабатывают навык практических построений в геометрии на плоскости. Уверенное умение решать простые конструктивные задачи позволяет развить ассоциативное мышление при решении нетривиальных задач на построение. К окончанию курса у слушателей должна сложиться систематика различных методов в задачах на построение (с использованием движения плоскости, метод ГМТ, метод подобия, метод инверсии, алгебраический метод). Соприкосновение с историческими математическими фактами, древними задачами повышают математическую культуру слушателей.

**Способы фиксации образовательного результата:**
- проведение самостоятельных работ;
- проведение командных соревнований по построению, командная защита своего решения-построения;
- реферативные работы по отдельным классическим задачам;
- исследовательские работы по сравнению различных методов построения для ряда задач;
- устный опрос по вопросам, подготовленным самими учащимися.

**Методическое обеспечение реализации программы:**

Литература для преподавателя и учащихся.

Раздаточный материал для каждого занятия (ксероксы основных материалов к занятию, подготовленных по опорной литературе; ксероксы чертежей геометрических построений).

Приборы: трисектор.

Прикладной пакет «Живая геометрия» для демонстрации построений.

## Литература

**Для преподавателя:**

1. *Адлер А.* Теория геометрических построений. М.: Учпедгиз, 1940.
2. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч.1. М.: Учпедгиз, 1948.
3. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. М.: Учпедгиз, 1950.
4. *Аргунов Б. И., Балк М. Б.* Геометрические построения на плоскости. М.: Учпедгиз, 1955.
5. *Бескин Н. М.* Деление отрезка в данном отношении. М.: Изд-во Наука, М., 1973.
6. *Заславский А. А.* Геометрические преобразования. М.: МНЦМО, 2004.
7. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1996.
8. *Костовский А. Н.* Геометрические построения одним циркулем. М.: Физматгиз, 1959.

9. *Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук. Вып.4. Знаменитые задачи древности. М., 1917.
10. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры. М.: Просвещение, 1990.
11. *Четвертухин Н. Ф.* Вопросы методологии и методики геометрических построений. М.: АПН, 1946.
12. *Штейнер Я.* Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой и неподвижного круга. М.: Учпедгиз, 1939.
13 Школьная энциклопедия «Математика». М.: Изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1996.

**Для учащихся:**

1. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение. М.: Учпедгиз, 1950.
2. *Бескин Н. М.* Деление отрезка в данном отношении. М.: Изд-во Наука, 1973.
3. *Воронец А. М.* Геометрия циркуля. М.: ОНТИ, 1934.
4. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1996.
5. *Костовский А. Н.* Геометрические построения одним циркулем. М.: Физматгиз, 1959.
6. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры. М., Просвещение, 1990.
7. *Яглом И. М.* Геометрические преобразования. Т. 1–2. М.: Гос. издат. технико-теор. лит., 1956.