# Проект на тему «Как чертятся кривые, нужные в жизни?» (2017 г.)



**Зайцев Дмитрий**
Руководитель:
**Анашина Н.Ю.,**
педагог Дворца творчества детей и молодёжи «Неоткрытые острова», Москва

## Пояснительная записка. Введение

**Почему я выбрал такую тему?**

Мы ещё не проходили всякие функции и графики, но названия некоторых кривых ребята слышат до того, как их изучают. Потому что мы слышим слова «параболическая антенна», гиперболическая башня Шухова, эллиптические орбиты и т.д. Мне стало интересно, что это за кривые. Некоторые старшеклассники, у которых с математикой неважно, говорили: «Ну, кому нужна эта ерунда?» Действительно, всякие кривые в учебниках кажутся скучными, совсем абстрактными, оторванными от жизни, построение всяких графиков по точкам — совсем ненужным занятием. Но папа сказал, что кривые нужны в жизни и технике, не зря ведь говорят о «параболических антеннах», и Алексей Толстой написал фантастический роман «Гиперболоид инженера Гарина». А моя руководительница объяснила, что математика — не абстрактная наука, она описывает то, что встречается в жизни, в природе и даже у людей, потому математика — естественная наука...

**Формулирование цели и задач проекта, выбор метода работы**

Неинтересно просто так вычерчивать какие-то кривые по точкам, гораздо интереснее понимать, какие свойства у этих кривых, как эти свойства люди используют в технике, и в каком виде та или иная кривая встречается в природе.

**Цель проекта**

Выяснить свойства некоторых математических кривых, их использование в технике и природе и придумать приспособление для их вычерчивания.

**Задачи проекта**

- выбрать несколько понятных кривых, узнать их уравнение вид;
- узнать их свойства, благодаря которым они используются в технике;
- разыскать по фотографиям разных живых организмов такие формы, где видно использование природой математических кривых;
- попытаться придумать свои приспособления, при помощи которых можно вычерчивать разные математические кривые.

**Методы проекта**

***Теоретический*** — знакомство с некоторыми математическими кривыми.

***Метод сравнения*** — при сравнении живых форм с этими кривыми.

***Методы вычислений*** — построение кривых по точкам, вычисленными с помощью уравнений.

***Моделирование*** — создание приспособлений для вычерчивания кривых.

***Анализ*** — нужен при формулировании выводов.

## Основная часть

### Определения некоторых математических кривых

Я остановился на нескольких кривых.

***Окружность*** — это замкнутая кривая, расстояние от центра которой до любой точки окружности — величина постоянная.

***Эллипс*** — это замкнутая кривая, имеющая два фокуса, а расстояние от фокусов до любой точки эллипса равно.

***Парабола*** — это кривая, расстояние от фокуса которой до точки на параболе равно расстоянию от директрисы до точки параболы.

***Директрисой*** называется прямая, проходящая под параболой.

***Гипербола*** — это линия, для всех точек которой разность расстояний до двух фокусов — величина постоянная.

***Циклоида*** — это линия, которую описывает точка на окружности, катящейся по прямой без скольжения.

***Логорифмическая спираль*** — это спираль, угол которой между радиусом и касательной — величина постоянная

***Примечание.*** Формулы и вид кривых в приложении.

## Сведения о некоторых математических кривых

Если приглядеться к ***окружности и эллипсу***, то старновится понятным, что окружность — это «вырожденный эллипс», у котороего фокусы совпали. Окружности были известны очень давно. Ещё в античные времена решали задачу, как вычислить длину окружности по его радиусу. Хотелось вычислить точно, величина 7/3 была неточной. Конкретные измерения точного соотношения не давали. Благодаря этим стараниям мир узнал число пи ($\pi$ = 3,14...) и были открыты иррациональные числа.

Парабола обладает оптическим свойством: все лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, после отражения оказываются направленными параллельно её оси. Согласно легенде Архимед сжёг флот римлян с помощью параболических зеркал.

В 20-х годах прошлого века В.Г. Шухов, замечательный инженер всех времён и народов построил башню, используя однополостный гиперболоид вращения, причём изогнутые обводы секций башен были сварены из прямых прутов. Писатель Алексей Толстой так восхитися этой ажцрной конструкцией, что написал фантастический роман «Гиперболоид инженера Гарина», который интересен до сих и был экранизирован.

## Способы вычерчивание математических кривых

Если прямую линию прочертить по линейке довольно просто, то другие математческие кривые просто так не прочертишь от руки. Ведь нужно, чтобы соблюдались свойства этих кривых, упомяеутых в предыдущем разделе 2.1.

Существует так называемый ***табличный метод.*** Аргументу **Х** придаются различные значения, с помощью уравнений вычисляются значения функции **У**. Этими значениями заполняют таблицу. А потом расставляют точки на графике в координатах Х–У.

Ещё можно вычерчивать участки кривых ***по готовым лекалам***, как портные по лекалам делают выкройки деталей одежды или используя ***особые приёмы,*** основанные на свойствах кривых. Ими пользовались инженеры-конструкторы.

Для некоторых кривых созданы инструменты. С помощью специальных инструментов чертежники — конструкторы вычерчивают не которые кривые. Все знают такие чертежные инструменты: это линейка для прямых, циркуль для окружности, прямоугольный треугольник для построения прямых углов. Существуют сложные приспособления пантографы, которые устанавливались на больших чертежных стола — кульманах. И есть специальные курвиметры — чертежные колёсики. Чертежник спрокатывает колёсико по какой-то кривой, а пантограф вычерчивает эту кривую на кульмане в нужном масштабе.

Сейчас всё это делается с помощью автоматических чертежных планшетов, которые управляются компьютерами. Но ведь в основе программы управления лежит всё тот же табличный метод вычислений.

А иногда нужно просто быстро начертить эту кривую. Вот тогда я и решил сделать модели приспособлений для вычерчивания некоторых кривых.

## Модели устройства для вычерчивания математических кривых

***Модель для вычерчивания окружности и эллипса***

Для вычерчивания окружности я взял кнопку и воткнул в картонку. Вокруг кнопки я обвязал нитку, а второй конец привязал к карандашу. Затем я обвёл карандашом круг.

С эллипсом тоже самое, что и с окружностью, только фокуса два, и нитку я призывал к обоим. Ручку же я разместил на нитке и провёл эллипс.

***Приспособление для вычерчивания параболы***

С параболой дело обстоит сложнее.

На листе бумаги надо закрепить линейку, поставить на листе точку — фокус параболы. Закрепить в фокусе нитку. Взять угольник, и положить его на линейку. Здесь линейка выполняет роль директриссы. Закрепить второй конец нитки на вершине острого угла треугольника так, чтобы нитка была равна катету треугольника. Перемещая второй катет вдоль линейки, и прижимая нить остриём карандаша к первому катету треугольника, мы получим вожделенную параболу. Ведь длина нити остаётся постоянной. То есть выполняется условие свойства параболы.

***Приспособление для вычерчивания циклоиды***

Чтобы начертить циклоиду я вырезал из картона круг, сделал в нём несколько дырок на разном расстоянии от центра. Потом я взял лист А3 и приложил к его нижнему краю. Затем я приложил к линейке круг, продевал по очереди в дырки ручку и катил по линейке.

***Приспособление для вычерчивания спирали***

Спираль я чертил, прикрепив к листу бумаги катушку ниток и привязав к её концу карандаш. Я разматывал нитку, и карандаш вычертил спираль. Ведь если не учитывать толщину линии, то с каддый виток отдаляется от предыдущего на величину диаметра катушки.

***Модель однополостного гиперболоида***

Я также сделал модель однополосного гиперболоида. Я взял две крышки от баночек с детским пюре и обмазал пластелином. Дальше в одну из них я воткнул зубочистки и соеденил крышки. Потом я надавил на крышки и получился гиперболоид. Однополостный гиперболоид получится, если гиперболу вращать вокруг оси между двумя лопастями гиперболы.

Если взять крышки большего диаметра и палочки подлиннее, секция выйдет крупнее. Всё как у Шухова — сужающиеся секции кверху.

## Где и как используются математические кривые

***Кривые в мире флоры и фауны***

Парабола не так редка в природе. Например брошенный камень летит по параболе. Струи воды из фонтанов нередко бьют по параболе.

Окружностей тоже очень много: например серединки цветов, солнце, луна и т.п.

Эллипсы тоже есть: листья фикуса, своды пещер. Существуют эллиптические галактики. Планеты Солнечной системы имеют эллиптические орбиты. У некоторых птиц (например у дятлов, голубей и т.д.) эллиптические крылья, обеспечивающие быстрый взлёт и большую маневренность.

Если конус срезать не перпендикулярно его оси, а наклонно, то плоскость среза образует эллиптическую поверхность. А если срезуть перпендиккулярно, то срез будет иметь круговую форму.

По логарифмической спирали растут раковины улиток, рога у горных козлов, семечки в подсолнухе. Существуют спиралевидные галактики. Кстати, наша галактика Млечный путь тоже спиралевидная. Ещё растёт и спиралевидный бамбук. Паук плетёт паутину по спирали.

Свойства логарифмической спирали используют ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полёта и лучом света. Однако, если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например, на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полёта и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

***Математические кривые в технике и строительстве***

Окружности — это клумбы, некоторые дома. Также это одно из величайших изобретений древности — колесо.

По гиперболе расходятся звуковые волны от пролетающего самолёта.

Параболические зеркала используются в фонариках, прожекторах и т.д. Кстати, в книге «Гиперболоид инженера Гарина» допущена ошибка. Гиперболоид должен быть параболоидом. Траектория летящих снарядов близка к параболе. Если находится в самолёте, летящим по параболе, то в течении 40–50 секунд можно испытать состояние невесомости. Мост, названный Бискайским, состоит из двух мощных опорных стоек высотой по 61 м, размещённых на левом и правом берегу реки и оттянутых стальными тросами. Концы тросов закреплены на расстоянии 110 м за массивные бетонные блоки. Натянутые в форме параболы между опорными стойками на высоте 45 м тросы удерживают центральный пролёт длиной 160 м. На нём уложены рельсы для перемещения грузовой гондолы, подвешенной на тросах на высоте двух метров над водой.

Эллипс используется в музеях для создания «шепчущих статуй». Это свойство лежит в основе интересного акустического эффекта, наблюдаемого в некоторых пещерах и искусственных сооружений, своды которых имеют эллиптическую форму. Эллиптические днища являются неотъемлемой частью ёмкостей и сосудов. Также в железнодорожных вагонах используются эллиптические рессоры, которые имеют большую гибкость по сравнению с подвесными. Также эллиптическое крыло используется в самолётостроении и имеет наибольшее аэродинамическое качество среди всех известных видов крыла. Наконец, с этой кривой имеют дело художники всякий раз, когда изображают окружность в перспективе. Рисуя натюрморт — фрукты, тарелки, вазы и прочие предметы круглой формы, — они решают непростую задачу: строят проекции окружностей на плоскость полотна.

Свойства логарифмической спирали используются в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Архимедова спираль используется в крепеже деталей винтами, болтам и и др, без чего нельзя представть ни один механизм.

По спирали Архимеда шла звуковая дорожка на грампластинке, а сейчас на диске. Туго свёрнутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

## Выводы

Математические или геометрические кривые — это не абстрактные понятия. Они оражают закономерности в природе.

Эти кривые имеют определённые свойства, которые люди используют для построения приборов и устройств.

Они имеют огромное значие для человека, так как с их помощью рассчитываются разные силовые установки, формы, используемые при строительстве домов, мостов и т.д.

С их помощью можно вычертить красивые узоры и орнаменты.

Их можно строить по точкам с помощью рассчетов.

Их вычерчивают конструкторы, используя разные приёмы, основанные на свойствах кривых.

Благодаря этим свойствам я смог построить модели приспопоблений для вычерчивания некоторых кривых.

## Заключение

Я понял, что проект — это не просто что-то узнать, но что-то сделать самому.

Я понял что, такое парабола, гипербола и т.д.

Я научился чертить эти самые кривые.

Мне было интересно делать модели приспособлений для вычерчивания геометрических кривых.

### Литература


1. *Маркушевич А.И.* Замечательные кривые. — М.-Л.: Гос. изд. техн. — теор. лит., 1951. — / Популярные лекции по математике, выпуск 4.

2. *Канатиков А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000 — 388с.

3. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2011.

4. http://mirznanii.com/a/315527/krivye-vtorogo-poryadka-ellips-okruzhnost-parabola-giperbola — уравнения и свойства кривых

5. http://www.nacherchy.ru/geometricheskie_krivie.html — спираль, циклоида

6. http://www.vasmirnov.ru/Lecture/AnalPath/AnalPath.htm — построение спирали и циклоиды

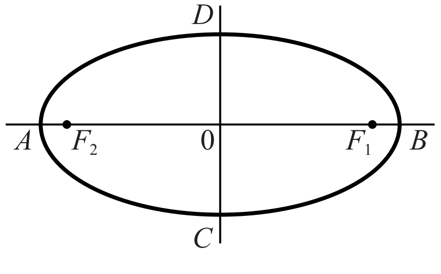
7. http://www.nkj.ru

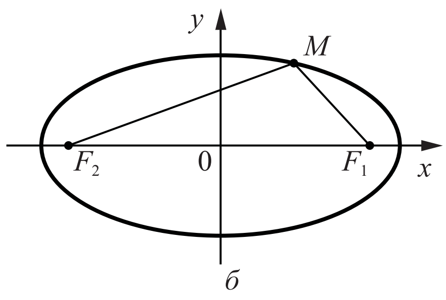
8. http://www.etudes.ru/ru/etudes/


## Приложения

### Эллипс

Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$ есть заданная постоянная величина, называется эллипсом.




б

*Каноническое уравнение эллипса.*

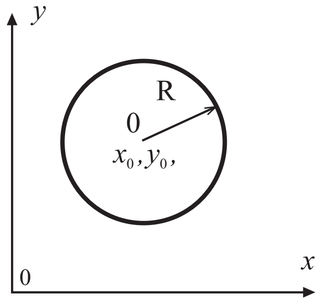
Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ , где } 0<b\le a.$$

Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число а называют большой полуосью эллипса, а число $b$ — его малой полуосью.

## Окружность

Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.




*Каноническое уравнение окружности.*

Общее уравнение окружности записывается как:

$x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$,

или

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

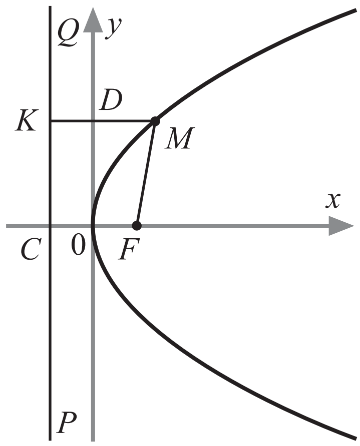
Точка $(x_0, y_0)$ — центр окружности, $R$ — её радиус.

*Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат:*

$x^2 + y^2 = R^2$

## Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

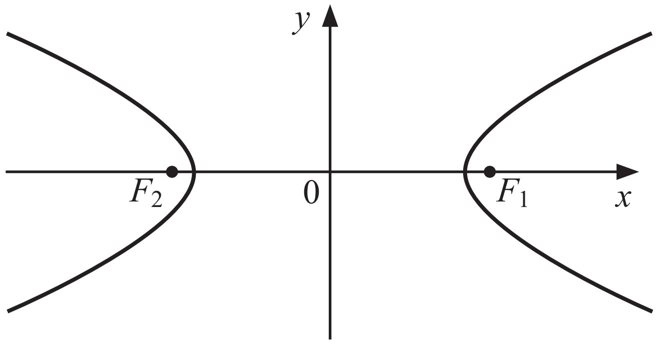



*Каноническое уравнение параболы в прямоугольной системе координат:*

$y^2 + = 2px$ (или $x^2 + = 2py$, если поменять местами оси), где $p$ (фокальный параметр) — расстояние от фокуса до директрисы.

## Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют гиперболой.




Для любой гиперболы можно найти декартову систему координат такую, что гипербола будет описываться уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Числа $a$ и $b$ называются соответственно вещественной и мнимой полуосями гиперболы.

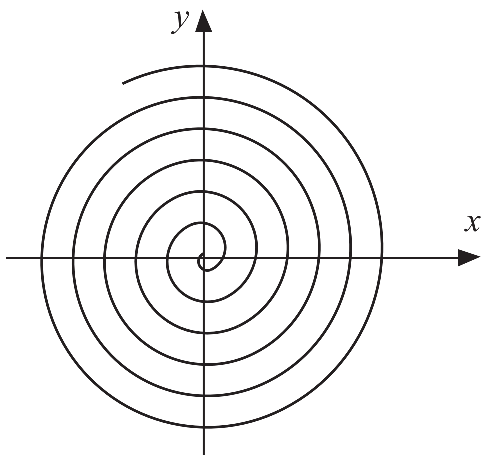
## Архимедова спираль

**Спираль Архимеда** задаётся уравнением:

$$r = a\varphi,$$

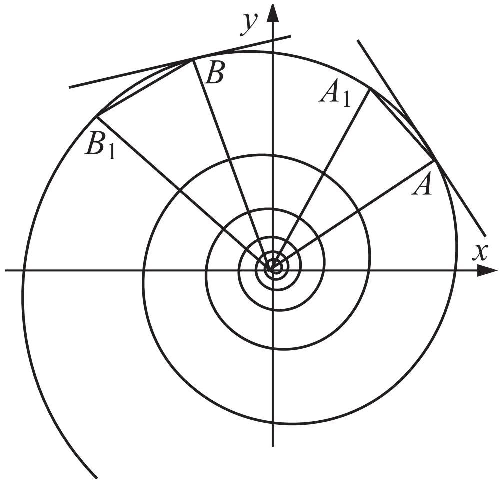
где $a$ — некоторое фиксированное число.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам ц никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус $r$ также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = a\frac{\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т.е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса $r$ будет в три раза больше и т.д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь учёного, её открывшего и изучившего.



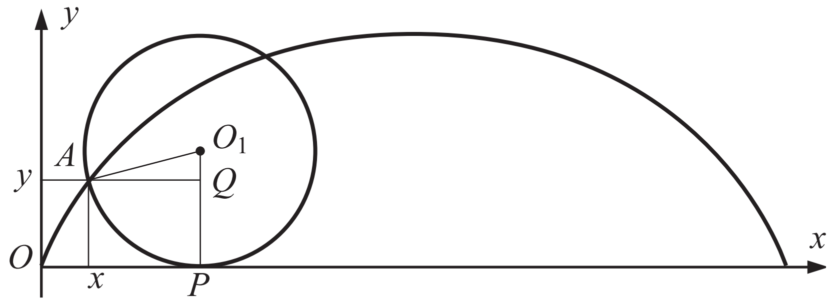
### Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль задаётся уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где $\underline{a}$ — некоторое фиксированное положительное число, $\varphi$ — угол, измеряемый в радианах.




### Циклоида

Рассмотрим циклоиду — кривую, которая описывается точкой, закреплённой на окружности радиуса, катящейся по прямой.




Найдём параметрические уравнения циклоиды. Пусть окружность катится по оси $Ox$ и в начальный момент времени касается начала координат. Предположим, что окружность повернулась на некоторый угол величины $t$. При этом точка касания $O$ на окружности переместится в точку $A$. Поскольку дуга $AP$ окружности при этом прокатилась по отрезку $OP$, то их длины равны, т.е. $AP = OP = Rt$. Для координат $x$, $y$ точки $A$ имеем

$$x = OP - AQ = Rt - R\sin t = R(t - \sin t),$$

$$y = O_1P - O_1Q = R - R\cos t = R(1 - \cos t)$$

и, значит параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$