ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В ИЗУЧЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Засядко Ольга Владимировна,
кандидат педагогических наук, доцент; доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета, г. Краснодар

Косярский Александр Алексеевич,
педагог дополнительного образования Центра детского творчества «Прикубанский», г. Краснодар

Шмалько Светлана Петровна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета, г. Краснодар

В статье представлены примеры визуализации простейших уравнений математической физики в структурно-логических схемах классификации линейных уравнений для частных производных второго порядка по типам и приведения их к каноническому виду.

Ключевые слова: *визуализация, канонический вид, классификация, линейные уравнения в частных производных второго порядка, структурно-логические схемы, уравнения математической физики.*

Тенденции вузовского образования на сегодняшний день таковы, что во время обучения студенту отводится всё больше времени для самостоятельной работы над учебным материалом, при этом известные учебные пособия недостаточно обеспечивают интенсификацию обучения по новым образовательным стандартам.

Во время обучения необходимо:

а) научить студентов думать и работать так, чтобы они умели активно использовать математические методы, с которыми познакомились в процессе обучения математике;

б) добиваться глубокого понимания сущности изучаемых теоретических вопросов при решении математических задач различной сложности.

Для студентов определённые трудности связаны с большой плотностью информации, которую они получают с первых дней занятий математическими дисциплинами; с нехваткой времени, чтобы освоить специфику и тем более овладеть навыками решения различных задач, с неумением напряжённо работать.

Многие студенты недостаточно владеют методами применения математического инструментария, что мешает им усваивать материал на нужном уровне.

Преподаватели сталкиваются с нехваткой выделенного учебным планом времени, чтобы качественно научить студентов методам и навыкам решения различных математических задач. За ограниченный период времени необходимо дать наиболее полный объём информации об основных математических моделях, реальных математических процессах, при этом важно изложить материал в форме, максимально доступной для восприятия, чтобы обеспечить развитие математической культуры студентов в рамках прикладной направленности обучения.

Естественно, такое положение не может не сказаться на качественном уровне усвоения математических дисциплин, в частности на выработке навыков решения уравнений математической физики. В связи с этим целесообразно решать проблему методом интенсификации обучения. «Дидактическая задача педагога заключается в том, чтобы сложное и непонятное сделать простым и ясным, громоздкое — компактным, продолжительное — лаконичным, распределённое и рассредоточенное — концентрированным, фрагментарное — цельным, разорванное — сплошным» [6]. То есть сделать более доступным и наглядным материал, используемый для изучения темы или модуля, за более короткий период времени. Эта задача сводится к необходимости сгущения (уплотнения, сжатия) учебной информации путём дополнительной систематизации и обобщения.

Авторами были разработаны структурно-логические схемы по различным темам [3, 5], используемые как при объяснении нового материала, так и для обобщения знаний по дисциплине при проведении итогового тестирования. Для более эффективного изучения математических дисциплин, предусмотренных учебным планом направления, необходимо содержание задач наполнять информацией профессиональной направленности. Схемы освобождают от неактуальной информации, способствуют более рациональному распределению теоретического материала: обеспечивают обобщённость и системность, устраняют разрозненность учебного материала. Структурно-логические схемы существенно экономят учебное время, они фактически выполняют функцию чертежа, без которого обучающийся просто пытается заучивать словесный текст без его понимания.

Для правильного использования схем обучающиеся должны владеть навыками анализа, синтеза, сравнения. Схему можно оперативно «охватить единым взором», зрительно «сфотографировать», в то время как словесный текст воспринимается только при последовательном чтении. Структурно-логические схемы содержат необходимую для долговременного запоминания учебную информацию, оформленную по правилам мнемоники. Схема помогает достаточно компактно выстроить логическую систему и содержание некоторого блока, облегчает понимание его структуры и тем самым способствует лучшему усвоению. Так, задачи по дисциплине «Уравнения математической физики», будучи тесно связанными с изучением физических процессов, имеют ярко выраженный прикладной характер. Поэтому одним из важных направлений их изучения является классификация уравнений и методов их решений.

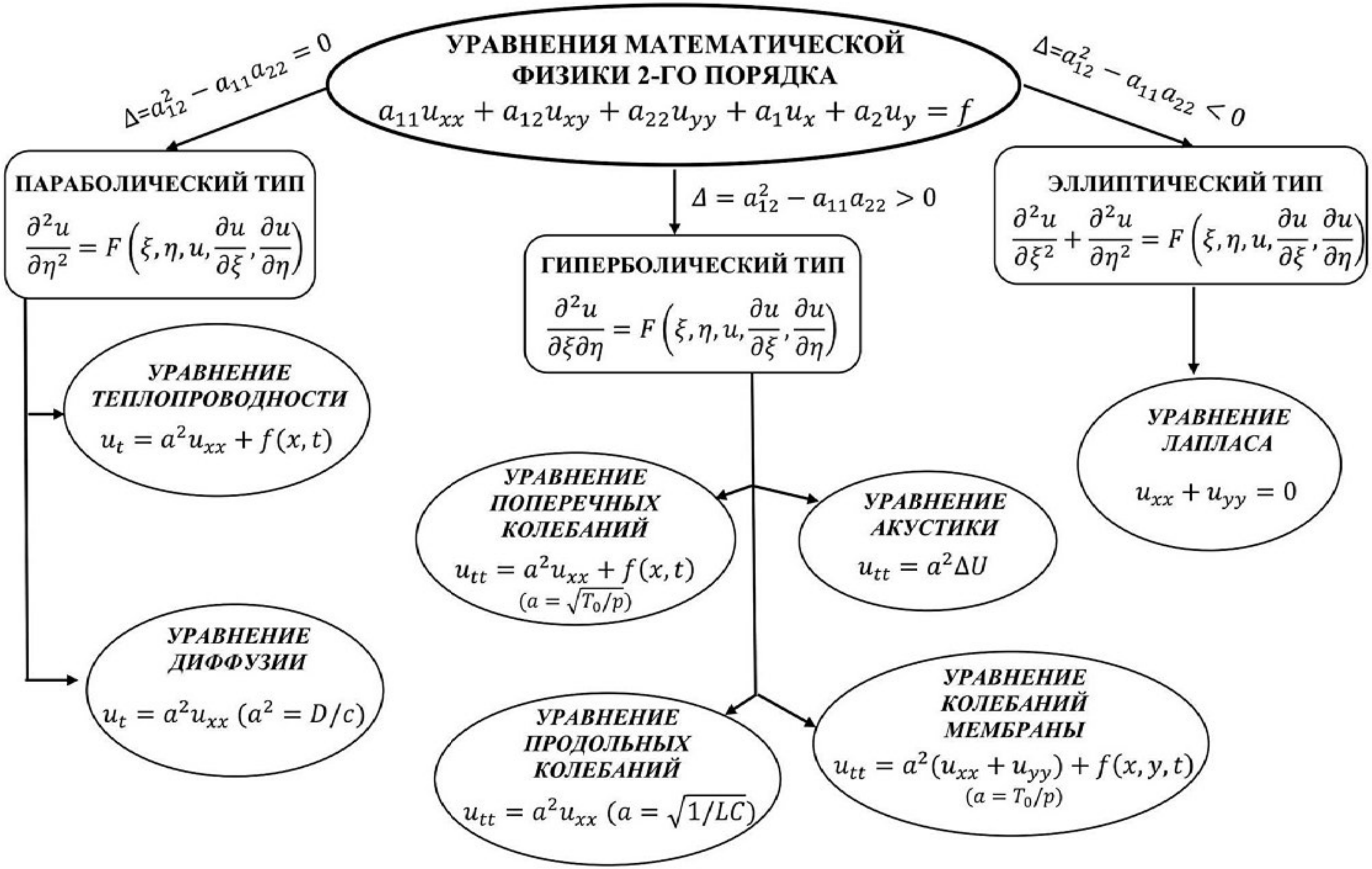
Рассмотрим визуальный подход к типизации простейших уравнений математической физики. Приведём пример структурно-логической граф-схемы «Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка» (рис. 1), используемой при изучении студентами темы «Классификация уравнений. Приведение к каноническому виду».

Классификация уравнений продиктована типичными физическими процессами и соответствует основным типам уравнений математической физики (для случая функций двух независимых переменных). Практически все учебные пособия по курсу «Уравнения математической физики» содержат элементы данной классификации [1, 2, 4, 7–9], однако наглядное их представление не использовалось.

На граф-схеме представлен общий вид линейного уравнения второго порядка. Всё разнообразие уравнений математической физики можно разделить на три класса. Принадлежность к одному из классов определяется соотношением между коэффициентами при старших производных $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Уравнения каждого класса обладают общими свойствами решений, имеют простейшее (каноническое) уравнение. В граф-схеме указаны некоторые конкретные уравнения физических процессов, приводящихся к уравнению соответствующего типа.

Другим примером структурно-логической схематизации является таблично-матричная опора «Алгоритм приведения дифференциального уравнения с частными производными второго порядка к каноническому виду» (рис. 2), также используемая при изучении студентами темы «Классификация уравнений. Приведение к каноническому виду».

Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго



▲ **Рис. 1.** *Граф-схема «Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка»*

порядка вызывает у студентов определённые затруднения в связи с большим объёмом используемой учебной информации, изученной в других дисциплинах. В некоторых источниках [1, 2, 4, 7–9] присутствует словесное описание алгоритма приведения к каноническому виду дифференциального уравнения с частными производными второго порядка; схематического описания такого алгоритма, которое можно было бы охватить одним взглядом и понять, на каком этапе решения вы сейчас находитесь, нет. Поэтому мы предлагаем следующую схематическую таблично-матричную опору (рис. 2).

Алгоритм приведения дифференциального уравнения с частными производными второго порядка к каноническому виду начинается с определения коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} при вторых частных производных в уравнении. Затем по знаку дискриминанта определяем тип уравнения: $\Delta > 0$ — гиперболический, $\Delta = 0$ — параболический или $\Delta < 0$ — эллиптический. На следующем этапе составляем характеристическое уравнение. Затем, разделив его на dx^2, разрешаем уравнение характеристик как квадратное относительно $\frac{dy}{dx}$.

Находим общие интегралы уравнений и вводим новые переменные ξ, η, соответствующие типу уравнения. Вычисляем по правилам дифференцирования сложной функции вторые частные производные, входящие в исходное уравнение с новыми переменными, и в итоге получаем канонический вид соответствующего типа уравнения.

Схемы, в зависимости от их образовательного назначения, могут выполнять различные функции: гностическую, диагностическую, корригирующую, контролирующую, обучающую [10]. Внедрение предложенных авторами граф-схемы и таблично-матричной опоры можно расценивать как эффективный приём развития воображения, логического и творческого мышления обучающихся.

Человек в силу своей биологической природы способен мыслить, в том числе и схемами, представленными в виде модели природных и социальных явлений. Поэтому использование метода сгущения содержания при моделировании учебного материала, на наш взгляд, способствует развитию определённых профессиональных компетенций будущего специалиста: оперативной памяти, концентрации и переключаемости внимания, пространственного и логического мышления (способности анализировать и сопоставлять элементы учебной информации, моделировать простейшие учебные ситуации); помогает усвоению математической терминологии. Всё выше предложенное направлено на повышение качества высшего образования, так как является средством для формирования прочных теоретических знаний при обучении математическим дисциплинам.

1	*Дано дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:* $\boldsymbol{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y = f(x,y)}$		
2	*Вычисляем значение дискриминанта:* $\Delta = \boldsymbol{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$		
	$\Delta > 0 \Rightarrow$ **гиперболический тип**	$\Delta = 0 \Rightarrow$ **параболический тип**	$\Delta < 0 \Rightarrow$ **эллиптический тип**
3	*Составляем уравнение характеристик:* $\boldsymbol{a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0}$		
4	*Разрешаем уравнение относительно производной* $\frac{dy}{dx}$*, получаем уравнение вида:* $\boldsymbol{a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0}$		
5	*Находим корни квадратного уравнения по формуле* $\int \frac{dy}{dx} = \int \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$ *в виде функций:*		
	$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = C_1 \\ \varphi_2(x,y) = C_2 \end{cases}$	$\varphi(x,y) = C$	$\varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y)$
6	*Вводим новые переменные* $\boldsymbol{\xi, \eta}$		
	$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases}$	$\xi = \varphi(x,y)$ η *– любая дважды непрерывно-дифференцируемая функция, невыражаемая через* ξ	$\begin{cases} \xi = \mathrm{Re}(\varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y)) = \varphi(x,y) \\ \eta = \mathrm{Im}(\varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y)) = \psi(x,y) \end{cases}$
7	*Вычисляем вторые частные и первые производные функции, зависящей от новых переменных* $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$*, входящие в исходное уравнение.*		
8	*Выполняем алгебраические преобразования над полученным равенством. Приводим уравнение к следующему каноническому виду:*		
	$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$

▲ **Рис. 2.** *Таблично-матричная опора «Алгоритм приведения дифференциального уравнения с частными производными второго порядка к каноническому виду»*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики: учеб. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1982. — 336 с.
2. *Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики: учеб. пособие для мех.-мат. и физ. спец. вузов. — 2-е изд., доп. — М.: Наука, 1985. — 310 с.
3. *Боровик О.Г., Грушевский С.П., Засядко О.В., Карманова А.В., Шмалько С.П.* Приложения в экономике функции, производной и интеграла: учеб. пособие. — Краснодар, 2010. — 183 с.
4. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики: учеб. для студентов вузов. — 2-е изд., стёр. — М.: Физматлит, 2008. — 399 с.
5. *Грушевский С.П., Засядко О.В., Иванова О.В., Мороз О.В.* Высшая математика в схемах и таблицах: учеб.-метод. пособие. — Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2018. — 109 с.
6. *Грушевский С.П., Остапенко А.А.* Сгущение учебной информации в профессиональном образовании: монография. — Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2012. — 188 с.
7. *Емельянов В.М., Рыбакина Е.А.* Уравнения математической физики: практикум по решению задач: учеб. пособие для студентов вузов. — СПб.: Лань, 2008. — 213 с.
8. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2013. — 352 с.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
10. *Шмалько С.П.* Сгущение учебной профессионально ориентированной информации по математике при обучении студентов-экономистов // Теория и практика общественного развития. — 2011. — № 6. — С. 150–166.