Элементы комбинаторики в курсе математики

Константин Никитович Лунгу, *профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Московского государственного открытого университета*

1. Тема «Элементы комбинаторики», на наш взгляд, наименее разработана в учебных курсах математики. Специально комбинаторике посвящена известная классическая книга Н.Я.Виленкина «Комбинаторика»[1], хотя задачи по комбинаторике можно встретить во многих пособиях для поступающих в вузы (например, в известном сборнике под редакцией М.И.Сканави, сборнике конкурсных задач В.М.Говорова в соавт. с др.), в научно популярной литературе[2]. Тема «Элементы комбинаторики» представлена в книге В.В.Вавилова и др.[3], которая предназначена для учащихся старших классов с углублённым изучением математики, а также для слушателей подготовительных отделений и курсов, поступающих на математические специальности классических университетов, тема «Комбинаторика» методически разработана в капитальном учебнике С.И.Новоселова[4] для студентов пединститутов. В стандартном курсе элементарной математики для общеобразовательных школ эта тема вовсе не предусмотрена.

В «Программах для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев»[5] за 2002 год, в той части, которая содержит программу содержания обучения для школ (классов) с углублённым изучением математики (С. 248), написано, что в программу включены самостоятельные разделы (комплексные числа, элементы комбинаторики, элементы теории вероятностей и статистики), которые в настоящее время в школе не изучаются, однако являются важными содержательными компонентами системы непрерывного математического образования.

Включение этих дополнительных вопросов преследует две взаимосвязанные цели. С одной стороны, это создание в совокупности с основными разделами курса базы для удовлетворения интересов и развития способностей учащихся, имеющих склонность к математике, с другой — восполнение содержательных пробелов основного курса, придающее содержанию углублённого изучения необходимую ценность.

Программа предусматривает возможность изучения содержания курса с различной степенью полноты.

С другой стороны, курс «Теория вероятностей и математическая статистика» является обязательной дисциплиной практически для всех специальностей вузов, хотя поступают туда не только учащиеся школ или классов с углублённым изучением математики. Как правило, каждый учебник по теории вероятностей начинается в своей содержательной части словами: **при классическом определении за вероятность события *A* принимается отношение числа *m* благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу *n* возможных исходов.**

Для вычисления этих величин используются формулы комбинаторики (размещений, перестановок и сочетаний с повторениями или без), которые, как правило, студентами не понимаются и даже не воспринимаются, к тому же чаще всего соответствующие формулы даже не приводятся.

Каждый преподаватель, читающий курс «Теории вероятностей», вынужден восполнить этот пробел и знакомить студентов с соответствующими основными комбинаторными понятиями и формулами, решить хотя бы несколько примеров

[1] **Виленкин Н.Я.** Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

[2] **Гельфанд С.И., Гервер М.Л., Кириллов А.А., Константинов Н.Н., Кушниренко А.Г.** Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. М.: Наука, 1965.

[3] **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.** Задачи по математике. Алгебра. М.: Наука, 1988.

[4] **Новоселов С.И.** Специальный курс элементарной алгебры. М.: Советская наука, 1951.

[5] Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. Математика. 5–11 классы. М.: Дрофа, 2002.

для их интерпретации и дальнейшего использования. Только таким образом можно обеспечить минимальный уровень понимания классического понятия «вероятности события» и на этой основе формировать умения и навыки самостоятельного выполнения упражнений, решения учебных задач.

Краткое рассмотрение нескольких комбинаторных задач приводит лишь к формализму и невозможности применить соответствующие понятия на практике. Этой теме необходимо уделить внимание также и потому, что она используется и в дискретной математике и в ряде других специальных дисциплин.

Многие (а может быть, и все) процессы в природе подчиняются вероятностным, а точнее, комбинаторным, законам и мы глубоко чувствуем это. Никто сегодня не может дать прогноз развития развития даже цивилизации в целом, не говоря об экономическом или социальном трендах, прогнозы постепенного развития сопровождаются катастрофическими провалами. Есть основания предполагать, что математика как средство описания реальных процессов (количественных отношений, пространственных форм и структур) плохо используется в практике управления. Прогноз опирается на обработку «глобальных» (за столетия или даже тысячелетия) статистических (временных) рядов, содержащих и тренд, и циклические составляющие[6].

Классическая наука обходилась исследованиями большей частью линейных процессов. Изучение современных нелинейных процессов требует привлечения новых методов исследования, таких как кооперация, классификация, систематизация, моделирование. Сегодня нужно обладать нелинейным мышлением, который нужно сначала формировать математическими средствами. Именно «Комбинаторика» — тот раздел, в котором каждый может обнаружить проявления «хаоса» и необходимость его систематизации и структуризации[7].

Для примера обратимся к следующей, казалось бы, ясной каждому задаче.

Задача 1 (о выходе из электрички). В электричку на станции «Красногвардейская» зашла тысяча пассажиров. Сколькими способами они могут выходить из поезда на протяжении части маршрута, насчитывающего двадцать остановок?

Хаос, который возникает в голове при попытке мало-мальски вникать только в смысл задачи, легко структурируется комбинаторным (нелинейным) мышлением. Таких вариантов 20^{1000}. Вместе с тем, от того, где и сколько человек выходят в том или другом месте, зависит метод планирования города, его инфраструктуры. Ясно, что в природе есть ситуации еще «хаотичнее», но их нужно знать, понимать и использовать для принятия решений.

Можно представить себе более простую ситуацию, которая касается многих автолюбителей. На сложном перекрёстке (в Братееве) движение регулируется 10 светофорами. В определённый момент система управления светофорами нарушилась. Сколько времени необходимо автолюбителю ждать, пока для него представится благоприятная возможность проезда через перекрёсток, если на одно переключение светофоров потребуется лишь одна минута? Комбинаторика утверждает, что кто-то должен ждать много недель, а разных способов освещения могут быть 3^{10}.

Понятия комбинаторики отнюдь не простые, они имеют свою специфику, что, по-видимому, препятствует их включению их в основную программу для средней школы. На наш взгляд, изучение комбинаторики в школе или вузе возможно и даже успешно при надлежащей методической разработке соответствующего материала. Для этого важно выбрать правильный и эффективный метод введения понятий, использовать подходящие для них способы интерпретации и опираться на приемы учебной мыслительной деятельности, которые помогут преодолеть все появляющиеся трудности.

2. Историческая справка. С комбинаторными задачами люди имели дело ещё в глубокой древности, когда, например, выбирали наилучшее расположение воинов при защите от врага, придумывали узоры на посуде, одежде. Позже появились игры в шахматы, домино, карты, кости, которые требовали от игрока умения рассчитывать свои очередные действия, продумывать возможные комбинации своих действий и действий противника, предусматривать возможные исходы.

---

[6] **Лунгу К.Н.** О некоторых уточнениях, связанных с аппроксимациями при исследовании временных рядов // Анализ развития социально-экономических систем на основе моделирования. М., 1988. С. 91–94.

[7] **Михеев В.И., Лунгу К.Н.** Проблема формирования нелинейного мышления учащихся и студентов эпохи информатизации // Вестник РУДН, сер.: ФЕО. №1 (10), 2005. с. 79–85.

Первые математические понятия, которые ввёл человек в своём сознании, были дискретные понятия «один» и «много». Впоследствии, при необходимости делить урожай и добычи, возникла потребность обратиться к понятию «непрерывность», а далее «дискретная» и «непрерывная» математики развивались параллельно.

В течение многих веков комбинаторика развивалась в рамках геометрии и алгебры. Ещё древнегреческие учёные уделяли внимание комбинаторике фигур и чисел. Как ветвью математики комбинаторика стала в XVII веке, как результат анализа игровых ситуаций. Комбинаторными задачами занимались Галилео Галилей (1564–1642), крупнейшие математики Франции Блез Паскаль (1623–1662), Пьер Ферма (1601–1655) и другие учёные. Впоследствии комбинаторика стала развиваться под влиянием «теории шифрования». Тайна переписки интересовала дипломатов и заговорщиков, королей и преступников. Изобретались способы кодирования и декодирования, шифровки и расшифровки.

В течение многих лет соотношение дискретного и непрерывного в математике проявлялось через соотношения алгебры и геометрии. В рамках алгебры в начале XIX века в российских гимназиях вводятся элементы комбинаторики и бином Ньютона, а в начале XX века в вузах вводится комбинаторный анализ и статистические методы. В середине XX века реорганизуется школьный курс математики; в результате из разделов дискретной математики в школьной программе представлены только «Числовые последовательности» и «Метод математической индукции».

Комбинаторика как математическая наука имеет многочисленные приложения в самых различных научных направлениях: в физике, биологии, криминалистике, химии. С появлением компьютеров роль комбинаторики существенно повысилась, она помогает составлять сложнейшие модели явлений и процессов, которые без комбинаторики были невозможными.

3. Обратим внимание сначала на следующие обстоятельства. В школьной математике ученик имеет дело с двумя основными математическими объектами: «число» («буква») и «точка». Условно говоря, все вычислительное связано с числами, все конструктивное — с точками. К числам, точкам и действиям с ними присоединяется много производных понятий: выражения числовые или буквенные, функции, фигуры. С этими «фундаментальными абстракциями» учащиеся справляются, хотя с различной «лёгкостью». Математика для ученика, как учебная дисциплина, состоит, прежде всего, из числовых и буквенных выражений, формул, функций и графиков, уравнений, неравенств, фигур, символов.

Комбинаторика представляет особую математическую дисциплину, объект которой — специальные множества, комбинации, соединения элементов одного или нескольких множеств. Некоторые такие комбинации, соединения именуются: *размещения, перестановки, сочетания;* при этом различают случаи, когда элементы в соединениях повторяются или не повторяются. Для учащихся и студентов комбинаторика — это специфическая наука, отличная от привычной математики. Здесь они имеют дело с понятиями другой природы — множествами, а задача комбинаторики состоит в определении числа элементов этих множеств. Соединения элементов в множества происходят по самым разным признакам, явно не математическим.

Пример: сколькими способами можно составить пятицветочный букет из 30 цветков, имеющихся в вазе? Соединение цветков в букете — не математическое действие. Также нематематическими являются комбинации людей, которые выходят из электрички на той или иной станции.

Для того чтобы усвоить комбинаторику, уметь решать комбинаторные задачи, необходимо научиться составлять комбинаторные модели. Построение этих моделей предполагает умения анализировать структуру формируемых множеств через абстрагирование и конкретизацию, классификацию и систематизацию, путём сравнения и аналогии.

В комбинаторике отчётливо проявляется разница между эмпирическим и теоретическим видами мышления, между индуктивным и дедуктивным подходами к познанию закономерностей, между частным и общим.

Абстракция выступает как важный мыслительный приём, при котором элементы произвольной природы необходимо превратить в математические элементы — числа, буквы и т.п.

Множества, фигурирующие в комбинаторике, многочисленны и иногда трудно различимы. Это создаёт в сознании необычный «сумбур и хаос», иногда трудно преодолимый, рассеивает внимание ученика. Поэтому для решения комбинаторных задач от него требуется некоторое напряжение, усидчивость, настрой, установка на поиск закономерности, структуры, системы, установка на понимание.

Справедливости ради отметим, что в математике встречаются и более сложные понятия, чем в комбинаторике, как по структуре, так и по способам применения: в топологии, в теории групп, в теории дифференциальных уравнений, в теории функций многих комплексных переменных, теории многообразий. Вместе с тем, с ними легче (естественно, студенту математику) справиться, потому что их природа привычнее, они «более математические».

В зависимости от того, что первично в определении комбинаторных понятий — эмпирическое, индуктивное, частное или, наоборот, теоретическое, дедуктивное, общее или их сочетания, можно строить разные подходы к изучению этой темы. Разным студентам или ученикам будут доступны разные подходы.

В этой статье мы рассматриваем первый вариант, подход, который мы используем в практике обучения студентов экономических специальностей. В основу этого подхода ставим конструктивный подход, принцип доступности или природосообразности, восхождение от частного к общему, эмпирическое обобщение, приём систематизации через структурирование.

Основные понятия комбинаторики

Основой для введения комбинаторных понятий является система типовых, опорных, именованных задач, способствующих пониманию построения комбинаторных множеств, их структурированию, систематизации и поиску способов определения количества элементов таких множеств.

1^0. Опорные задачи.

Задача 1 (о расписании). Завуч школы должен составить на понедельник расписание из 6 уроков. Сколькими способами это можно сделать, если он должен использовать 10 учебных предметов?

Пояснение. Уточним сначала, что два расписания считаются разными, если они отличаются либо хотя бы одним предметом, либо или их порядком. Таким образом, каждое расписание представляет собой комбинацию или соединение 6 разных предметов, взятых из 10. Их число обозначаем символом A_{10}^6.

Решение. С чего начать? Первая цель — понять, что такое расписание. Примерами разных расписаний могут служить следующие аббревиатуры ФОРМАХ, ФХИРМА, РИФОМА (буквами обозначены предметы — физика, обществоведение, иностранный, русский, математика, астрономия, химия). Этим отвечаем на вопрос «что?» (что такое расписание? Уточняем, что расписание — это последовательность разных уроков, два расписания отличаются друг от друга либо порядком, либо хотя бы одной дисциплиной).

Следующая цель — выработать эффективный приём, который позволил бы обнаружить правильную закономерность получения формулы вычисления искомого числа расписаний. Это механизм структуризации и систематизации, основанный на сравнении.

Рассуждения

1) Первым уроком можно поставить один из 10 предметов: имеем 10 возможностей (вариантов) составить расписание из одного урока и запишем это так: $A_{10}^1 = 10$. Предположим, что в качестве первого урока записали конкретный предмет, скажем Ф. Этот предмет далее не участвует в выборе, и нам нужно использовать остальные 9 предметов. Уточняем: можно составить 10 разных одноурочных расписаний.

2) В качестве второго урока можно брать любой из 9 оставшихся предметов (9 возможностей выбирать второй урок). Поскольку на место первого урока можно было брать 10 предметов, а на место второго любой из 9, то два первых места в расписании можно занимать $10 \cdot 9$ способами. Другими словами, число всех двухурочных расписаний в 9 раз больше числа одноурочных. Записываем это так: $A_{10}^2 = 10 \cdot A_9^1 = 10 \cdot 9$. Если составлено какое-то двухурочное расписание, то в нём заняты два предмета, и они в дальнейшем не участвуют, а третий урок можно выбирать из 8 оставшихся предметов.

Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии. Укажем только их результаты.

3) Число всех трёхурочных расписаний в 8 раз больше числа двухурочных, и записываем это так: $A_{10}^3 = 8 \cdot A_{10}^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. И так далее.

Число всех расписаний из 6 уроков равно $A_{10}^6 = \cdot\ 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 30240$). Важно описать словами структуру полученных числовых формул.

Казалось бы, простые рассуждения, должны быть понятны всем, но оказывается, что это далеко не так. И непонятным в цепочке рассуждений является следующий вывод, сделанный в п.2. Почему возникает действие умножения 10·9? Для того, чтобы это место было всем понятным, целесообразно привести конкретную, визуальную модель рассуждения.

Для её получения необходимо воспользоваться законом «малого числа» (авторский), означающего, что та или иная модель должна быть компактной и кратковременной. В данном случае уместно составлять все одноурочные и двухурочные расписания из четырёх предметов (скажем, Р, М, Ф, Х). Для компактности расписания запишем его в виде строки. Одноурочные: Р; М; Ф; Х. $A_4^1 = 4$. Двухурочные расписания помещаем в таблицу согласно описанной выше схемы: первым уроком может быть одна из четырёх дисциплин, а вторым — одно из оставшихся три:

$$\left\{\begin{matrix} PM & P\Phi & PX \\ MP & M\Phi & MX \\ \Phi P & \Phi M & \Phi X \\ XP & XM & X\Phi \end{matrix}\right\}$$

В таблице, состоящей из $12 = 4 \cdot 3 = A_4^2$ элементов, соблюдена структура построения расписаний: на первом месте (левый столбец) содержит любую (все) из 4 дисциплин, а на втором месте — любую из оставшихся 3.

Этим мы достигаем событие понимания в решении данной задачи, которое является основным условием формирования комбинаторных понятий.

Задача 2 (о выборах). Из 25 отличников школы следует выбирать 3-х участников олимпиад по математике, физике, химии. Сколькими способами можно это делать, если каждому отличнику безразлично, где участвовать?

Решение. Постановку задачи необходимо осознать, понимать, её можно моделировать в аудитории на конкретных лицах. Искомое число обозначим символом A_{25}^3.

Простой анализ выглядит так: по одному предмету можно выбирать один из 25 кандидатов (25 вариантов), по второму — один из оставшихся 24, значит, команду из двух человек можно выбирать 25 · 24 способами, а команду из трёх человек — 25 · 24 · 23. Имеем полную аналогию с предыдущей задачей. Ответ: $A_{25}^3 \cdot = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$.

Описывая главное характеристическое свойство получаемых множеств, можно переходить к определению первого комбинаторного понятия — размещения. Заметим, что число предварительных, опорных задач зависит от того, насколько подготовлена аудитория к восприятию и пониманию соответствующего материала, можно обойтись и одной задачей.

Размещения

Рассмотрим некоторое множество X, состоящее из n элементов, и пусть m — произвольное натуральное число, не превосходящее n.

Определение. Соединения из n элементов по m в каждом, которые отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком, называют *размещениями*.

Число размещений из n элементов по m обозначим символом A_n^m . Буква A — начальная буква французского слова *arangamente* — размещение.

Имеет место формула:
$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

На закрепление понятия можно решить следующие задачи, осознавая и понимая, что в них идёт речь именно о размещениях.

Задача 3 (о числах). Сколько трёхзначных чисел можно составить из 9 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждая цифра в одном числе записывается только один раз? Ответ: 9 · 8 · 7 = 504.

Задача 4 (о призёрах). В розыгрыше первенства по волейболу участвуют 15 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали? Ответ: 15 · 14 · 13 = 2730.

Задача 5 (о поощрениях). Администрация клуба решила поощрить группу спортсменов, состоящую из 15 человек, пятью путёвками на отдых разной стоимости.

Сколькими способами можно это делать, если все спортсмены равноправны?

Ответ: 15 · 14 · 13 · 12 · 11 = 360360.

Дополнительные задачи

6. В магазине продают открытки 8 видов. Сколькими способами можно купить 6 открыток разных видов?

Ответ: $A_8^6 = 20160$. Указание: первую открытку можно выбрать 8 способами, вторую — 7 (они должны быть разных видов) и т.д.

7. Сколько всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется? Ответ: $9\ A_9^6 = 136080$.

Указание: первая цифра телефонного номера может быть любая из 9 (0 не должен быть первой цифрой семизначного телефонного номера).

8. Сколькими способами можно выбирать председателя, заместителя и секретаря собрания из 25 человек? Ответ: $A_{25}^3 = 13800$.

9. Команда из 5 человек выступает на соревнованиях по бегу, в которых участвуют еще 15 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды? Ответ: $A_{20}^5 = 1860480$.

10. Компания из 6 юношей и 9 девушек танцует. В следующем танце собираются участвовать все юноши. Сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце (под участием девушки в танце подразумевается, что она приглашена на танец юношей)? Ответ: A_9^6 .

2⁰. Опорные задачи

Задача 1 (задача на составление слов). Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «**поле**» (при этом смысл слова не имеет значение).

Перед тем, как попытаться строить модель этой задачи, имеет смысл найти сходство и/или различия с задачей о расписании. Большинство студентов обнаружат сходство операций составления слов, а различие в числах ещё и в том, что здесь участвуют все буквы. При необходимости можно выписать несколько слов («**пело**», «**олпе**», «**лоеп**» и т.д.) и найти способ структуризации для определения их количества.

Рассуждения, аналогичные тем, что приведены выше, приводят к пониманию того, что число всех слов, составленных при помощи букв слова **поле,** равно 4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24.

Примечание 1. Если в качестве исходного слова брали бы слово **полёт**, то из него можно составить 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 слов (вначале было бы 5 однобуквенных), а из букв слова **предлог** можно было составить 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5040 слов. Следует обратить внимание на то, что в исходном слове буквы не повторяются. Такая ситуация будет рассматриваться отдельно, а студентов можно озаботить такой задачей (сколько разных слов можно составить из букв слова **математика**?).

Другие эмпирические приёмы рассуждения, например приём вложения или внедрения элементов, описаны в статьях[8].

Перестановки

Определение. Соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга порядком элементов, называют *перестановками*.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n . Буква P — начальная буква французского слова *permutation* — перестановка.

Имеет место формула

$P_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Принято считать: $P_0!=1$.

Дополнительные задачи

2. Сколько различных чисел можно составить при помощи цифр 1, 2, 3, 7, 8, если каждая цифра в одном числе встречается только один раз? Ответ: 5!

3. При помощи восьми цифр 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 составить различные семизначные числа так, чтобы каждая цифра входила в состав числа не более двух раз. Сколько таких чисел? А сколько чисел восьмизначных? Ответ: 7 · 7!

4. При помощи семи цифр 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 необходимо составить всевозможные различные трехзначные числа. Сколько таких чисел? Ответ: 294.

5. В столовую зашли 8 студентов. Сколькими способами они могут занимать 8 свободных мест? А 5 свободных мест? Ответ: 8!; 8!/3!

[8] **Лунгу К.Н.** Эмпирическое мышление при изучении темы «Элементы комбинаторики» // Сб. статьей и докладов IV Региональной конференции «Профессиональная ориентация и методика преподавания в системе «школа — вуз». М.: МИРЭА, 2003. С. 155–164.

3^0. Опорные задачи

Задача 1. (о букетах). В цветочной вазе 22 гвоздики. Молодой человек решил составить наилучший букет из пяти цветов. Какое при этом максимальное число букетов он мог бы составить?

Пояснение. Два букета считаются разными, если они отличаются хотя бы одним цветком. Два букета не считаются разными, если они отличаются порядком их расположения.

Решение. Обозначим искомое число букетов символом C_{22}^5 .

1) Представим себе, что в одном из составленных пятицветочных букетов производим всевозможные перестановки его цветков. Ясно, что при этом можно получить 5! комбинаций его цветков.

2) А теперь представим себе, что эту операцию «перестановок» производим со всеми возможными букетами, число которых равно C_{22}^5 . Это действие равносильно получению всех размещений из 22 цветков по 5.

3) Полученный вывод можно представить, записать в виде равенства (уравнения): $A_{22}^5 = 5!\,C_{22}^5$. Отсюда находим искомое число:

$$C_{22}^5 = \frac{A_{22}^5}{5!}\ .$$

Имеем $A_{22}^5 = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, значит $C_{22}^5 = 26334$.

Примечание. В связи с решённой задачей интересным становится вопрос: из одной корзины с 22 цветками один человек составляет 5-цветочные букеты, а из другой такой же корзины другой человек составляет 17-цветочные букеты. У кого получится большее число?

Ответ всегда (на протяжении 25 лет) один и тот же — у второго! Аналогичную задачу можно решить построением непосредственной комбинаторной модели, но эффективность и понимание при этом на 25% ниже.

Задача 2. В корзине 5 одинаковых шаров. Сколькими вариантами можно брать одновременно из корзины: а) один шар? б) два шара? в) три шара? г) четыре шара? д) пять шаров?

Решение

Чем отличается эта задача от предыдущей? Если ассоциировать корзину с вазой, шары — с цветками, то выбор группы шаров равносилен составлению соответствующего букета.

Тем не менее, проведём независимое от первой задачи рассуждение. Представим себе, что шары пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5.

а) Выбор одного шара возможно пятью способами (при отборе шара можно брать шар с номером 1, или 2, или 3, или 4, или 5.

б) Для ответа на этот вопрос следует составить всевозможные комбинации по два шара согласно их номерам: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Получили 10 комбинаций (соединений по два шара); все прочие комбинации (скажем, 21, 32, 53 и т.д.) отождествляются с этими.

Это число 10 можно представить (а почему?) как результат деления числа размещений $A_5^2 = 5 \cdot 4$ на число $P_2 = 2$ (число перестановок двух шаров).

в) Соединениями по три шара из пяти могут быть только: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. Их число равно 10.

Это число 10 можно получить (а почему?) как результат деления числа размещений $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ на число $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ (число перестановок трёх шаров).

г) Соединениями из пяти шаров по четыре являются комбинации: 1234, 1235,1345, 2345, 1245. Это число 5 можно получить (?) как результат деления A_5^3 на P_4.

д) Наконец, брать пять шаров из пяти можно одним способом, одним обхватом всех одновременно. Имеем $1 = A_5^5 : P_5$.

Примечание. Этим продемонстрирован пример, когда математический аппарат получения математической величины менее эффективен, чем нематематический (составление расписаний). Это вполне оправдывает предложение А.М. Кушнира об использовании всех пяти видов ощущений при обучении математике.

3. Сочетания.

Предположим, что множество X состоит из n элементов, а m — произвольное натуральное число, не превосходящее n.

Определение. Соединения из n элементов по m в каждом, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями* из n элементов по m.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m. Буква C — начальная буква французского слова *combination* — комбинация, сочетание.

Имеет место формула

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Принято считать, $C_n^0 = 1$.

Примечание. Из этой формулы следует, в частности, что $C_{22}^5 = C_{22}^{17}$, а отсюда можно сделать неожиданный вывод: число 5-цветочных букетов равно числу17-цветочных).

Дополнительные задачи

3. Сколькими способами можно извлечь 4 шара (одновременно) из урны, содержащей 21 шар? Ответ: $C_{21}^4 = 5985$.

4. Из группы, состоящей из 25 человек, нужно выделить для некоторой работы 20 человек. Сколькими способами можно осуществить этот выбор? Ответ: $C_{25}^{20} = C_{25}^5 = 15504$.

5. Имеется группа из 10 солдат и 7 офицеров. Сколькими способами можно образовать группу дозора из 5 солдат и двух офицеров? Ответ: $C_{10}^5 \cdot C_7^2 = 252 \cdot 21 = .5292$.

Способом моделирования и эмпирическим обобщением можно ввести понятия размещений, перестановок и сочетаний с повторений. Объём статьи не позволяет здесь остановиться на этом. Методика, приведённая выше, введения комбинаторных множеств и методика, опирающаяся на «схему выбора», а также принципы сложения и умножения, используются в пособиях[9,10]. Студенты, обучающиеся по специальностям, для которых математика является профилирующей дисциплиной, знакомятся с комбинаторикой методом от общего к частному, опирающейся на абстрактные модели и дедуктивные суждения[11]. ❑

[9] **Лунгу К.Н.** Элементы комбинаторики. // Новые технологии, №1. М.: МГОУ, 2005. С. 6–10.

[10] **Лунгу К.Н., Макаров Е.В.** Высшая математика: Руководство к решению задач. Ч. 2. М.: Наука, 2007.

[11] **Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А.** Сборник задач по высшей математике. Ч. 2. М.: Айрис Пресс, 2004.