ШКОЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Эстетическая направленность обучения математике

Тамара Алексеевна Иванова, *заведующая кафедрой теории и методики обучения математике Нижегородского государственного педагогического университета*

Наталья Юрьевна Ражева, *аспирантка Нижегородского государственного педагогического университета*

Традиционно в общественном сознании математика ассоциируется с логикой, считается «сухой» наукой. А между тем на протяжении всей истории её становления и развития учёные-математики выделяли её эстетику, её богатейший эстетический потенциал.

Основатель античной математики Пифагор (VI в. до н. э.) учил: «Всё прекрасно благодаря числу». Платон (428-348 гг. до н. э.) под красотой понимал умеренность и соразмеренность.

Известный математик А. Пуанкаре писал: «Чувство изящного в математике есть чувство удовлетворения, не скажу, какое именно, но обязанное какому-то взаимному приспособлению между только что найденным решением и потребностями нашего ума… Имеет значение не порядок вообще, а порядок неожиданный»[1].

М.С. Каган, анализируя гуманитарное знание, гуманитарный аспект изучения математики, связывает с её эстетикой: «Хотя у этой науки, изучающей общие закономерности бытия, — у математики, — нет особого раздела, сопряжённого с гуманитарным знанием… всё же определённый специфический гуманитарный аспект у неё есть — такова эстетика математики; на заре развития науки о числе аспект этот был выявлен пифагорейцами, а в XX веке, начиная с суждений А. Пуанкаре, математики всё чаще говорят о красоте математических построений — формул, уравнений, теорем, геометрических структур — и об их эстетической оценке»[2].

Эту мысль разделяет и Р. Курант: «Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству»[3].

Е.М. Вечтомов, анализируя работы философов и математиков в области эстетики математики, выделяет следующие составляющие эстетики математики: логика и язык; строгость и стройность дедукции; гармония чисел и изящество геометрических фи-гур; фундаментальные понятия, методы и конструкции; метод математического моделирования. Красота математики, по Е.М. Вечтомову, «это и самая безупречная логика, и объективная доказательность, и наиболее совершенный способ мышления»[4].

В научно-методической литературе, посвящённой вопросам эстетики уроков математики, эстетические аспекты математического образования проявляются:

- в специфике и особенностях математического содержания, к которым можно отнести абстрактность, дедуктивный характер, непреложность выводов, единство частей, совершенство языка, полезность;

---

[1] **Пуанкаре А.** О науке: Пер.с франц. М.: Наука,1990. С.385.

[2] Возрождение культуры России: гуманитарные знания и образование сегодня. СПб, 1994. С.29.

[3] **Курант Р., Роббинс Г.** Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Пер. с англ. М.: Просвещение, 1967.С.19.

[4] **Вечтомов Е.М.** Метафизика математики [Текст]: Монография / Е.М. Вечтомов. Киров: Из-во Вят-ГТУ, 2006. С.248.

- в связи математики с миром красоты в окружающей действительности (связь с красотой в технике, искусстве, природе);
- через отражение эстетики природы в математике (симметрия и асимметрия, периодичность и др.);
- в математических основах законов красоты в искусстве (в музыке, живописи, скульптуре, архитектуре);
- в истории математики;
- в отдельных математических «жемчужинах» (модели многогранников, пропорции, в том числе «золотое сечение», красивое решение задачи, компактность формул и т.д.);
- через математические мотивы в художественной литературе (В.Г. Болтянский, Г.И. Саранцев, Зенкевич И.Г. и др.).

Однако математик осознаёт, воспринимает, понимает, видит, оценивает указанный эстетический потенциал лишь через свою собственную математическую деятельность, через своё творчество. Следовательно, приобщить школьников к эстетике математики возможно лишь в том случае, если ученик не только слушает объяснения учителя, запоминает, вычерчивает красивые узоры и т.д., но и сам является субъектом учебной творческой математической деятельности. Красота в математике и в обучении математике — не одно и то же.

Для обеспечения эстетической направленности процесса обучения математике следует проанализировать имеющиеся подходы к сущности эстетики. Термин «эстетика» происходит от греческого «aistheticas» — воспринимаемый чувством. Древними было замечено, что познание мира происходит с помощью органов чувств, далее познанное осмысливается разумом. Они признавали необходимость не только науки о законах мышления — логики, но и науки о чувственном восприятии — эстетики. Чувство и мышление — это не только два уровня познания, но и два необходимых звена в цепи познания. Впервые термин эстетика ввёл Александр Баумбартен (1714–1762) для обозначения «науки о чувственном знании». Немецкий философ И. Кант (1724–1804) эстетику определяет как науку о «правилах чувственности вообще». Таким образом, зарождение эстетики связано с процессом познания, в котором чувственное, интуитивное, логическое выступают в органическом единстве.

В учебнике по эстетике читаем: «Эстетика — наука об исторически обусловленной сущности общечеловеческих ценностей, их порождении, восприятии, оценке и освоении»[5]. Разъясняя это положение, Ю.Б. Борев пишет, что эстетика рассматривает общие принципы эстетического освоения мира в процессе любой деятельности человека.

Эстетическое, согласно взглядам философов, проявляется в любой деятельности человека при условии, что она носит творческий характер. Творчество по своей природе эстетично, так как оно предполагает активизацию и концентрацию человеческих чувств, без чего не совершается интенсивная поисковая, интеллектуальная работа. «Эстетическая сущность труда выступает как проявление его творчески преобразующей природы в процессе и результате, это красота самого процесса труда и его побудительных мотивов, целей, идеалов, красота отношений, при которых совершается труд»[6].

Эстетический потенциал научного творчества учёные связывают с понятием «личностное знание». Личностное знание отражает знание, носителем которого выступает личность как индивидуальный познающий субъект. Личностное знание характеризуется объективным, социально значимым знанием, личностным смыслом, чувствами, эмоциональной окрашенностью. Личностное знание отражает сплав личного и объективного в знании. Личное связано с процессом, актом познания, объективное — с результатом. Процесс познания и продукт познания тесно связаны с опытом эмоционально-ценностного отношения к деятельности, с эмоционально чувственным познанием. Процесс познания характеризуется интеллектуальной страстностью и убеждённостью, которые ведут к побуждениям к деятельности, сопровождающейся верой, сомнениями, самоотдачей, интеллектуальной красотой, считают философы[7].

[5] **Борев Ю.Б.** Эстетика. М.: Политиздат, 1988. С.9.

[6] **Курант Р., Роббинс Г.** Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Пер. с англ. М.: Просвещение, 1967. С.30.

[7] **Герасименко В.А.** Личностное знание и научное творчество / Под ред. М.А. Слемнева. Мн., 1989. С.7.

Из сказанного выше следует, что второе условие эстетической направленности обучения математике — участие школьников в творческой поисковой математической деятельности. Под учебной творческой математической деятельностью мы, согласно И.Я. Лернеру, понимаем процесс открытия школьником субъективно нового для него знания.

Таким образом, эстетическая направленность процесса обучения математике определяется двумя взаимосвязанными аспектами: эстетическим потенциалом математического содержания и участием школьника в поисковой математической деятельности.

В работе[8] представлена модель творческой математической деятельности, которая может служить прообразом организации учебной творческой деятельности школьников (схема 1).

Схема 1

Конечно, как и всякая модель, она отражает действительность лишь приближённо. Однако эта модель может иметь непосредственное реальное воплощение в учебном процессе. Например, в соответствии с ней деятельность школьников по изучению теорем на уроке может быть организована следующим образом (схема 2).

Поясним, каким образом проявляется эстетический аспект при участии школьника в такого вида деятельности.

Во-первых, поисковая математическая деятельность характеризуется такими противоположностями, которые присущи математике и затронуты выше: индукция и дедукция, интуиция и логика, анализ и синтез, обобщение и конкретизация. Они выступают здесь в органичном единстве. Только их синтез приводит школьника к «открытию» субъективно нового для него знания. В свою очередь, участие в поиске

[8] **Иванова Т.А.** Гуманитаризация общего математического образования: Монография. Нижний Нов-город: Изд-во НГПУ, 1998.

Схема 2

Самостоятельное «открытие» математической закономерности → Выдвижение гипотезы → Поиск доказательства для её истинности или опровержения → Доказательство

предполагает и фантазию, воображение и, в определённой мере, художественный стиль мышления школьника.

Во-вторых, согласно концепции С.Л. Рубинштейна о мышлении, в динамику мыслительного процесса включены и другие мыслительные процессы, в том числе эмоции (переживания). С.Л. Рубинштейн отмечает, что реальный мыслительный процесс, сохраняя специфику мышления, существенно, качественно отличающую её от всех других психических процессов, вместе с тем реально дан в связи и взаимопроникновении со всеми сторонами психической деятельности — с потребностями и чувствами, с волевой активностью и целеустремленностью, с наглядными образами-представлениями и словесной формой речи.

Для нас важно, что процесс творческой, познавательной деятельности сопровождается возникновением эмоций. Важно, чтобы эти эмоции носили созидательный характер. Вместе с развитием мышления в процессе творческой, познавательной деятельности происходит развитие и высших, сложных эмоций, способных перейти в разряд эстетических. Психологами установлено, что с развитием познавательных способностей происходит развитие эмоциональности, чувственности. Однако чувственное и эстетическое не тождественны. Не всякое чувственное ощущение, восприятие, представление, переживание является эстетическим. Эстетическое — это высшая ступень, высшее проявление чувственности.

Ученик, увлечённый поиском решения задачи, которая требует интеллектуальных усилий и в то же время доступна ему (принцип посильных трудностей), доказательством теоремы и получивший нужный результат, испытывает такое же эстетическое переживание и удовлетворение, как и в том случае, когда он рисует, танцует, читает интересное произведение и т.д. В нашем случае ученик получает удовлетворение от успешной интеллектуальной деятельности. Каждому учителю приходилось наблюдать сосредоточенное, серьёзное, интеллектуально напряжённое лицо ребёнка, склонившегося над задачей, и то, каким светом неподдельной радости, восторга оно освещается в случае озарения, «инсайта». Чем вызвана такая увлечённость поиском? Потребностью нашего ума, чувством гармонии, порядка, заложенного в доказательствах, а также чувством удовлетворения от того, что ребёнок сам получил результат.

В-третьих, поисковая деятельность содержательна. Поэтому важно акцентировать внимание учеников на красоте математики: красоте метода, идеи, красоте формул, теорем, изящном решении задачи или доказательстве теоремы. А поскольку ученик сопричастен процессу познания, то он уже всем ходом этого процесса естественно подготовлен к эстетическому восприятию изучаемого.

Однако успешное включение учеников в творческую деятельность возможно лишь при соблюдении определённых условий. Наиболее важными, на наш взгляд, являются следующие.

Понимание смысла усваиваемого — главный момент в интеллектуальном и психическом развитии ученика. Математика — трудная дисциплина. Уровень творческости индивидуален, у каждого ученика он свой. Вместе с тем, его проявление в той или иной мере возможно лишь тогда, когда школьник понимает изучаемый материал. Без понимания невозможно участие школьника в творческой деятельности. М. Мамардашвили возникновение личностного смысла математических понятий связывает с процедурой их понимания. Смысл усваиваемого знания, его выявление составляют главное звено всего процесса усвоения. Формальные, неосмысленные знания, даже если они закреплены в памяти и воспроизводятся на уроке, остаются пустыми и бесполезными. Понимание сопровождается определённым эмоциональным фоном. И иногда от понимания решения сложной математической задачи или доказательства теоремы ученик испытывает эмоции, носящие созидательный характер, переходящие в разряд эстетических.

Следующее условие успешного включения учеников в творческую деятельность — наличие базы знаний. Поиск предполагает владение школьниками как определённым запасом знаний (определения понятий, формулировки теорем, алгоритмы и т.д.), так и умение оперировать этими знаниями (подводить под понятие, выводить следствия, делать выбор и т.д.). Участие школьников в творческой поисковой деятельности и умение на определённом уровне владеть её методами: как эвристическими (гипотетико-дедуктивными) так и методами доказательств.

Современная дидактика трактует обучение как целенаправленное, заранее запрограммированное общение, в ходе которого осуществляется образование: школьниками усваиваются отдельные стороны опыта человечества, опыта деятельности и познания, осуществляется развитие, саморазвитие и воспитание ученика. Это общение на уроке переходит в сотворчество учителя и ученика, которое строится на взаимопонимании, совместном «проживании» и переживании. Приоритетное значение имеет личность самого учителя: насколько ему самому интересно то, что он излагает, может ли он вызывать положительные эмоции, создать психологический комфорт каждому, формировать познавательные интересы («хочу» и «могу»). Общение на уроке проходит в форме диалога, который предполагает и стимулирует свободное высказывание учащимися гипотез, проблем, идёт их решение, даже если они и ошибочны. Важно создать в классе обстановку, когда любой ученик не боится высказывать своё мнение, предложить гипотезу, идею решения. Цель атмосферы сотрудничества и сотворчества учителя и ученика на уроке — поиск истин в обстановке доброжелательности, комфортности, эмоциональной напряжённости всех участников.

При этом важно создавать для каждого ученика «ситуацию успеха». Конечно, эта ситуация будет разной для каждого ученика. Поэтому в арсенале учителя должны быть вопросы и задачи разного уровня сложности. И важно каждый конкретный вопрос задавать тому ученику, для которого он находится в «зоне его актуального и ближайшего развития». Ученик испытывает удовлетворение от удачного ответа на тот вопрос, который потребовал от него некоторых умственных усилий, который заставил его думать. «Наслаждение, которое нам доставляет процесс труда, это в основном наслаждение, связанное с преодолением трудностей, т.е. с достижением частичных результатов, с приближением к результату, который является конечной целью деятельности, с движением по направлению к нему», — писал С.Л. Рубинштейн[9]. Здесь он подчёркивал, что эмоции существенно влияют и на ход деятельности.

Таким образом, сотворчество учителя и учащихся в процессе обучения — ещё одно условие успешного включения учеников в творческую поисковую деятельность.

Все перечисленные условия взаимосвязаны. Они могут конкретизироваться, дополняться. Но только их органичное единство может гарантировать успешное включение школьников в творческую поисковую деятельность, процесс и результат которой вызывают в душе ученика определённые эстетические переживания, эстетические чувства.

В качестве иллюстрации ко всему сказанному опишем один урок из нашей практики.

Тема урока: Площадь параллелограмма, треугольника, трапеции.

Учебник: Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 9-е изд. М.: Просвещение, 1999. 335 с.

Цели урока:

- открыть теоремы о площадях параллелограмма, треугольника, трапеции и найти их доказательство на основе аналогии с теоремой о площади прямоугольника;
- спрогнозировать, какие типы задач можно решать на основе изученного материала.

Структура урока:

- Мотивационно-ориентировочная часть.
  - актуализация прежних знаний и способов действий;
  - мотивация учебной деятельности;
  - постановка целей и учебных задач урока.
- Содержательная часть: открытие новых фактов и способов их доказательств или опровержений.

Подведение итогов и домашнее задание.

[9] **Рубинштейн С.Л.** Основы общей психологии. СПб.: Питер, 1999.

Ход урока

Мотивационно-ориентировочный этап

— На прошлом уроке мы изучили понятие площади многоугольника и формулы нахождения площадей квадрата и прямоугольника. Что значит найти площадь многоугольника?

— Найти площадь многоугольника — значит найти положительное число, которое показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике.

— А что такое единица измерения площади?

— За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

— Итак, площадь многоугольника — это положительное число, которое обладает некоторыми свойствами. Перечислите их.

(Учащиеся перечисляют свойства площадей фигур.)

— Найдите площади фигур, изображённых на рисунке, и выделите способ нахождения площадей.

Анализ решения задач по готовым рисункам приводит к выделению различных способов нахождения площадей:

- разбиение на единицы измерения и их подсчёт (рис. 1,а – с.57);
- разбиение на фигуры, площади которых уже даны (рис.1, б – с.57) или можно найти (рис.1,в – с.57);
- используя равносоставленность (смысл термина «равносоставленность» разъяснятся, когда решается задача (рис.1, г – с.57).

— На прошлом уроке мы установили, что находить площади фигур первым и вторым способом не всегда удобно. Поэтому была поставлена цель: вывести формулы для нахождения площадей известных нам многоугольников: квадрата, прямоугольника, параллелограмма (ромба), трапеции. Формулы площадей каких многоугольников нам уже известны?

— Квадрата и прямоугольника.

— Чем же мы должны заняться на сегодняшнем уроке?

— Наверное, нахождением формул площадей оставшихся известных нам многоугольников.

— Как бы сформулировали сами тему урока? (Учащиеся формулируют.)

— Итак, сегодня мы попытаемся **сами** вывести формулы площадей треугольника, параллелограмма, трапеции. Но для этого нам необходимо, во-первых, определить элементы, по которым можно находить площади указанных многоугольников, а во-вторых, найти (вывести) формулы.

Таким образом, учитель создаёт условия для формулировки темы урока и постановки задач самими учащимися. Школьники сами прогнозируют, какого результата и с помощью каких действий они должны достичь на уроке, чтобы потом дать оценку своей работе (испытать удовлетворение от выполненного или разочарование).

Содержательная часть

— Итак, сначала попытаемся высказать предположение, по каким элементам можно находить площадь параллелограмма, треугольника, трапеции? Для этого проанализируйте, по каким элементам определяются площади квадрата и прямоугольника? Каково их взаимное расположение?

В результате беседы, направляемой учителем, выясняется, что площади этих фигур определяются двумя смежными сторонами, которые перпендикулярны. Можно сказать, что одна сторона квадрата (прямоугольника) является основанием, а другая — высотой.

Учащиеся догадываются, что в треугольнике такие перпендикулярные элементы можно рассмотреть — сторона и высота, проведённая к этой стороне (изучали ранее). Это наталкивает на мысль о необходимости введения таких понятий, как высота параллелограмма и трапеции.

Далее выводятся эти понятия и обращается внимание на то, что у параллелограмма две высоты.

— Перейдём теперь к решению наших основных задач. Попытайтесь высказать гипотезу, посредством каких элементов может выражаться площадь параллелограмма, площадь треугольника, площадь трапеции.

Учащиеся совместно с учителем приходят к гипотезам, которые фиксируются на доске (рис.2 а,б,в – с.57).

— Начнём проверять наши гипотезы. Рассмотрим параллелограмм. Как вы думаете, какие способы для нахождения площадей, выделенные нами в начале урока, мы можем использовать?

Высказываются разные варианты. Приходят к выводу, что необходимо параллелограмм разбить на фигуры или достроить до фигуры, площадь которой известна. На дополнительные построения наталкивает задача 1,г.

Поскольку за урок выводятся формулы трёх многоугольников, то учитель проводит вывод формулы по плану, предлагаемому учениками. Таким образом, теорема появляется практически после её доказательства. Учащиеся пытаются сами дать соответствующую формулировку теоремы.

— Рассмотрим треугольник. Теперь для того, чтобы вывести формулу площади треугольника, у нас в запасе есть ещё и формула площади параллелограмма. Помним это.

Итак, для вывода формулы площади треугольника пользуемся тем же способом «достраивания» и «разбиения». Какие будут предложения?

Учащиеся быстро находят способ достраивания до параллелограмма, находят формулу и её доказательство. Здесь, на этом этапе, мы наблюдали, как активными участниками становятся и не очень «сильные» ученики. Они испытывают большое удовлетворение от удачного ответа на вопрос, который заставил их задуматься. Поэтому, чтобы такие ученики почувствовали уверенность в себе, удовлетворение от работы, необходимо эту часть урока провести, опираясь на них.

Записывается вывод формулы площади треугольника и выводится следствие для нахождения площади прямоугольного треугольника.

— Перейдём к трапеции. Итак, мы выяснили, что по аналогии с другими фигурами формулу для нахождения площади трапеции мы попытаемся вывести через основания и высоту. Каков же план наших действий?

— Воспользоваться приёмом «разбиения» и «достраивания».

— Какие фигуры могут получиться в результате таких построений? (Треугольник, параллелограмм, прямоугольник.)

Далее учащимся предлагается провести эти построения, чтобы можно было воспользоваться формулами площадей уже известных многоугольников. Учащимися были предложены варианты, которые мы систематизировали. Все варианты отражены на рис. 3 (с. 57). По рисунку 3,а по знакомой уже схеме учащиеся вывели формулу. На уроке успели устно разобрать ещё один способ доказательства (учащиеся выбрали рис.3,в).

Эта часть урока является наиболее творческой. Здесь ученики испытывают удовлетворение от каждого нового предложенного способа «построения» или «разбиения», и в то же время в глазах стоит испуг — а приведёт ли такой способ к выводу формулы? Но какое удовлетворение испытывают они, когда убеждаются в справедливости своей гипотезы! Если же ученик предлагает неверный способ, важно не просто его отвергнуть, а убедить в том, что он не прав. Важно учить осознавать, что математика — это поиск, а в процессе поиска могут быть и ошибки.

Подведение итогов урока

Учитель ставит вопросы:

— Что нового узнали на уроке?

— Вспомним, какие задачи перед собой мы поставили в начале урока, и проанализируем, выполнили ли мы их?

— Что общего можно выделить в выводе формул площадей рассмотренных фигур?

— Попытайтесь спрогнозировать, какие задачи можно решать на основе полученных формул?

— Подведите итог, чем же вы занимались сегодня на уроке?

Важно, что учащиеся на уроке рассуждали и сами делали открытия. Этим им урок и понравился

Домашнее задание

В качестве домашнего задания учащимся предлагается по записям в тетрадях и учебнику выучить теоремы и их доказательства, а для трапеции провести доказательства по одному из оставшихся рисунков или найти новые доказательства.

Сильным ученикам можно предложить провести доказательства теорем в следующей последовательности:

Площадь квадрата — площадь прямоугольника — площадь прямоугольного треугольника — площадь треугольника — площадь параллелограмма — площадь трапеции.

Опыт показывает, что ученикам больше нравятся такие уроки, которые позволяют им работать в обстановке сотрудничества. ❑

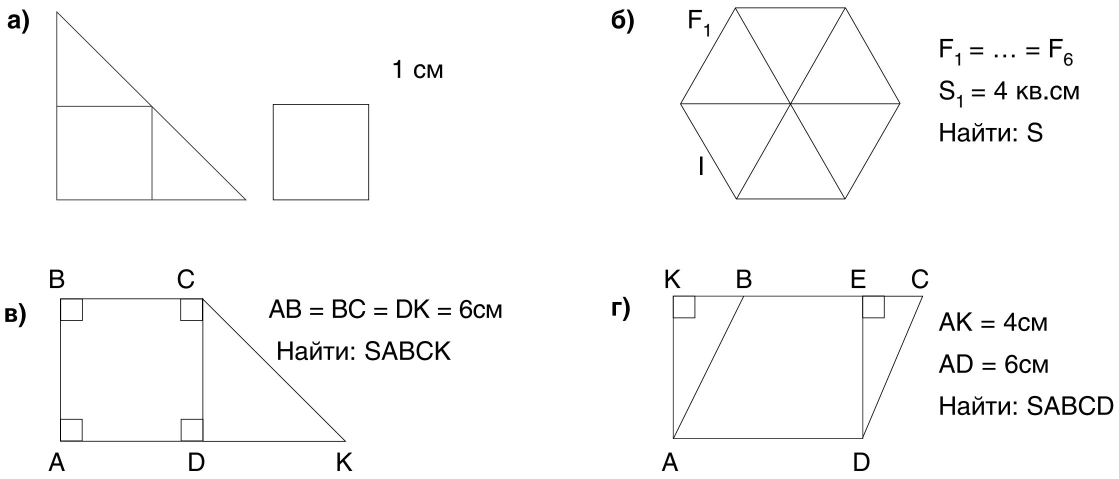

Рис. 1

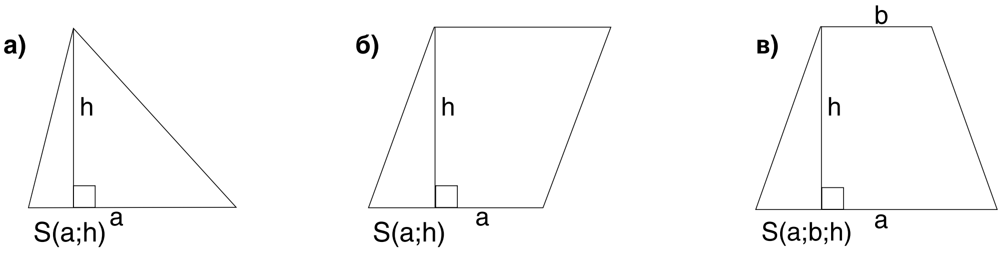

Рис. 2

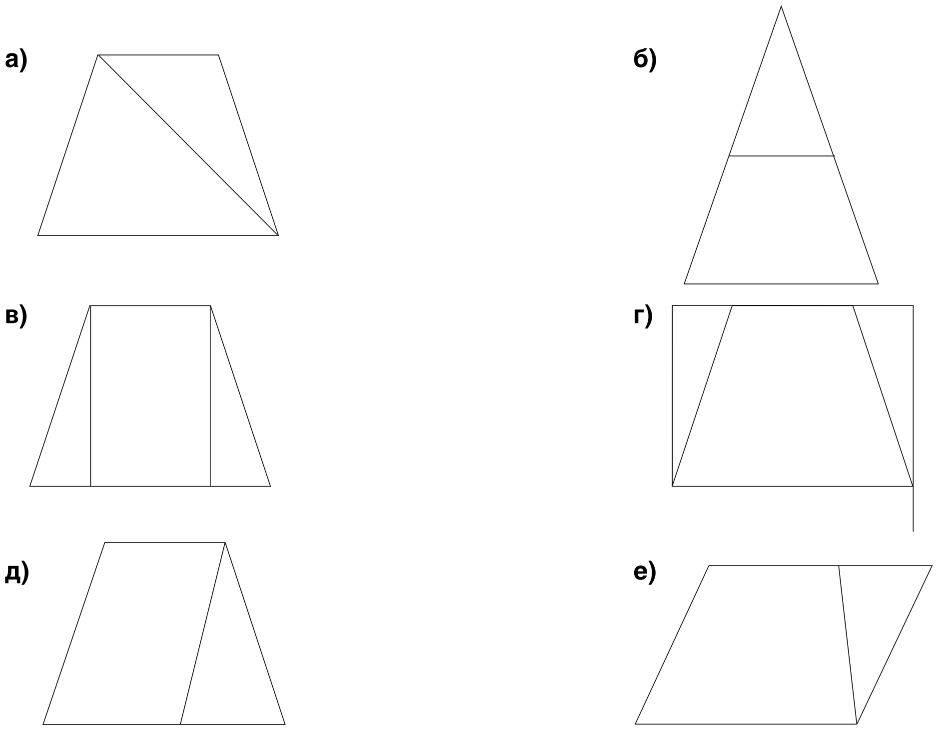

Рис. 3