Экономное изучение математики

Константин Никитович Лунгу, *профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Московского государственного открытого университета, кандидат физико-математических наук*

Елена Михайловна Борденюк, *старший преподаватель Кишинёвского медицинского университета*

Один из основных дидактических принципов — принцип преемственности требует обеспечивать совпадение «выхода» из одной системы со «входом» в другую. Это возможно тогда, когда строго соблюдаются принципы преемственности, непрерывности, последовательности, а излишние подробности не тормозят учение. Приведём пример. Требуется преобразовать выражение:

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}\right):\frac{a+b}{\sqrt{a^3b}}+\frac{2a}{b-a}\ .$$

Пример, предлагаемый абитуриентам, выполняется по действиям — этого требует методика математики средней школы и учителя математики. Хотя в данном случае имеем всего три содержательных действия, но они могут занимать существенную долю страницы, а переписывание 45 знаков примера увеличивает вероятность ошибки. Можно сэкономить и выполнить все действия по отдельности. «Смотрим и видим» главное: а) в знаменателях дробей есть общий множитель $\sqrt{ab}$, который следует вынести за скобки; б) деление можно заменить умножением на обратную дробь и из-под радикала вынести $\sqrt{ab}$, затем сократить множитель с вынесенным ранее таким же множителем; в) использовать готовые формулы

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}\quad и\quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$$

(их можно не записывать, если иметь перед собой книгу[1]); г) сумму двух дробей с одинаковыми знаменателями записать в виде одной дроби, складывая числители; д) возвести в квадрат и видеть, что происходит со средними слагаемыми.

Всё сказанное выше нужно показать в содержании исходного примера, и оформить решение так:

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}\right):\frac{a+b}{\sqrt{a^3b}}+\frac{2a}{b-a}\ =$$

$$=\left\{\left(\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}+\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}\right)\right\}=\frac{2(a+b)}{a-b}\cdot\frac{a}{a+b}-\frac{2a}{a-b}=0\ .$$

Формулы можно было вписать в фигурные скобки после первого знака равенства, а левую часть заменить одной буквой А (вместо 45 знаков исходного выражения).

Столь подробное описание процедур, участвующих в решении примера, отражает технологию его экономного решения. Добавим, что, как правило, учащиеся не используют формулы, над выводом которых долго трудились, а освобождение от радикалов в знаменателе производят через «постоянное как мир» требование — умножение и деление на…

Этот же постоянный приём используют и в вузе: студенты оправдываются — «мне так удобнее», а преподаватели требуют подробности. Кстати, в упомянутой книге специально указано, что задания подобного типа на преобразование нецелесообразно

[1] **Лунгу К.Н., Макаров Е.В.** Задачи по математике. М.: МГОУ, 2000.

выполнять по отдельным действиям, дискретно. Целостность решения должна определять оптимальную технологию.

Данный подход — «экономное» (краткое, усечённое) решение задач при обучении математике — был разработан автором для того, чтобы облегчить овладение тождественными преобразованиями, решением уравнений и систем, текстовых и геометрических задач. Длительный опыт его использования показал очевидные преимущества перед обычной практикой. Например, контрольная работа по разделу «Вычисление пределов», рассчитанная слушателями на 120 минут работы, выполнялась слушателями за 30–40 минут.

Вот содержание одного варианта контрольной работы:

Вариант 1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-5x^2+1}{6x^2+2x-7}$. 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-5x^2+2}{6x^2+2x-8}$. 3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-8}}{\sqrt[3]{4x^3-1}}$.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$. 5. $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{10}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 6x}$. 8. $\lim\limits_{x\to0} tg7x\cdot\operatorname{cosec}x$. 9. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$.

Поскольку в основу решения был положен принцип понимания, подробность зависит от того, насколько учащийся в этом нуждается. Если ему ясна возможность перехода к пределу в сумме, разности, произведении, частном, то не обязательно это писать для «другого». Для конкретности приведём решение части варианта одного из слушателей.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-5x^2+1}{6x^2+2x-7}=+\infty$,

поскольку степень числителя больше степени знаменателя и дробь положительна.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-5x^2+2}{6x^2+2x-8}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x^3+3x^2-2x-2)}{(x-1)(6x+8)}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$.

В этом примере не хватило кратковременной памяти для сокращения числовой дроби.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-8}}{\sqrt[3]{4x^3-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

поскольку степени числителя и знаменателя равны, то предел степени равен отношению старших коэффициентов. Замечание преподавателя: в ответе ошибка, поскольку знаменатель отрицательный.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(2x-7)}=\dfrac{7}{13}$.

5. $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{10}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{10-x-5}{(x-5)(x+5)}\right)=\dfrac{1}{10}$. (ответ –1/10).

Ошибка допущена по причине «видения» в числителе и знаменателе –5.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+3x^2-1}{(x+1)x^2\cdot(\sqrt{1+3x^2}+1)}=\dfrac{3}{2}$.

Отметим, что 11 слушателей из 25 студентов экспериментальной группы выполнили задания варианта за 20 минут, все остальные за 30 минут.

Приведём ещё тренировочный пример формирования специального приёма (использования фигурных скобок) при оформлении решения задачи на эту же тему.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+7}}{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{5x-2}}=\left\{\textit{подстановка}\ \ x=2\ \ \textit{даёт}\ \frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}-\textit{неопредел.}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\textit{дробь будем сокращать на } x-2\neq 0\ \ (\textit{при } x\to 2);\ \textit{освобождаемся от}\\ \textit{радикалов формулами (11) и (12)}^2\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+\sqrt[3]{(3x+2)(5x-2)}+\sqrt[3]{(5x-2)^2})}{(-2x+4)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+7})}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\textit{в первых множителях выносим за скобки, сократим дробь на } (x-2)\\ \textit{используем теоремы о пределах, записываем результаты вычислений}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{3\cdot(4+4+4)}{-2(3+3)}=-3.$$

Повторяемся, что приём состоит в том, что решение происходит непрерывно, а все пояснения, формулы, вычисления записываются по ходу решения, выделяя фигурными скобками. При повторном обращении к решению легко восстановить все действия, которые привели к ответу. Со временем эти действия свёртываются или выполняются в уме, вместо шести знаков равенства остаётся четыре или три.

Такой приём используется во всех задачах на преобразования и вычисления (рядов, интегралов, производных и т.д.).

Что касается применения формул, то технология следующая. Окончив тему, систематизируем материал (понятия, формулы, утверждения, приёмы решения и т.д.), составляем макеты системных таблиц, а в домашних условиях эти таблицы получают искомый вид, зависящий от желания студента. Кроме того, в тех же условиях студенты готовят актуализирующие таблицы по материалу следующей темы. Например, если идёт речь о пределах, то необходимо составить «шпаргалку» с формулами сокращённого умножения, тригонометрических формул и т.д. Эти формулы можно брать, например, из упомянутой книги. Компетентностная модель обучения допускает возможность применять формулы без их запоминания. Текущие формулы (пределы, производные, интегралы и т.д.), относящиеся к теме, есть в наших пособиях[3], которыми пользуются студенты в течение двух лет. ❑

[2] Там же.

[3] **Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., С.Н. Шевченко Ю.А.** Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 1 курс. М.: Айрис Пресс, 2004; **Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н. Шевченко Ю.А.** Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс. М.: Айрис Пресс. 2004.