02_Шт_04_08New.qxd 30.01.2009 15:35 Page 121

ГЕОМЕТРИЯ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ КАК МЕТОД ОБУЧЕНИЯ)

Валентин Петрович Грибашев, *актёр, режиссёр*
Татьяна Ивановна Кузнецова, *доцент Центра международного образования МГУ им. М.В. Ломоносова, доктор педагогических наук*

В большинстве источников считается, что в основании пирамиды Хеопса лежит квадрат. Его разметку можно произвести с использованием тех же геометрических принципов, что и разметку основания пирамиды Джосера(1), с той только разницей, что при построении взаимно перпендикулярных осей здесь используются не только равносторонние треугольники, как в реконструкции пирамиды Джосера, но и два разносторонних треугольника со сторонами, равными диагонали AD четверти вспомогательного квадрата, её отрезку AC, построенному ранее, и её же отрезку AE, отсечённому биссектрисой угла COD (рис. 1). Назовём этот треугольник вспомогательным и построим его (см. рис. 2). Обозначим длины его сторон через a, b, c (a = |AC|, b = |AE|, c = |AD|), а величины его углов, как обычно: α — величина угла, лежащего против стороны с длиной a, β — величина угла, лежащего против стороны с длиной b, и, наконец, γ — величина угла, лежащего против стороны с длиной c.

С практической точки зрения построение на местности сторон этого треугольника с помощью упомянутых ранее инструментов не составляет труда, если учесть, что построение биссектрисы можно провести без построения дуг окружностей, но, например, путём построения ромба с получившимся ранее углом COD при помощи куска шнура любой длины, разделённого пополам, используя приём, не единожды применённый нами ранее[1]. Вершина угла, противоположного углу COD, и определит биссектрису угла COD.

Интересно, что в качестве сторон вспомогательного треугольника можно использовать и другие отрезки, равные рассмотренным ранее, но построенные несколько иначе, а именно вместо отрезков AD, AC и AE можно взять соответственно равные им отрезки (рис. 3) — диагональ OD_4 и её отрезки OF и OK. Здесь F — точка пересечения диагонали OD_4 со стороной AB равностороннего треугольника OAB, K — точка

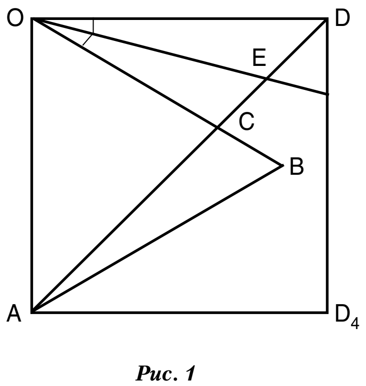

Рис. 1

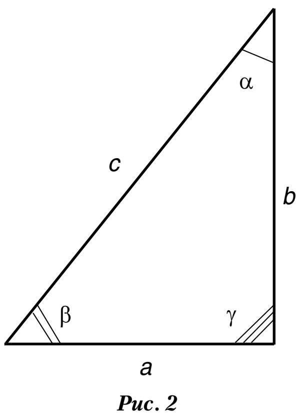

Рис. 2

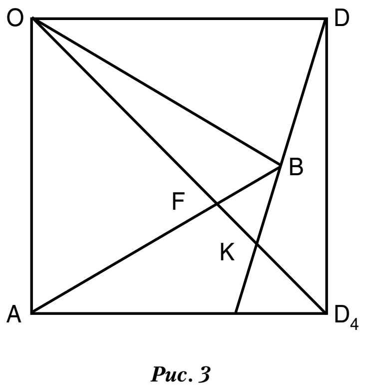

Рис. 3

[1] **Целлар К.** Архитектура страны фараонов: Жилище живых, усопших и богов / Пер. с венг. А.Д. Рагимбекова; Под ред. В.Л. Глазычева. М.: Стройиздат, 1990. (Научно-попул. б-ка школьника).

пересечения той же диагонали OD_4 с лучом DB, проведённым из вершины D четверти вспомогательного квадрата через вершину B треугольника OAB. Возможно, построение второй тройки отрезков на местности осуществить проще, чем первой, так как оно включает исключительно проведение отрезков прямых и определение точек их пересечения; отметим, что при этом совсем не обязательно «проводить» луч DB — достаточно засечь точку (K) его пересечения с диагональю OD_4.

1. Решение вспомогательного треугольника. Вернёмся теперь к первоначальному варианту определения сторон вспомогательного треугольника (рис. 2) и вычислим длины его сторон и величины его углов, т.е. решим этот треугольник.

1.1. Использовав обозначение длины отрезка OA через R, из треугольника OAD находим: $|AD| = R\sqrt{2}$. Длина стороны AC, как было выведено ранее, равна $R \times k$, где $k = \sin 60°/\sin 75°$.

Далее найдём длину отрезка AE. В треугольнике OAE величина угла OAE, как было отмечено ранее, равна 45°; величина угла AOE равна 75° (действительно, он равен сумме угла AOC с величиной 60°, и угла COE, равного половине угла COD, т.е. имеющего величину 30°/2 = 15°); следовательно, величина угла OEA равна 180° – 45° – 75° = 60°. Тогда по теореме синусов

$$\frac{|AE|}{\sin 75°} = \frac{|OA|}{\sin 60°},$$ откуда получаем

$$|AE| = \frac{|OA| \sin 75°}{\sin 60°} = R\frac{\sin 60°}{\sin 75°} = \frac{R}{k}.$$

Вспомнив обозначения $|AC| = a$, $|AE| = b$, $|AD| = c$, запишем выражения для вычисления длин сторон вспомогательного треугольника:

$$a = Rk,\ b = R / k,\ c = R\sqrt{2}\ . \qquad (1)$$

Отсюда видно, что все стороны пропорциональны R, следовательно, углы этого треугольника не зависят от R.

1.2. Чтобы решить вспомогательный треугольник полностью, необходимо найти и величины его углов α, β, γ, а это можно сделать, воспользовавшись два (для контроля — три) раза теоремой косинусов:

$$\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc, \qquad (2)$$

$$\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac, \qquad (3)$$

$$\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab. \qquad (4)$$

Вычислив значения косинусов углов, по таблицам (7 или 8) определяем величины этих углов. Для контроля сложим полученные значения, и если сумма получится равной 180°, то задача решена верно. В своё время, лет 12 назад, мы так и сделали, но, конечно, потратили на это очень много времени, поскольку хотели получить достаточно точный результат и поэтому в промежуточных вычислениях сохраняли достаточно много знаков. Тогда, взяв R = 10 м и использовав таблицы[2], по формулам (1) мы получили следующие длины сторон «элементарного» вспомогательного треугольника:

$a = Rk \approx 10$ м $\times$ 0,896576 $\approx$ 8,96576 м $\approx$ 8,966 м = 8 м 96 см 6 мм;

$b = R / k \approx 10$ м / 0,896576 $\approx$ 11,15354 м $\approx$ 11,154 м = 11 м 15 см 4 мм;

$c = R\sqrt{2} \approx 10$ м $\times$ 1,414213 $\approx$ 11,14213 м $\approx$ 11,142 м = 11 м 14 см 2 мм.

Для пирамиды Хеопса мы взяли R = 130 м, и, пропустив процесс экстраполяции, аналогично сразу получили следующие результаты:

$a = Rk \approx 130$ м $\times$ 0,896576 $\approx$ 116,55488 м $\approx$ 116,555 м = 116 м 55 см 5 мм;

$b = R / k \approx 130$ м / 0,896576 $\approx$ 144,9960 м $\approx$ 144,996 м = 144 м 99 см 6 мм;

$c = R\sqrt{2} \approx 130$ м $\times$ 1,414213 $\approx$ 183,8473 м $\approx$ 183,847 м = 183 м 84 см 7 мм.

В последнем вычислении, чтобы обеспечить вычисление с точностью до шести значащих цифр, нам пришлось «вспомнить молодость» и извлечь корень самим — с помощью алгоритма, которому обучали нас в школе несколько десятилетий назад. К сожалению, современная школа это не дает, а в таблицах для школьников даются только четыре значащих цифры; нет таблицы квадратных корней.

Далее, подставив полученные значения длин сторон вспомогательного треугольника в формулы (2) — (4), мы получили: $\cos\alpha \approx 0{,}77350$, $\cos\beta \approx 0{,}61510$, $\cos\gamma \approx 0{,}023934$,

[2] **Хохлов А.И.** Математические таблицы. 3 изд. М.: Наука, 1980.

откуда по таблице II «Натуральные значения тригонометрических функций» и «Таблице пропорциональных частей»[3] находим

$\alpha \approx 39°19',85 = 39°19'51''$,

$\beta \approx 52°2',4 = 52°2'24''$,

$\gamma \approx 88°37',7 = 88°2'42''$.

Для проверки мы сложили величины всех этих углов и получили $179°59'57''$, что, как нам казалось, свидетельствует о достаточно хорошей точности вычислений.

1.3. В настоящее время, когда компьютер прочно вошел в практику обучения, для решения вспомогательного треугольника можно использовать разработки[4], где предлагается компьютерный вариант решения треугольников, причём рассматриваются случаи любых треугольников — остроугольных, прямоугольных и тупоугольных. Отрешившись от вышеприведённого решения вспомогательного треугольника вручную и с помощью таблиц, составим программу для нашего случая, попытавшись упростить вышеупомянутую программу[5].

Прежде всего, обратим внимание на рис. 3. Из него видно, что, скорее всего, вспомогательный треугольник остроугольный. Но, как известно, для «настоящих математиков» рисунок не доказательство, а лишь намёк, который ещё надо увидеть, понять и принять как руководство к действию. Итак, интуитивно следуя рассуждениям в связи с рис. 3, докажем, что вспомогательный треугольник — остроугольный. Для начала отметим, что сторона c — наибольшая, так как две другие стороны (a и b) являются её частями — по пятой аксиоме Евклида: «Целое больше части». Поэтому угол γ — наибольший угол треугольника (так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол — вспомнили?). Если мы удостоверимся в том, что угол с величиной γ — острый, то другие два угла тем более будут острыми.

Для доказательства того, что этот угол — острый, рассмотрим выражение (4) его косинуса через длины сторон треугольника, из которого видно, что, так как, естественно, $a > 0$ и $b > 0$, то знак косинуса определяется знаком выражения числителя. Рассмотрим это выражение подробнее: подставив в него выражения (1), получим $R^2(k^2 + 1/k^2 - 2)$, откуда ясно, что знак определяется знаком выражения $k^2 + 1/k^2 - 2$, которое при условии $k \neq 1$ всегда больше нуля, что следует из известного неравенства оценки суммы двух взаимно обратных положительных чисел ($x + 1/x > 2$ при $x \in R^+ \setminus \{1\}$). Известно, что из положительности косинуса угла следует, что он — острый. Следовательно, угол с величиной γ — острый, и вспомогательный треугольник — остроугольный, что и требовалось доказать.

Вследствие этого свойства вспомогательного треугольника вычисление величин его углов будет проходить сразу по второй формуле из отмеченных ранее сложных тройных формул, например(10):

$$\gamma = \mathrm{arctg}\sqrt{1/\cos^2\gamma - 1},$$

где, как видно из только что проведённых рассуждений, $\cos\gamma$ определяется формулой (4).

Теперь мы можем составить компьютерную программу для вычисления длин сторон и величин углов вспомогательного треугольника, воспользовавшись при этом алгоритмическим языком БЭЙСИК и методикой пособия[6]:

ПРОГРАММА 2

```
10 REM РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА
20 PRINT "ВВЕДИТЕ R"
30 INPUT R
40 k=SIN(3.14159/3)/SIN(75*3.14159/180) : PRINT "k=";k
50 a=R*k : b=R/k : c=R*SQR(2)
60 PRINT "a=";a;"м ", "b=";b;"м ", "c=";c;"м "
70 x=b : y=c : z=a
```

[3] Там же.

[4] **Кузнецова Т.И.** Методика использования информатики для активизации усвоения математического материала в предвузовском образовании // Вестник ЦМО МГУ. 1999. № 2, Ч. 3. п. III, 3; **Кузнецова Т.И.** Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. М.: КомКнига, 2005. гл. 4, § 8.

[5] **Кузнецова Т.И.** Методика использования информатики для активизации усвоения математического материала в предвузовском образовании // Вестник ЦМО МГУ. 1999. № 2, Ч. 3.

[6] **Брычков Е.Ю., Кузнецова Т.И.** Введение в информатику: Учёб. пособие для студентов-иностранцев высших учебных заведений / Под общ. ред. Т.И. Кузнецовой. М.: УРСС, 1997.

```
80 PRINT "УГОЛ АЛЬФА="; : GOSUB 140
90 x=a : y=c : z=b
100 PRINT "УГОЛ БЕТА ="; : GOSUB 140
110 x=a : y=b : z=c
120 PRINT "УГОЛ ГАММА ="; : GOSUB 140
130 GOTO 200
140 REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА
150 KO=(x^2+y^2-z^2)/(2*x*y)
160 U=ATN(SQR(1/(KO*KO)-1)):U0= U*180/3.14159
170 U1=INT(U0) : U2=(U0-U1)*60 : U3=INT(U2) : U4=(U2-U3)*60
180 PRINT U; "рад="; U0;"град="; U1; "град"; U2;"мин=";U1;"град";U3;"мин";U4;"сек"
190 RETURN
200 END
```

Здесь для большинства переменных приняты естественные обозначения, совпадающие с введёнными ранее, за исключением обозначений косинуса (KO) и числовых значений величин углов (U, U0, U1, U2, U3, U4).

В строках 40–60, как и в программе 1, вычисляются длины сторон, далее — величины углов, при этом используется подпрограмма вычисления угла треугольника (строки 140–190). Так как программное обеспечение компьютера обеспечивает работу только с радианным выражением величин углов, то после вычисления величин углов мы воспользовались формулой перехода от радианной меры к градусной (см. строку 160). Так как при этом доли градуса получаются в десятичном виде, то при выводе результата мы были вынуждены использовать формулы перевода десятичного выражения долей градуса в минуты, а затем десятичных долей минуты в секунды (см. строку 170). В последнем случае два раза использовалась стандартная функция целой части (INT) при следующих обозначениях: U — величина угла в радианах, U0 — величина этого угла в градусах, представленная в десятичном виде, U1 — количество полных градусов, U2 — количество минут, содержащихся в дробной части градусной меры U0, U3 — количество полных минут в U2, U4 — количество секунд, содержащихся в дробной части минутной меры U2.

Введя в компьютер R = 130 м, получаем:

k = 0.8965753 (5)

a = 8.965753 м b = 11.15355 м c = 14.14214 м (6)

УГОЛ АЛЬФА = .6864469рад = 39.33054град = 39град 19мин 49.95667сек (7)

УГОЛ БЕТА = .908284рад = 52.04088град = 52град 2мин 27.1756 сек (8)

УГОЛ ГАММА = 1.546862рад = 88.62872град = 88град 37мин 43.40332 сек (9)

Введя в компьютер R = 130 м, получаем:

a = 116.5548 м b = 144.9962 м c = 183.8478 м.

После округления с точностью до 0,5 мм приходим к окончательным результатам:

$a \approx 116{,}555$ м; $b \approx 144{,}996$ м; $c \approx 183{,}848$ м,

которые практически совпадают с полученными ранее вручную и с применением таблиц.

1.4. Для дальнейшего исследования нам необходима длина высоты вспомогательного треугольника, опущенной на сторону с длиной a. Обозначим её длину через H_0. Тогда

$$H_0 = c \times \sin\beta = R\sqrt{2}\sin\beta. \qquad (10)$$

Если мы хотим провести вычисления вручную, то вычислим $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} \approx \approx \sqrt{1-0{,}6151^2} \times 0{,}788449$ и $\sqrt{2}\sin\beta \approx \approx 1{,}414213 \times 0{,}788449 \approx 1{,}115035$.

Следовательно,

$$H_0 = 1{,}115035R. \qquad (11)$$

Если воспользоваться компьютером, достаточно в программу 2 добавить строку:

```
101 H0 = R*SIN(U)*SQR(2) : PRINT "H0=";H0; "м"
```

Для элементарного вспомогательного треугольника, т.е. при R = 10 м, получим $H_0 \approx 11{,}15035$ м $\approx$ 11м 15 см 0,4 мм. А для пирамиды Хеопса, т.е. при R = 130 м, $H_{0пир.} \approx 144{,}9547$ м $\approx$ 144 м 95 см 5 мм.

02_Шт_04_08New.qxd 30.01.2009 15:35 Page 125

2. Пространственная реконструкция пирамиды Хеопса. Представим себе правильную четырёхугольную пирамиду, в основании которой — квадрат со стороной длины 2*a*, а величина угла наклона боковой грани к основанию равна β. Рассмотрим разрез этой пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды параллельно стороне основания.

Тогда (рис. 4а) вспомогательный треугольник окажется внутри получившегося прямоугольного треугольника со стороной длины а. При этом, как видно из рисунка, в построенном сечении содержатся два вспомогательных треугольника, симметричные относительно высоты пирамиды.

Проведенный анализ показывает, что построение высоты пирамиды можно осуществить с помощью все того же вспомогательного треугольника, точнее, двух вспомогательных треугольников, противоположно ориентированных.

2.1. Построение высоты пирамиды. Построим перпендикулярный разрез, описанный выше. Сделаем это следующим образом (рис. 5):

а) на луче P_1P от точки P_1 последовательно один за другим отложим два отрезка длины а ($|P_1P_2| = |P_2P_3| = a$). В одну сторону от прямой P1P отложим два вспомогательных треугольника $P_1P_2P_4$ и $P_3P_2P_5$ так, чтобы, естественно, их стороны с длиной а совпали с отмеченными на луче P_1P отрезками, а вершины углов с величиной попали в точки P_1 и P_3;

б) продлим сторону P_1P_4 за вершину P_4 и сторону P_3P_5 за вершину P_5 до их пересечения. Таким образом, получаем S — вершину пирамиды. Соединим точки S и P_2.

Оказывается, что $SP_2 \perp P_1P_3$ и, следовательно, SP_2 — высота. Перейдем к вычислению её длины.

2.2. Вычисление длины высоты пирамиды. Обозначим длину высоты SP_2 через *H*. Из построенного прямоугольного треугольника вычисляем *H* по формуле

$$H = a \times \mathrm{tg}\beta = R \times k \times \mathrm{tg}\beta, \qquad (12)$$

где, так как $\sin\beta \approx 0{,}788449$ (см. п. 3.1.4),

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \approx \frac{0{,}788449}{0{,}6151} \approx 1{,}28182\,. \qquad (13)$$

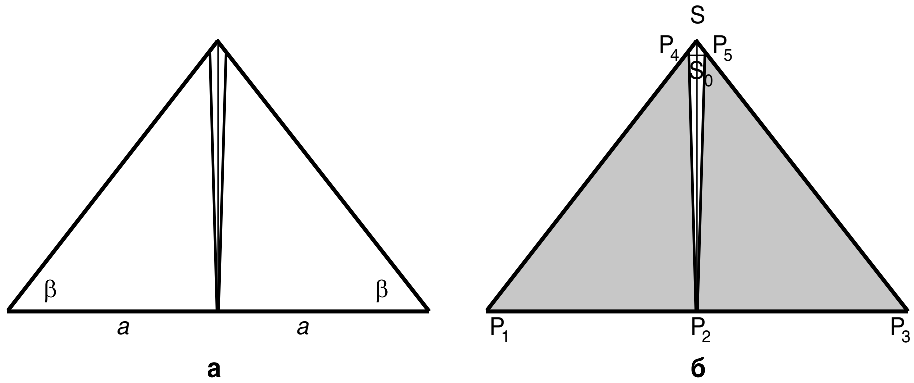

Рис. 4

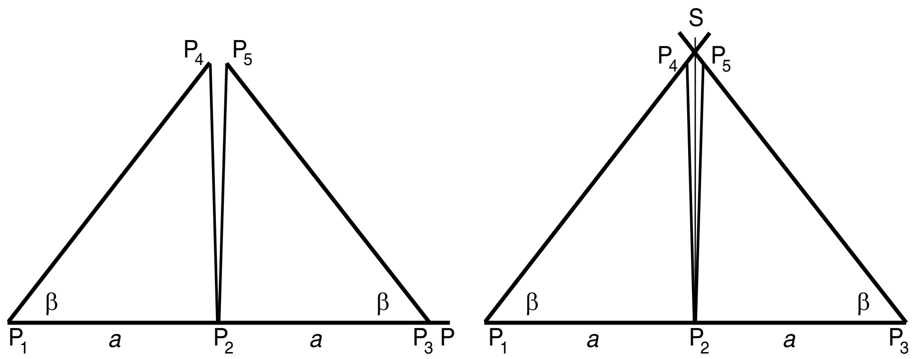

Рис. 5

Следовательно,

$$H \approx R \times 0{,}896576 \times 1{,}28182 \approx 1{,}14929R. \quad (14)$$

Для элементарного вспомогательного треугольника, т.е. при R = 10 м, имеем $H \approx$ 11,493 м, а для пирамиды Хеопса, т.е. при R = 130 м получаем $H_{\text{пир.}} \approx$ 149,402 м.

Для вычисления длины высоты H с помощью компьютера можно в соответствии с формулой (12) в программу 2 добавить всего одну строку:

```
102 PRINT "H=";R*K*TAN(U);"м"
```

После запуска программы 2 с таким добавлением для пирамиды Хеопса получаем:

H = 149.4027 м

Разумно округлив эти результаты, приходим к тому, что $H_{\text{пир.}} \approx$ 149,403 м, и это значение практически совпадает со значением, полученным нами вручную с использованием таблиц.

3. Сравнительные оценки. Итак, для пирамиды Хеопса мы получили:

1) длина стороны основания равна $2a = 2 \times$ 116,555 м = 233,11 м;

2) длина высоты равна $H_{\text{пир.}}$ = 149,403 м;

3) величина угла наклона боковой грани к плоскости основания равна $\beta = 52°2'27''$.

Сравним полученные нами параметры для реконструкции пирамиды Хеопса с известными в литературе. Как было отмечено в самом начале настоящего пункта, длина стороны основания колеблется от 232,5 м до 233,16 м, откуда видно, что наш результат входит в указанный диапазон.

Поскольку в настоящее время вершины у пирамиды Хеопса нет, в разных источниках приводится разная предполагаемая высота пирамиды Хеопса:

145 м, 146,52 м,

146,59 м,

147,8 м, 147 м,

137 м, 148,5 м.

Полученная нами длина высоты превосходит приведённые варианты, однако не намного: наибольшее из приведённых выше значений высоты (148,5 м) — на 0,9 м, что дает относительную погрешность всего 0,6%, а наиболее часто приводимое значение (146,6 м) — на 2,8 м, что даёт относительную погрешность не более 2%.

Величина угла наклона боковой грани пирамиды к основанию даётся следующая:

$51°30'$;

$51°52'$.

Разница полученного нами значения величины угла $\beta \approx 52°2{,}5'$ с этими значениями находится между $8{,}5'$ и $32{,}5'$, что даёт диапазон относительных погрешностей от 0,27% до 1%. Таким образом, сконструированная нами пирамида — достаточно точная реконструкция пирамиды Хеопса.

Из проведённых рассуждений и расчётов видно, что предлагаемый материал, как и разработки[7], можно использовать в учебно-исследовательской работе учащихся средней школы.

[7] **Грибашев В.П., Кузнецова Т.И.** Геометрическая реконструкция памятников архитектуры как метод обучения // Школьные технологии. 2006. № 4.