

# Уровни математической грамотности: от воспроизведения к размышлениям

Три уровня заданий для проверки компетентности

**Галина Скворцова,**  
*заместитель  
директора  
Московского  
центра оценки  
качества  
образования,  
кандидат  
педагогических наук*

Говоря об уровнях компетентности учащихся при изучении математики, мы имеем в виду осознанное владение ими несколькими уровнями:

- простое воспроизведение математических фактов и использование вычислительных умений,
- установление связей между различными темами программы и решение несложных жизненных проблем,
- решение реальных проблем, требующих развитого математического мышления, математических рассуждений и обобщений,
- математизация предложенной ситуации, что далеко выходит за рамки простого узнавания знакомых математических задач, характерных для заданий первого и в некоторых случаях второго уровня.

Очевидна иерархичность уровней компетентности, т.е. задания второго уровня сложнее первого, а третьего уровня — сложнее двух первых и отличаются от них прежде всего тем, что требуют для своего решения не только прочных технических навыков, но и высокого математического развития (интуиции, логического мышления и т.п.).

Для разработки заданий различной сложности были выделены три уровня математической компетентности. Первый включает воспроизведение математических фактов, методов и выполнение вычислений, второй — установление связей и интеграцию материала из разных математических тем, необходимых для решения поставленной проблемы, третий — математические размышления, требующие обобщения и интуиции.

Для проверки достижения первого уровня компетентности в основном предлагаются традиционные учебные задачи, характерные и для наших проверочных работ. При этом требуется знание математических фактов, воспроизведение определений математических объектов и их свойств, применение стандартных (простых и достаточно

сложных) алгоритмов и методов решения, работа с формулами, выполнение вычислений. Так как способы решения в основном стандартные, то запись самого решения не представляет интереса, и поэтому используются задания двух типов — с выбором ответа и с кратким свободным ответом, когда ответ даётся в виде числа, выражения, слова, а решение не приводится. Ниже приведены примеры таких заданий.

- 1) В банк положили сумму в 1000 руб. при 4% годовых. Какая сумма будет на счету через один год?
- 2) Изобразите на рисунке следы идущего человека. Длина шага  $p$  — расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги.

Для походки мужчин зависимость между  $n$  и  $p$  приближённо выражается формулой

$$\frac{n}{p} = 140,$$

где  $n$  — число шагов в минуту,  $p$  — длина шага в метрах.

Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает в минуту 70 шагов. Ответ: \_\_\_\_\_

Второму уровню компетентности присущи умения устанавливать связи между различными темами программы и интегрировать информацию, необходимую для решения задачи. От учащихся требуется самостоятельно выбрать соответствующий метод решения и необходимые математические инструменты. Ситуации, рассматриваемые в задачах, должны быть нестандартными, но не требовать высокого уровня математизации. При выполнении предлагаемых заданий требуется постановка проблемы, математи-

ческое моделирование предложенной ситуации, математическая аргументация, решение поставленной проблемы, коммуникативные умения, использование математического языка.

Достижение второго уровня компетентности проверяется с помощью решения несложных жизненных задач. Ниже приведено несколько примеров, которые показывают, что в отличие от заданий, отвечающих первому уровню, не сразу видно, на материале какой темы составлена данная задача, какой метод или алгоритм надо использовать для её решения, возможны различные подходы к решению.

- 3) Вы проехали на машине две трети пути. В начале пути бензобак машины был полон, а сейчас он заполнен на одну четверть. Считаете ли вы, что у вас есть проблемы?
- 4) Мария живёт в километре от школы, Олег — в пяти. Каково расстояние между домами Марии и Олега?
- 5) Вопросы б), в) и г) к задаче 2:
  - б) Борис делает за минуту 80 шагов, длина его шага 56 см. Дима делает 74 шага в минуту, длина его шага 50 см. Чью проходку, Бориса или Димы, более

точно описывает формула  $\frac{n}{p} = 140$ ?

в) Павел знает, что длина его шага равна 0,80 м. Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин) и в километрах в час (км/ч).

г) Какое из следующих утверждений истинно?

Если число шагов в минуту увеличивается, то длина шага уменьшается;

Число шагов прямо пропорционально длине шага. Длина шага мужчины при беге больше, чем при ходьбе.

**6)** На счёт в банке положили сумму в 1000 руб. Имеются два условия вклада: положить под 4% годовых или получить от банка бонус, равный 10 руб., и 3% годовых. Какое из этих условий выгоднее для вклада на 1 год, на 2 года? (сравните с задачей 1, отвечающей первому уровню компетентности)

**7)** Пиццерия изготавливает два вида круглой пиццы, одинаковых по толщине, но различающихся по размеру. Маленькая по размеру пицца с диаметром 30 см стоит 30 руб. Большая по размеру пицца с диаметром 40 см стоит 40 руб. Какую пиццу выгоднее купить? Ответ объясните.

Для проверки достижения третьего уровня компетентности разрабатываются более сложные задачи, в которых прежде всего необходимо «математизировать» предложенную ситуацию. Эта процедура состоит из двух этапов: выделение проблемы, которая решается средствами математики, и её формулировка; разработка соответствующей математической модели, решение и его интерпретация согласно предложенной в задании ситуации. К сожалению, при решении учебных заданий на интерпретацию полученного решения не обращается особого внимания, так как в большинстве случаев этого не требуется в условиях искусственной учебной ситуации.

Необходимо отметить, что для решения заданий, отвечающих третьему уровню компетентности, необходимо владеть достаточно сложными математи-

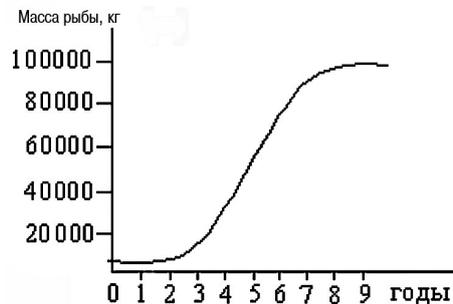
ческими знаниями и умениями (например, решать иррациональные и показательные уравнения, уметь составить рекуррентную формулу числовой последовательности, распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии и использовать для решения задач формулы  $n$  — члена и суммы  $n$  членов этих последовательностей, использовать теоремы сложения и умножения вероятностей). Ниже приведены примеры заданий.

**8)** В одной из стран в 1980 г. из национального бюджета на оборону было выделено 30 млн. долларов. Общий бюджет на этот год составлял 500 млн. долларов. В следующем году на оборону было выделено 35 млн. долларов при общем бюджете в 605 млн. Инфляция в течение двух лет достигала 10%.

А) Вы приглашены прочесть лекцию в обществе пацифистов. Вы намерены показать, что бюджет на оборону за это время сократился. Объясните, как вы это сделаете.

Б) Вы приглашены прочесть лекцию в военной академии. Вы намерены показать, что бюджет на оборону увеличился за этот период. Объясните, как вы это сделаете.

**9)** Для разведения рыбы в реку были запущены мальки. Ниже на графике показана модель увеличения массы рыбы в этой реке за несколько лет.



Предположим, что фермер планирует подождать несколько лет, а затем начать ловить в реке рыбу. Сколько лет следует ему подождать, если он хочет максимально увеличить число рыб, которые он мог бы ежегодно отлавливать после этого срока? Ответ объясните.

Необходимо отметить, что использование практической ситуации для создания заданий, отвечающих третьему уровню компетентности, не является необходимым условием. Для проверки достижения этого уровня компетентности используются либо чисто математические задания, либо задания, в которых рассматриваются явно придуманные ситуации, но математическая составляющая этого задания долж-

на представлять интерес и допускать нестандартные подходы к решению. Ниже приведены примеры таких заданий.

**10)** В треугольнике одна сторона равна 8 см, другая — 5 см. Какую длину может иметь третья сторона? Укажите весь промежуток возможных значений?

**11)** Можно ли удовлетворить потребность в почтовых марках для оплаты почтовых отправлений, если использовать только два вида марок достоинством 3 и 5 единиц? Какие по стоимости отправления можно обеспечить с помощью этих марок? Будет ли такая система принята обществом?

Составить более чёткое представление об уровнях компетентности и различиях между ними помогает приведённая ниже схема.

Математическая грамотность		
Первый уровень компетентности «Воспроизведение» – Стандартные вычисления – Стандартные методы решения	Второй уровень компетентности «Связи» – Создание математической модели – Стандартные методы решения задач, переход от одной формы информации к другой, интерпретация полученного решения – Различные хорошо известные методы	Третий уровень компетентности «Размышления» – Сложные формулировки и решения проблем – Размышления и интуиция – Оригинальный математический подход – Различные сложные методы решения – Обобщение

Для проверки компетентности учащихся использовались три известных типа заданий: с выбором ответа, с кратким свободным ответом, когда ответ чётко ограничен условием задачи по содержанию и форме (обычно даётся в виде числа, выражения, рисунка, слова и т.п.), с развёрнутым свободным ответом. Два первых типа заданий использовались для проверки более простых

знаний и умений. Более сложные умения проверялись с помощью заданий третьего типа, когда от ученика требовалось записать полное решение или обоснование полученного ответа. Содержание этих заданий позволяло учащимся дать решения, различающиеся по развёрнутости, обобщённости, сложности использованных методов и т.п., что позволяло им продемонстрировать различные

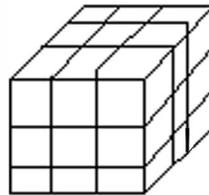
уровни математической компетентности. На выполнение таких заданий было отведено более трети времени, выделенного на оценку математической подготовки школьников. Это явно отличает исследование PISA от других подобных международных исследований, в которых трудности в обеспечении объективности оценки ответов учащихся на задания со свободным развёрнутым ответом вынудили использовать преимущественно закрытые задания. Опыт использования заданий с полным ответом в рамках исследования PISA показал, что тщательно подготовленные указания по оценке ответов учащихся на эти задания, сопровождающиеся примерами ответов, соответствующих принятым оценкам, позволяют даже в массовых проверках обеспечить объективность выставляемых отметок.

Значительный интерес представляет ещё один тип заданий, использованных в исследовании — так называемые «структурированные вопросы». Эти задания состоят из нескольких вопросов различного типа, относящихся к одной и той же ситуации. Как правило, они располагаются по возрастанию сложности. Чаще всего сначала даются вопросы с выбором ответа или с кратким ответом, а в конце — вопросы с развёрнутыми ответами. Эти задания выполняют двойную цель. Прежде всего они позволяют дифференцировать учащихся по уровню компетентности. Кроме того, они использовались для проверки умения учиться, самостоятельно приобретать знания. В этом последнем случае содержание во-

просов было подобрано таким образом, чтобы в процессе их последовательного выполнения учащиеся получали некоторые «подсказки», необходимые для выполнения последних наиболее сложных заданий, которые, как правило, требовали некоторого обобщения, генерализации (например, составления общей формулы некоторого процесса или явления). Ниже приведены примеры таких заданий.

#### 12) Окрашенный куб.

Большой куб окрасили снаружи. Затем его разрезали на три слоя по каждому из трёх разных направлений, как это показано на рисунке, и получили много маленьких кубиков.



А) Сколько всего получилось маленьких кубиков?

Б) У скольких маленьких кубиков оказались окрашенными точно две грани?

В) У скольких маленьких кубиков оказались окрашенными точно пять граней?

Г) Другой большой куб окрасили снаружи. Затем его разрезали на пять слоёв по каждому из трёх направлений. В результате получили много маленьких кубиков.

У скольких маленьких кубиков оказались окрашенными точно три грани?

Д) Окрашенный куб разрезали на  $n$  слоёв по каждому из трёх направлений. Сколько получилось маленьких кубиков,

