



# Метод оценки качества редискретизации цифровых сигналов

*Чичагов А.В.*

В работе рассматривается ряд моделей (алгоритмов) редискретизации цифровых сигналов, основанных на интерполяционных формулах Лагранжа и Уиттакера. Предлагается метод оценки качества (точности) редискретизации цифровых сигналов и приводятся результаты вычислительных экспериментов по оценке точности рассмотренных моделей редискретизации.

It is discussed a few digital signal resampling algorithms are built upon Lagrange and Witteraker interpolation. The spectral error assessment of the digital signal resampling is suggested. The quantitative assessment of the test digital signals resampling is reported.

**Ключевые слова:** цифровой сигнал, редискретизация, интерполяция, оценка, алгоритм, частота дискретизации, дефект, выборка данных, апертура, цифровой фильтр.

## Введение

В различных цифровых устройствах, таких, например, как цифровые осциллографы, сейсмографы, томографы, устройства аудиовидеотехники и т.д., для реконструкции или визуализации цифровых сигналов (изображений, полей) используют цифро-аналоговые преобразователи сигнала. Аппаратные цифро-аналоговые преобразователи сигнала (ЦАП) выполняют кусочно-постоянную интерполяцию между выборочными значениями сигнала, поэтому при частоте дискретизации цифрового сигнала, близкой к удвоенной частоте верхней границы фурье-спектра сигнала, восстановленный аналоговый сигнал имеет достаточно большую погрешность.

Существенно уменьшить погрешность восстановления аналогового сигнала можно как путём увеличения частоты дискретизации сигнала при выполнении аналого-цифрового преобразования (АЦП), так и с помощью «передискретизации» исходной выборки цифрового сигнала к выборке с большей

частотой дискретизации и затем выполнения высоко-скоростного аппаратного цифро-аналогового преобразования. Второй способ часто более предпочтителен, так как для хранения и передачи цифрового сигнала требуется меньший объём памяти (трафика). Однако в этом случае необходимо использовать довольно точные процедуры (алгоритмы, программы) редискретизации цифрового сигнала [1].

В настоящей работе рассматривается ряд моделей редискретизации цифровых сигналов, основанных на интерполяционных формулах Лагранжа и Уиттакера, предлагается метод оценки качества (точности) редискретизации цифровых сигналов и приводятся результаты вычислительных экспериментов по оценке качества (точности) рассмотренных моделей.

В данной работе широко используется термин «**модель**», который представляет редукцию термина «**вычислительная или компьютерная модель**» и означает некоторую **интерпретацию** преобразования цифрового сигнала, т.е. совокупность знаний, включающих определение, метод, алгоритм, программу и иную информацию, которая требуется специалистам предметной области знаний «цифровая обработка сигналов» при реализации определённого **преобразования** цифрового сигнала в той или иной корпоративной программно-аппаратной среде.

### Модели редискретизации цифровых сигналов

Преобразование выборки измерений цифрового сигнала, записанной с определённой частотой дискретизации, к выборке измерений с более высокой частотой дискретизации обычно называют интерполяцией, а обратное преобразование — к выборке измерений с более низкой частотой дискретизации — децимацией. Какое-либо из указанных преобразований или их комбинацию называют **редискретизацией** цифрового сигнала. Заметим, что преобразования интерполяции и децимации существенно некоммутативны при больших значениях коэффициентов интерполяции или децимации, при этом нижняя граница области возможных значений коэффициента редискретизации цифрового сигнала определяется условием Найквиста.

Пусть  $x[iT_D^{(s)}]$  и  $x'[nT_D^{(d)}]$  — входная и выходная выборки цифрового сигнала,  $T_D^{(s)} = 1/F_D^{(s)}$  — шаг дискретизации входной выборки,  $T_D^{(d)} = 1/F_D^{(d)}$  — шаг дискретизации выходной выборки,  $F_D^{(s)}, F_D^{(d)}$  — соответственно частоты дискретизации входной и выходной выборок цифрового сигнала. «Идеальное» линейное преобразование редискретизации цифрового сигнала запишем в виде

$$x'[nT_D^{(d)}] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)})x[iT_D^{(s)}],$$

где  $\varphi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)})$  — весовая функция («ядро») или вклад узла  $x[iT_D^{(s)}]$  входной выборки в текущее значение элемента  $x'[nT_D^{(d)}]$  выходной выборки.

Допустим, что весовая функция  $\varphi(s)$  является асимптотически убывающей функцией модуля аргумента. Определим индекс  $\tilde{i}[n]$  элемента входной выборки  $x[iT_D^{(s)}]$ , который соответствует «физическому» моменту времени, наиболее близкому моменту времени, который соответствует индексу  $n$  элемента выходной выборки  $x'[nT_D^{(d)}]$  и запишем аппроксимацию «идеального» линейного преобразования редискретизации цифрового сигнала в виде мультиинтерполяционного преобразования [2]:



$$x' [nT_D^{(d)}] = \sum_{m=-M}^M \varphi(nT_D^{(d)} - (\tilde{i}[n] + m)T_D^{(s)}) x[(\tilde{i}[n] + m)T_D^{(s)}],$$

где 
$$\tilde{i}[n] = (nF_D^{(s)}) / F_D^{(d)}$$

— текущий индекс элемента входной выборки  $x [iT_D^{(s)}]$ , который является наиболее близким «физическому» моменту времени, соответствующему текущему индексу  $n$  элемента выходной выборки  $x' [nT_D^{(d)}]$ ,  $m = i - \tilde{i}[n]$  — относительный индекс элементов входной выборки,  $M = M_a / 2$  — полуширина апертуры окна интерполяции.

В качестве весовых функций можно использовать, например, интерполяционную функцию Лагранжа:

$$\varphi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)} - mT_D^{(s)}) = \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \frac{(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)} - m'T_D^{(s)})}{(mT_D^{(s)} - m'T_D^{(s)})}$$

или, например, интерполяционную функцию Уиттакера:

$$\varphi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)} - mT_D^{(s)}) = \frac{\sin \pi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)} - mT_D^{(s)})}{\pi(nT_D^{(d)} - iT_D^{(s)} - mT_D^{(s)})}.$$

Отметим, что «ядро» интерполяционной формулы Уиттакера представляет аппроксимацию «ядра» интерполяционной формулы Лагранжа для равномерной неограниченной выборки измерений. Действительно,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \frac{\tau - m'}{(m - m')} &= \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \frac{(\tau - m) + (m - m')}{(m - m')} = \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \left( 1 + \frac{\tau - m}{(m - m')} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\tau - m}{k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{\tau - m}{k} \right)^2 \right) = \frac{\sin \pi(\tau - m)}{\pi(\tau - m)}. \end{aligned}$$

Заметим также, что указанные интерполяционные формулы, при неограниченном увеличении ширины апертуры окна интерполяции и частоты редискретизации выходной выборки, асимптотически соответствуют известной формуле теоремы Котельникова о дискретизации сигнала.

Введём коэффициент редискретизации цифрового сигнала и представим модель редискретизации цифрового сигнала в виде «академического» алгоритма редискретизации:

**«Академический» алгоритм редискретизации цифровых сигналов**

ВХОД :  $x [ i ]$  ;  
 ВЫХОД :  $x' [ n ]$  ;

```

switch( $M_a \% 2$ ) {
  case 0:
    for ( $n = 0, i = 0; i < x.len; n++$ ) {
       $i := \lfloor n / K_D \rfloor; x'[n] := \varphi_{ev}(n, i);$ 
    }
    break;
  case 1:
    for ( $n = 0, i = 0; i < x.len; n++$ ) {
       $i := \lfloor n / K_D + 1/2 \rfloor; x'[n] := \varphi_{od}(n, i);$ 
    }
    break;
}

```

где переменные  $i$  и  $n$  можно интерпретировать как «счётчик принятых элементов» и «счётчик отправленных элементов» соответствующих выборок данных, скобки  $\lfloor \ ]$  обозначают операцию взятия целого значения действительной величины, символ  $\%$  — операцию вычисления остатка целочисленного деления, а  $\varphi_{ev}(n, i)$  и  $\varphi_{od}(n, i)$  — заданные интерполяционные функции, например, функция Лагранжа:

$$\varphi_{ev}(n, i) = \sum_{m=-M+1}^M x[i+m] \prod_{\substack{m'=-M+1 \\ m' \neq m}}^M \frac{(n/K_D - i - m')}{(m - m')}$$

$$\varphi_{od}(n, i) = \sum_{m=-M}^M x[i+m] \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \frac{(n/K_D - i - m')}{(m - m')}$$

или, например, модифицированная интерполяционная функция Уитткера:

$$\varphi_{ev}(n, i) = \sum_{m=-M+1}^M x[i+m] \frac{\sin \pi(n/K_D - i - m)}{\pi(n/K_D - i - m)} \cos^\beta \left( \frac{\pi(n/K_D - i - m)}{2M+1} \right)$$

$$\varphi_{od}(n, i) = \sum_{m=-M}^M x[i+m] \frac{\sin \pi(n/K_D - i - m)}{\pi(n/K_D - i - m)} \cos^\beta \left( \frac{\pi(n/K_D - i - m)}{2M+1} \right),$$

где  $\cos^\beta \left( \frac{\pi m}{2M+1} \right)$  — эмпирическая функция (форм-фактор) окна интерполяции,

$\beta = 0, 1, 2, \dots$  — параметр «гладкости» окна.

Небольшое различие приведённых выше выражений для чётных ( $M_a \% 2 \equiv 0$ ) и нечётных ( $M_a \% 2 \equiv 1$ ) величин апертюры окна интерполяции  $M_a$  обусловлено различием в позиционировании интервала возможных значений минимальных временных сдвигов  $\tau = n * T_D^{(d)} - i * T_D^{(s)}$  между ближайшими текущими элементами входной и выходной выборок данных.

При позиционировании текущего фрагмента входной выборки данных цифрового сигнала источника относительно текущего значения выходной выборки данных целевого сигнала по формулам, указанным в теле алгоритма, возможные значения минимальных временных сдвигов лежат в интервале  $0 \leq \tau < T_D^{(s)}$  для чётной величины апертюры окна интерполяции и в интервале  $-T_D^{(s)}/2 \leq \tau < T_D^{(s)}/2$  для нечётной величины апертюры окна интерполяции.



«Академический» алгоритм редискретизации цифровых сигналов предполагает значительные вычислительные затраты, так как при вычислении каждого текущего значения выходной выборки цифрового сигнала требуется пересчёт «ядра» функции интерполяции. Этим вычислениям, однако, можно избежать, если модифицировать структуру рассмотренного алгоритма.

Действительно, коэффициент редискретизации цифрового сигнала  $K_D = F_D^{(d)} / F_D^{(s)}$  можно аппроксимировать рациональным числом или дробью  $K_D = L / N$ , где числитель или целочисленная величина  $L$  представляет коэффициент интерполяции, а знаменатель или целочисленная величина  $N$  — коэффициент децимации. В этом случае множество возможных значений минимальных временных сдвигов  $\tau$  между ближайшими элементами входной и выходной выборок данных «вырождается» и представляет ограниченный (конечный) набор значений, определяемый коэффициентом интерполяции  $L$ . Из этого следует практическая реализуемость вычисления **полного набора** возможных значений весов интерполяционной функции для заданного коэффициента редискретизации. Вычисленные значения весов затем можно использовать в процессе редискретизации цифрового сигнала.

Иными словами, рассмотренный выше «академический» алгоритм редискретизации цифровых сигналов можно представить в виде коммутируемого набора линейных цифровых фильтров с постоянными коэффициентами. «Практический» алгоритм редискретизации цифровых сигналов запишем в следующем виде [3]:

**«Практический» алгоритм редискретизации для рациональных значений  $K_D = L / N$**

```

ВХОД : x [ i ];
ВЫХОД : x' [ n ];
switch( $M_a \% 2$ ) {
  case 0: // Процедура вычисления весов интерполяционной функции
    for (k:=0; k<L; k++) {
      for (m:= -M+1; m≤M; m++) {

$$\varphi_{ev}(k, m) = \prod_{\substack{m'=-M+1 \\ m' \neq m}}^M \frac{k/L - m'}{m - m'};$$

        // (или  $\varphi_{ev}(k, m) = \frac{\sin \pi(k/L - m)}{\pi(k/L - m)} \cos^\beta \left( \frac{\pi(k/L - m)}{2M + 1} \right);$ )
      }
    }
    // Процедура обработки (редискретизации) цифрового сигнала
    for (n = 0, i = 0; i < x.len; n++) {
      i := (n*N) / L; k := (n*N) % L;

$$x'[n] := \sum_{m=-M+1}^M x[i+m] \varphi_{ev}(k, m);$$

    }
  break;
  case 1: // Процедура вычисления весов интерполяционной функции
    for (k:=0; k<L; k++) {
      for (m:= -M; m≤M; m++) {

```

$$\varphi_{od}(k, m) = \prod_{\substack{m'=-M \\ m' \neq m}}^M \frac{k/L - 1/2 - m'}{m - m'}$$

// (или  $\varphi_{od}(k, m) = \frac{\sin \pi(k/L - 1/2 - m)}{\pi(k/L - 1/2 - m)} \cos^\beta \left( \frac{\pi(k/L - 1/2 - m)}{2M + 1} \right)$ );

```

}
// Процедура обработки (редискретизации) цифрового сигнала
for (n = 0, i = 0; i < x.len; n++) {
    i := (n * N + L / 2) / L; k := (n * N + L / 2) % L;

    x'[n] := \sum_{m=-M}^M x[i + m] \varphi_{od}(k, m);
}
break;
}

```

Данный алгоритм состоит из двух процедур:

- процедуры проектирования (вычисления коэффициентов) набора цифровых фильтров-интерполяторов;
- процедуры полифазной («автокоммутируемой» линейной цифровой) фильтрации данных.

Заметим, что процедуру проектирования набора цифровых фильтров-интерполяторов легко модифицировать для работы с другими интерполяционными функциями, отличными от рассмотренных выше интерполяционных функций Лагранжа или Уитткера.

### Метод оценки качества (точности) редискретизации цифровых сигналов

Борис Бейзер в своей книге [4] «Тестирование чёрного ящика», посвящённой проблеме тестирования программного обеспечения, приводит следующее эмоциональное высказывание: «Тестирование требуется везде, где работают люди. Тестирование — это основная составляющая самоуважения и гордости за своё мастерство. Механик, который не проверяет результат своей работы микрометром, — негодяй или дурак. Программист, поиском ошибок в программах которого занимаются впоследствии другие, не уважает себя, за исключением, возможно, довольно странной гордости за быстрый выпуск огромного количества непроверенных и ненадёжных программ...»

Тестирование, если говорить менее эмоционально, является обязательной частью любого производственного процесса и, в частности, процесса разработки программного обеспечения. Тестирование представляет испытание или процесс проверки работоспособности нового компонента или системы в «почти естественных» и/или экстремальных условиях эксплуатации. Обычно именно в процессе тестирования определяются оптимальные значения системных параметров, рациональные режимы работы и границы эффективного использования системы.

В широком смысле дефекты или недостатки программного обеспечения (имеется в виду совокупность математического, программного и информационного — учебно-методического/эксплуатационного обеспечений), с которыми может столкнуться пользователь и которые требуется обнаружить и исправить в процессе тестирования, можно разделить на две категории:

- **логические и арифметические дефекты** (ошибки функционирования ПО, погрешности цифрового представления, например, ошибки квантования и др.);



- **алгоритмические и методические дефекты** (грубость или неадекватность используемых алгоритмов, несоответствие текущему заданию выбранных пользователем терминальных значений параметров и пр.).

Существуют и достаточно хорошо известны эффективные средства обнаружения и исправления дефектов первой категории, поэтому в данной работе рассматривается вторая категория дефектов специализированного программного обеспечения для предметной области знаний «цифровая обработка сигналов» (ЦОС).

Часто пользователь имеет выбор из нескольких методов (процедур), позволяющих выполнить требуемое преобразование цифрового сигнала. Кроме того, практически любая процедура содержит несколько аргументов (параметров процедуры), которые требуется задать при её использовании. Таким образом, пользователь путём выбора процедуры и/или терминальных значений параметров процедуры может регулировать «качество» преобразования цифрового сигнала, в частности, точность или допустимую погрешность преобразования цифрового сигнала.

Для оценки погрешности преобразования цифрового сигнала обычно используют методы вычисления среднеквадратической ошибки сигнала. При этом часто ограничиваются общей или интегральной оценкой погрешности цифровой обработки сигнала [1], что иногда оказывается недостаточно. Ниже определяется унифицированная спектральная оценка погрешности моделей преобразований цифровой обработки сигналов на конкретном примере преобразования редискретизации цифровых сигналов.

Выберем семейство комплексных гармоник  $z_s(t) = A_0 \exp(2\pi j F_s t)$ , где  $A_0$  — амплитуда,  $F_s$  — частота гармоники,  $t$  — время и  $j = \sqrt{-1}$  в качестве семейства тестовых цифровых сигналов. В этом случае оценка дисперсии гармоники  $\sigma_s^2 = \langle |z_s(t)|^2 \rangle \equiv A_0^2$  является величиной, не зависящей от частоты гармоники или «длины» интервала оценивания, что достаточно удобно.

Определим вектор параметров процедуры синтеза набора цифровых сигналов источника  $\vec{q} = (L_0, N_0, A_0)$ , компоненты которого имеют следующую интерпретацию:

- $L_0$  — размерность **набора** (спектра) тестовых выборок данных;
- $N_0$  — объём тестовой выборки данных («длина» фрагмента сигнала источника);
- $A_0$  — величина амплитуды сигнала источника («амплитуда» гармоники).

Набор исходных (source) тестовых выборок данных или, иначе, набор цифровых сигналов источника  $\{z_s^{(src)}(t)\}$  сформируем в виде набора пар временных рядов:

$$x_s^{(src)}(i) = A_0 \cos(2\pi(s/2L_0)i), \quad y_s^{(src)}(i) = A_0 \sin(2\pi(s/2L_0)i),$$

где  $i = \lceil F_D^{(src)} t \rceil$  — индекс (смещение по времени) элемента выборки данных, очевидно  $0 \leq i < N_0$ ,  $s/2L_0 \sim F_s/F_D^{(src)}$  — нормализованная частота гармоники,  $s$  — спектральный индекс (смещение по частоте) гармоники исходного цифрового сигнала.  $F_D^{(src)}$  — частота дискретизации источника. По условию Найквиста  $F_s/F_D^{(src)} < 1/2$ , поэтому полагаем  $s \in 0, 1, \dots, L_0 - 1$ .

Очевидно, что элементы набора исходных тестовых цифровых сигналов имеют одинаковую дисперсию, равную  $\sigma_s^2 = \langle |z_s^{(src)}(t)|^2 \rangle \equiv A_0^2$  для всех  $s \in 0, 1, \dots, L_0 - 1$ .

Для указанного набора цифровых сигналов источника абсолютная величина частоты дискретизации формально «не имеет значения» и может быть задана равной любому терминальному значению. Редискретизация или изменение частоты дискретизации данного набора цифровых сигналов определяется коэффициентом редискретизации цифрового сигнала, где  $K_D = F_D^{(dst)} / F_D^{(src)}$ , где  $F_D^{(dst)}$  — частота дискретизации целевого сигнала.

Набор ожидаемых (expected) тестовых выборок данных  $\{z_s^{(exp)}(t)\}$ , соответствующий заданному набору исходных тестовых сигналов и заданной величине коэффициента редискретизации  $K_D = F_D^{(dst)} / F_D^{(src)}$ , сформируем в виде набора пар временных рядов:

$$x_s^{(exp)}(n) = A_0 \cos(2\pi K_D^{-1}(s/2L_0)n), \quad y_s^{(exp)}(n) = A_0 \sin(2\pi K_D^{-1}(s/2L_0)n),$$

где  $n$  — целочисленный сдвиг (смещение по времени) элемента выборки данных.

Очевидно, что элементы набора ожидаемых тестовых цифровых сигналов имеют одинаковую дисперсию, равную  $\sigma_s^2 = \langle |z_s^{(exp)}(t)|^2 \rangle \equiv A_0^2$  для всех  $s \in 0, 1, \dots, L_0 - 1$ .

Для рассматриваемых моделей редискретизации цифровых сигналов вектор параметров процедуры редискретизации цифрового сигнала  $\vec{p} = (C_T, M_a, K_D)$  имеет следующую интерпретацию:

- $C_T$  — тип интерполяционной кривой;
- $M_a$  — апертура окна интерполяции;
- $K_D$  — коэффициент редискретизации.

Тип интерполяционной кривой представляет идентификатор или имя метода интерполяции, а величина апертуры и коэффициент редискретизации выбираются из множества допустимых значений.

Набор фактических (actual) тестовых цифровых сигналов  $\{z_s^{(act)}(t)\}$ , представляющих результат (выход) процедуры редискретизации набора исходных тестовых цифровых сигналов, формируем в виде:

$$\vec{x}_s^{(act)} = SRC(\vec{p}, \vec{x}_s^{(src)}), \quad \vec{y}_s^{(act)} = SRC(\vec{p}, \vec{y}_s^{(src)}),$$

где  $\vec{x}_s^{(src)}$  и  $\vec{y}_s^{(src)}$  — пара набора исходных тестовых цифровых сигналов  $\{z_s^{(src)}\}$ ,  $\vec{p}$  — вектор параметров процедуры редискретизации, а  $SRC(\cdot)$  обозначает исследуемую процедуру редискретизации цифрового сигнала (*Sample Rate Converter*).

Как показывает практика, дисперсия элементов рассматриваемого набора фактических тестовых сигналов  $\sigma_s^2 = \left\| \vec{z}_s^{(act)} \right\|^2$  практически одинакова для всех  $s \in 0, 1, \dots, L_0 - 1$  и равна величине  $A_0^2$ . Поэтому использование разностей или отношений дисперсий фактических и ожидаемых тестовых сигналов в качестве показателя качества (оценки точности) редискретизации цифровых сигналов не является сколько-нибудь информационно выразительным.





Информационно выразительным показателем качества редискретизации цифровых сигналов является набор минимальных среднеквадратических ошибок (МСКО) редискретизации, т.е.:

$$e_s^2 = \min_{\Delta\varphi} \left\| \bar{z}_s^{(act)} - e^{-j\Delta\varphi} \bar{z}_s^{(exp)} \right\|^2,$$

где  $\Delta\varphi$  — возможный фазовый сдвиг (смещение по времени) между ожидаемым и фактическим тестовым цифровым сигналом. Оптимальное значение фазового сдвига легко вычислить аналитически. Подставив это значение в приведённое выше выражение, набор величин МСКО можно представить в виде:

$$\varepsilon_s^2 = \left\| \bar{z}_s^{(act)} \right\|^2 + \left\| \bar{z}_s^{(exp)} \right\|^2 - 2\sqrt{\left\langle \bar{z}_s^{(act)} \mid \bar{z}_s^{(exp)} \right\rangle \left\langle \bar{z}_s^{(exp)} \mid \bar{z}_s^{(act)} \right\rangle},$$

где  $\langle u \mid v \rangle = \frac{1}{(N_2 - N_1)} \sum_{n=N_1}^{N_2-1} u(n)v^*(n)$  — скалярное произведение комплексных векторов,  $v^*(n)$  — обозначение комплексно-сопряжённого вектора.

В случае, если фазовые сдвиги между ожидаемыми и фактическими тестовыми цифровыми сигналами отсутствуют, приведённое выражение для набора МСКО редискретизации упрощается и описывается формулой:

$$\varepsilon_s^2(\vec{p}) = \frac{1}{(N_2 - N_1)} \sum_{n=N_1}^{N_2} \left| z_s^{(exp)}(n) - z_s^{(act)}(n) \right|^2,$$

где  $s$  — спектральный индекс гармоники исходного цифрового сигнала,  $N_1$ ,  $N_2$  — соответственно начальная и конечная границы фрагментов цифровых сигналов, по которым оценивается МСКО редискретизации,  $\vec{p}$  — вектор параметров процедуры редискретизации.

Объём тестовых выборок данных источника  $N_0$  желательно выбрать достаточно большим, но при этом исключая повторяющиеся значения. Легко показать, что рациональный объём тестовых выборок данных источника равен  $N_0 = 2L_0 + M_a$  выборочных значений, где  $2L_0$  — объём выборки, соответствующий периоду гармоники минимальной частоты в наборе тестовых сигналов **источника**,  $M_a$  — величина апертуры окна интерполяции или число выборочных значений, на которое нужно уменьшить длину фрагмента исходного цифрового сигнала, чтобы исключить влияние краевых эффектов процедуры редискретизации на величину МСКО. Таким образом, границы  $N_1$  и  $N_2$  фрагментов цифровых сигналов, по которым оценивается МСКО редискретизации, следует выбирать из условий:

$$N_1 > K_D M_a / 2, \quad N_2 < K_D (N_0 - M_a / 2),$$

где  $K_D$  — коэффициент редискретизации цифрового сигнала,  $N_0$  — объём тестовых выборок данных источника,  $M_a$  — величина апертуры окна интерполяции.

Для того, чтобы можно было легко сравнивать наборы МСКО, соответствующие разным моделям или различным значениям параметров моделей редискретизации цифровых сигналов, необходимо определить унифицированную

шкалу оценок. В качестве такой шкалы удобно использовать стандартную шкалу децибел. В этом случае унифицированный набор спектральных погрешностей или оценку **частотной кривой адекватности («ЧКА»)** модели редискретизации цифровых сигналов можно вычислить по формуле:

$$\zeta_{\omega}^2(\vec{p}, \vec{q}) = 10 \lg(\varepsilon_s^2(\vec{p}) / \sigma_s^2) [\text{Дб}],$$

где  $\sigma_s^2 \equiv A_0^2$  — нормировочный коэффициент,  $\lg()$  — логарифмическая функция (десятичный логарифм),  $\omega = \pi s / L_0$  — нормализованная частота тестовой гармоники в радианах,  $s \in 0, 1, \dots, L_0 - 1$ .

Оценка ЧКА представляет набор значений («кривую») нормализованных спектральных погрешностей, которая соответствует тройке «информационных объектов», описывающих «преобразование» цифрового сигнала, а именно:

- **имени** или **названию** («символическому» идентификатору) «преобразования» в научно-техническом информационном пространстве;
- **декларации** или **концепции** «преобразования» (определению поведения «идеальной» системы преобразования сигнала);
- **модели** или **реализации** «преобразования» (конструкции реальной системы, выполняющей определённое преобразование цифрового сигнала «более или менее удовлетворительно»).

Оценка ЧКА — достаточно информативный метрологический показатель качества или, точнее, адекватности модели (реализации) преобразования цифрового сигнала определению (декларации) преобразования цифрового сигнала.

### Апробация моделей редискретизации цифровых сигналов

Апробация моделей редискретизации цифровых сигналов представляет серию вычислительных экспериментов, в которых исследовалось поведение оценки ЧКА моделей редискретизации от величины апертуры окна интерполяции. Для серии вычислительных экспериментов использовалось контрольно-измерительное приложение «WCTestDesk» [5], а для построения графиков оценок ЧКА — пакет «OpenOffice.org» фирмы «SUN Microsystems».

Сценарий вычислительного эксперимента по оценке ЧКА моделей редискретизации цифровых сигналов можно представить в виде следующей последовательности действий:

1. Определить значения параметров сессии вычислительного эксперимента, т.е.:
  - задать значения параметров процедуры редискретизации цифровых сигналов;
  - задать значения параметров процедуры синтеза набора исходных тестовых сигналов;
  - задать значения параметров процедуры представления информационного отчёта.
2. Вычислить набор исходных (sources) тестовых цифровых сигналов.
3. Вычислить набор ожидаемых (expected) тестовых цифровых сигналов (т.е. вычисленных «аналитически», без помощи исследуемой процедуры редискретизации), соответствующий заданному набору исходных тестовых сигналов и заданным значениям параметров процедуры редискретизации.
4. Вычислить набор фактических (actual) тестовых цифровых сигналов (т.е. вычисленных с помощью исследуемой процедуры редискретизации), соответствующий заданному



набору исходных тестовых сигналов и заданным значениям параметров процедуры редискретизации.

5. Вычислить набор спектральных погрешностей процедуры редискретизации, соответствующий заданному набору исходных тестовых сигналов и заданным значениям параметров процедуры редискретизации.
6. Скомпилировать и представить пользователю (т.е. сохранить на внешнем носителе и/или вывести на экран дисплея) информационный отчет с результатами вычислительного эксперимента.

Информационный отчет с результатами вычислительного эксперимента должен содержать полную или, по крайней мере, важную информацию о сессии вычислительного эксперимента, в частности, следующее:

- значения параметров процедуры редискретизации  $\vec{p} = (C_T, M_a, K_D)$ ;
- значения параметров процедуры синтеза тестовых сигналов  $\vec{q} = (L_0, N_0, A_0)$ ;
- оценку ЧКА  $\zeta_{\omega}^2(\vec{p}, \vec{q})$  соответствующую указанным значениям параметров процедуры редискретизации и процедуры синтеза тестовых сигналов.

Результаты отдельных элементарных вычислительных экспериментов обычно группируются в серию, соответствующую интересам исследователя или заказчика и анализируются совместно. Результатом такой серии вычислительных экспериментов может быть таблица или диаграмма зависимостей оценок ЧКА от выбранных значений некоторого параметра процедуры редискретизации или процедуры синтеза исходных цифровых сигналов.

На рис. 1–4 показаны графики зависимости нормализованных величин спектральных погрешностей (оценки ЧКА) редискретизации цифровых сиг-

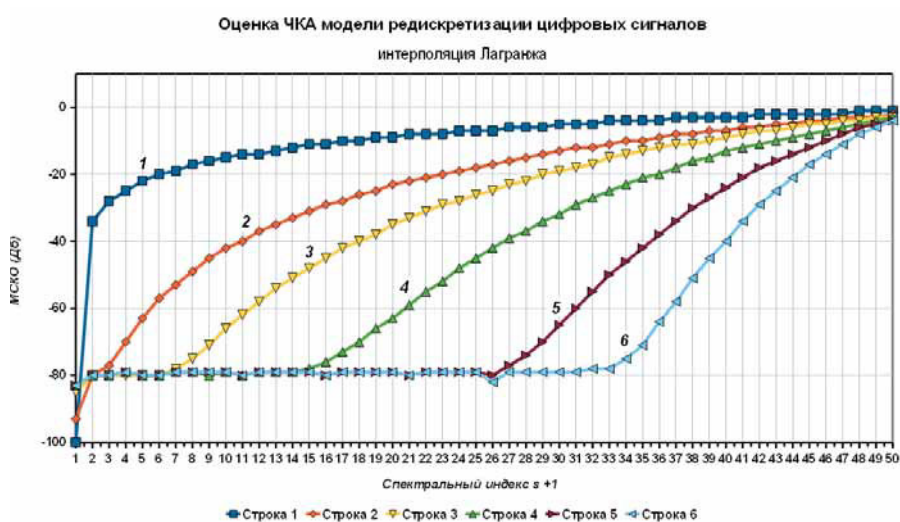


Рис. 1. Графики оценок ЧКА модели редискретизации цифровых сигналов по интерполяционной формуле Лагранжа при различных значениях апертуры окна интерполяции. Кривые 1..6 соответствуют апертуре  $M_a = 1, 3, 5, 10, 25, 50$  при  $K_D = 33.3, L_0 = 50, A_0 = 10000$

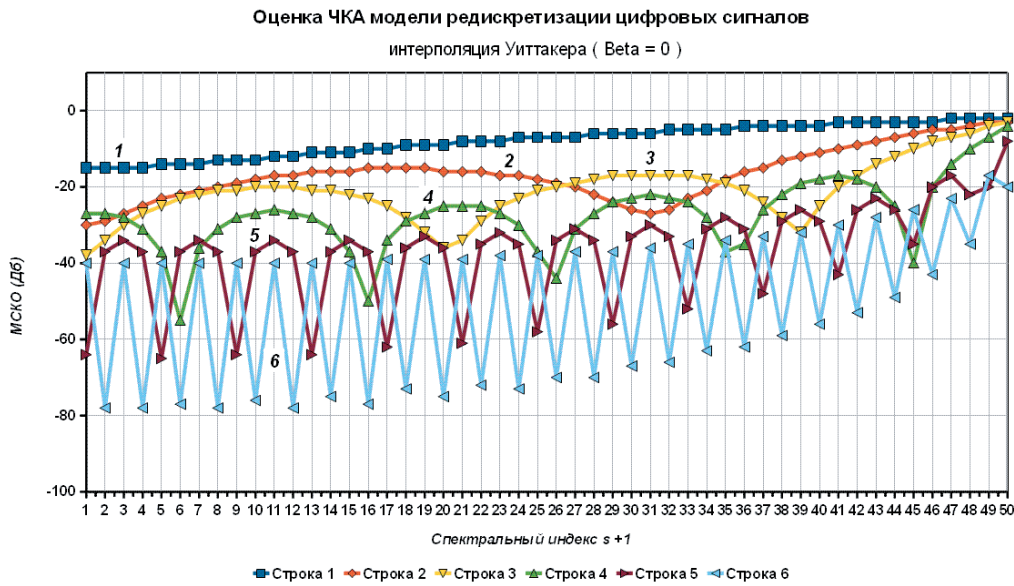


Рис. 2. Графики оценок ЧКА модели редискретизации цифровых сигналов по оригинальной ( $\nu=0$ ) интерполяционной кривой Уиттакера при различных значениях апертury окна интерполяции. Кривые 1..6 соответствуют апертуре  $M_a = 1, 3, 5, 10, 25, 50$  при  $K_D = 33.3, L_0 = 50, A_0 = 10000$

налов при различных значениях апертury окна интерполяции. Полученные оценки ЧКА позволяют дать общие рекомендации по использованию моделей редискретизации цифровых сигналов по интерполяционным формулам Лагранжа и Уиттакера

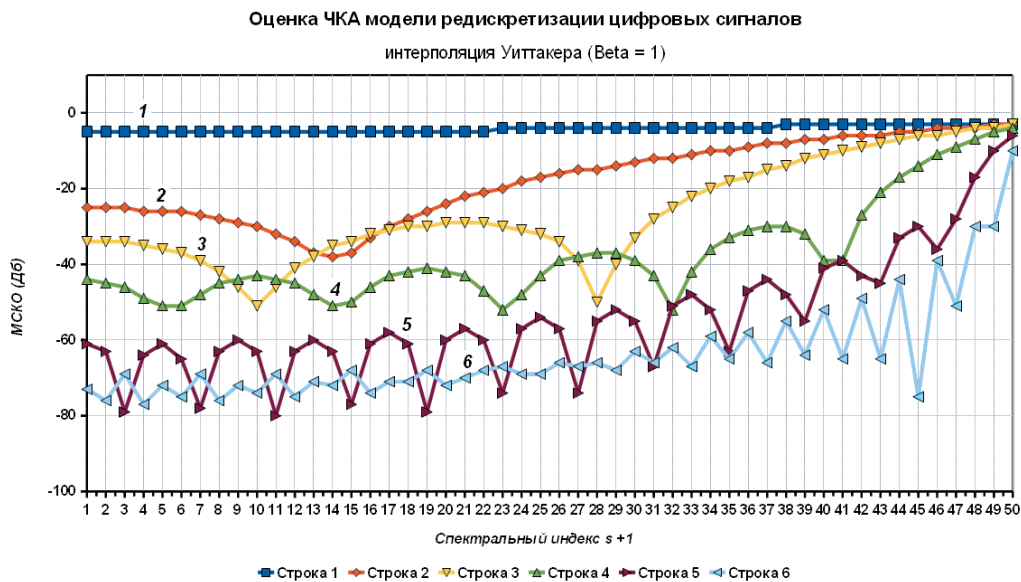


Рис. 3. Графики оценок ЧКА модели редискретизации цифровых сигналов по сглаженной ( $\nu=1$ ) интерполяционной кривой Уиттакера при различных значениях апертury окна интерполяции. Кривые 1..6 соответствуют апертуре  $M_a = 1, 3, 5, 10, 25, 50$  при  $K_D = 33.3, L_0 = 50, A_0 = 10000$

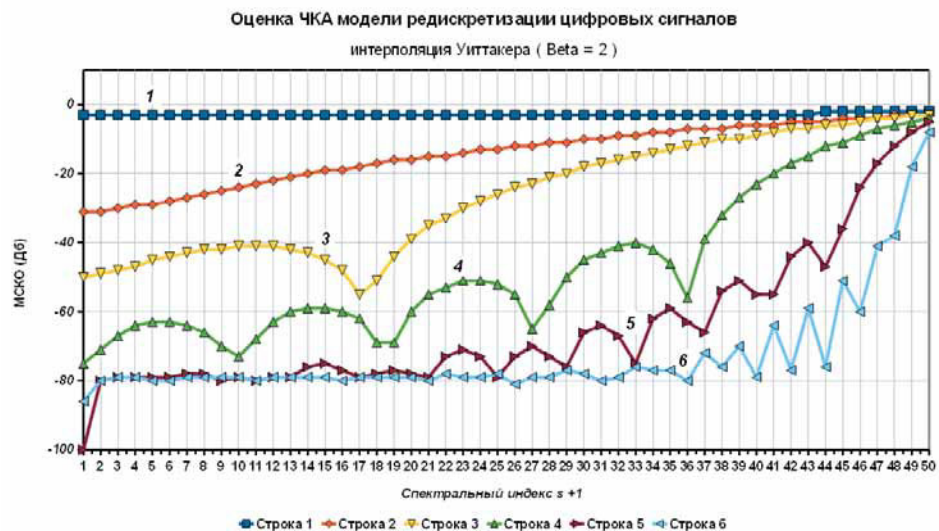


Рис. 4. Графики оценок ЧКА модели редискретизации цифровых сигналов по сглаженной ( $\nu=2$ ) интерполяционной кривой Уиттакера при различных значениях апертюры окна интерполяции. Кривые 1..6 соответствуют апертюре  $M_a = 1, 3, 5, 10, 25, 50$  при  $K_D = 33.3, L_0 = 50, A_0 = 10000$

для подмножества преобразований цифровых сигналов с достаточно большими значениями коэффициентов редискретизации.

Так, легко заметить, что указанные модели редискретизации цифровых сигналов более точны для низкочастотных гармоник сигнала, чем для высокочастотных. Поэтому частоту дискретизации исходного сигнала рекомендуется выбирать приблизительно в три-четыре раза выше максимальной частоты спектра сигнала.

Кривые спектральных погрешностей модели редискретизации цифровых сигналов по формуле Уиттакера являются квазипериодическими функциями нормализованной частоты, причём период этих функций зависит от величины апертюры окна интерполяции. Причиной такого характера поведения оценки ЧКА является явление Гиббса, которое проявляется при «обрезании» медленно затухающей импульсной характеристики линейного фильтра, в данном случае, ядра интерполяционной функции Уиттакера. Использование эмпирических окон сглаживания позволяет существенно уменьшить величину этого эффекта.

### Заключение

В работе рассмотрен и апробирован ряд моделей редискретизации цифровых сигналов. Определена оценка ЧКА и приведены результаты серии вычислительных экспериментов, которые показывают, что оценка ЧКА — достаточно информативный метрологический показатель качества или, точнее, адекватности модели (реализации) преобразования цифрового сигнала определению (декларации) преобразования цифрового сигнала. Таблицы или графики

оценок ЧКА моделей преобразований цифровых сигналов предоставляют существенно больше информации о поведении алгоритма/программы преобразования цифровых сигналов, чем интегральная (средняя по спектру) величина погрешности.

## **Литература**

1. Вьюхин В.Н. Дискретизация в эквивалентном времени и интерполяция в цифровой осциллографии реального времени // Автометрия 2008. № 3. С. 52–56.
2. Чичагов А.В. Исследование зависимости СКО редискретизации цифровых сигналов от величины апертюры окна интерполяции // В сб. докладов 14-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов». М.: МАКС-пресс, 2009. С. 439–441.
3. Чичагов А.В. Программа редискретизации цифровых сигналов (версия 1.0) Свидетельство РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ №2009614998, 2009. Зарегистрировано 14.09.2009.
4. Бейзер Б. Тестирование чёрного ящика. Технологии функционального тестирования программного обеспечения и систем. //Спб.: Питер, 2004.
5. Чичагов А.В. Программа оценки точности редискретизации цифровых сигналов (версия 1.0) Свидетельство РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ №2009614999, 2009. Зарегистрировано 14.09.2009.

---

### **Чичагов Александр Владимирович —**

закончил МГУ им. М.В. Ломоносова (физический факультет) и аспирантуру НИФХИ им. Л.Я. Карпова. В настоящее время является научным сотрудником ВЦ РАН им. А.А. Дородницына. Область интересов: цифровая обработка сигналов, автоматизация эксперимента, разработка математического, программного и информационного обеспечений имитационного моделирования нейро-лингвистических коммуникативных систем, кодирование со сжатием, распознавание и синтез речи  
Email: mail2tchi@ya.ru