

220 и 284

Л.И. Дружинина

Автор: Дружинина Людмила Ивановна, учитель математики средней школы № 45 г. Калининграда.

Предмет: Математика.

Класс: 6.

Тема: Делимость чисел.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Средний.

Текст задачи: Древнегреческий учёный Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Что это за числа? Какое отношение к ним имеет Николо Паганини, вошедший в историю как самый выдающийся скрипач всех времён и народов?

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните свои выводы с предложенным образцом.

Возможные информационные источники

Книги:

Малаховский В.С. Введение в математику. Учеб.

издание. Калининград: Янтар. сказ, 1998.

Детская энциклопедия. Т. 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика, 1972.

Школьная энциклопедия. Математика. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996.

Интернет-ресурсы:

<http://www.krugosvet.ru>

<http://slovari.sosh.ru/slovo>.

<http://ru.wikipedia>.

<http://nauka.relis.ru>

<http://www.math.omsu.omskred.ru/info/learn/system/>

Культурные образцы

Малаховский В.С. Введение в математику. Учеб. издание. Калининград: Янтар. сказ, 1998. С. 36–37.

Два натуральных числа m и n называются дружественными, если сумма делителей одного числа равняется другому и наоборот. Со времён Древней Греции и до XVII в. была известна только одна пара дружественных чисел (220, 284).

Действительно,

$$220 = 2^2 \times 5 \times 11, 284 = 2^2 \times 71$$

Следовательно, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$,
 $1 + 2 + 4 + 71 = 220$.

В Древней Греции, особенно у пифагорейцев, эта пара чисел была символом дружбы. Считалось, что если у двух людей имена были таковы, что их числовые значения образовывали пару дружественных чисел, то это свидетельствовало о духовной близости этих людей. В Средние века эти числа играли роль при составлении гороскопов. Считалось, что тали-

сманы с числами 220 и 284 способствуют укреплению любви.

Следующая пара дружественных чисел (17296, 18416) была открыта в 1636 г. французским математиком и юристом Пьером Ферма (1601–1665). Рене Декарт (1596–1650) обнаружил третью пару дружественных чисел (9363584, 9437056). В XVIII в. Леонард Эйлер (1707–1783) составил список 62 пар дружественных чисел. Ещё одну пару дружественных чисел обнаружил Лежандр (1752–1833). Однако ближайшую к (220, 284) пару дружественных чисел (1184, 1210) «проглядели» все знаменитые математики XVII–XIX вв. Её обнаружил в 1867 г. шестнадцатилетний итальянец Николо Паганини.

С помощью ЭВМ обнаружено более 600 пар дружественных чисел, многие из которых содержат свыше 30 цифр. Однако среди натуральных чисел, меньших 100 000, их всего 13: (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416), (63020, 76084), (66928, 66992), (67095, 71145), (69615, 87633), (79750, 88730).

Анализируя эти пары, видим, что оба числа пары либо чётные, либо нечётные (которых значительно меньше). До сих пор не найдена формула, позволяющая получать все пары дружественных чисел. Исследование известных пар (m, n) дружественных чисел приводит к предположениям, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 1$$

не существует дружественных пар разной чётности, все нечётные дружественные числа кратны 3, сум-

ма двух чётных чисел дружественной пары кратна 9.

<http://ru.wikipedia>.

Дружественные числа — два натуральных числа, для которых сумма всех делителей первого числа (кроме него самого) равна второму числу и сумма всех делителей второго числа (кроме него самого) равна первому числу. Иногда частным случаем дружественных чисел считаются совершенные числа: каждое совершенное число дружественно себе. Обычно же, говоря о дружественных числах, имеют в виду пары из двух **разных** чисел.

Дружественные числа были открыты последователями Пифагора. Правда, пифагорейцы знали только одну пару дружественных чисел — 220 и 284. Только спустя много столетий Эйлер нашёл ещё 65 пар дружественных чисел. Одна из них — 17296 и 18416. Но общего способа нахождения таких пар нет до сих пор.

Формулу, дающую три пары дружественных чисел, открыл примерно в 850 году арабский астроном и математик Сабит ибн Курра (826–901): если

$$\begin{aligned} p &= 3 \times 2^{n-1} - 1, \\ g &= 3 \times 2^{n-1}, \\ r &= 9 \times 2^{2n-1} - 1 \end{aligned}$$

где $n > 1$ натуральное число, а p , g , r — простые числа, то $2^n p q$ и $2^n r$ — пара дружественных чисел. Эта формула даёт пары (220, 284), (17296, 18416) и (9363584, 9437056) соответственно для $n = 2, 4, 7$, но больше никаких пар дружественных чисел для $n < 20000$ нет. Кроме того, многие дружественные числа, например (6232, 6368), не могут быть получены по этой формуле.

На ноябрь 2006 г. известно 11 446 960 пар дружественных чисел. Все они состоят из двух чётных или двух нечётных чисел. Есть ли чётно-нечётная пара дружественных чисел, неизвестно. Также неизвестно, существуют ли взаимно простые дружественные числа, но если такая пара дружественных чисел существует, их произведение должно быть больше 10^{67} .

Краткая таблица дружественных чисел

Ниже приведены все пары дружественных чисел, меньших 100 000.

1. 220 и 284 (Пифагор, около 500 до н. э.)
2. 1184 и 1210 (Паганини, 1860)
3. 2620 и 2924 (Эйлер, 1747)
4. 5020 и 5564 (Эйлер, 1747)
5. 6232 и 6368 (Эйлер, 1750)
6. 10744 и 10856 (Эйлер, 1747)
7. 12285 и 14595 (Браун, 1939)
8. 17296 и 18416 (, около 1300, , около 1300, Ферма, 1636)
9. 63020 и 76084 (Эйлер,)
10. 66928 и 66992 (Эйлер,)
11. 67095 и 71145 (Эйлер,)
12. 69615 и 87663 (Эйлер,)
13. 79750 и 88730 (Рольф (Rolf), 1964)

<http://bse.sci-lib.com/article033817.html>

Дружественные числа, пара натуральных чисел, каждое из которых равно сумме всех собственных (или правильных) делителей другого, т. е. делителей, отличных от самого числа. **Дружественные числа** 284 и 220, имеющие соответствующую сумму делителей $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ и $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 220$, были известны ещё древним. Приписывая мистический смысл свойствам чисел, пифагорей-

цы придавали **Дружественным числам** большое значение (см. *Пифагореизм*). Около 60 пар **Дружественных чисел** было найдено Л. Эйлером. Использование ЭВМ позволило отыскать ещё несколько сотен пар **Дружественных чисел**. Эти числа представляют в первую очередь исторический интерес.

<http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=554>

Дружественные числа — натуральные числа A и B такие, что A есть сумма всех натуральных делителей числа B , меньших B , а число B есть сумма всех натуральных делителей числа A , меньших A . Первая пара различных дружественных чисел 220 и 284 была известна Пифагору (6 в. до н.э.). Открытие второй пары дружественных чисел 17296 и 18416 приписывалось П. Ферма, но оказалось, что она была известна за 350 лет до него. Л. Эйлер указал 59 пар дружественных чисел в 1747–1750 гг. После Эйлера новую пару указали А. Лежандр и П.Л. Чебышев. Поразительное открытие сделал 16-летний итальянец Н. Паганини, обнаружив вторую по величине пару дружественных чисел 1184 и 1210, которую все проглядели!

Источник: Школьная энциклопедия. Математика. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996.

<http://www.krisosel.ru/modules.php?name=News&file=article&sid=8>

Дружественные числа

Это натуральные числа A и B такие, что A есть сумма всех натуральных делителей числа B , меньших B ; а число B есть сумма всех натуральных

делителей числа A , меньших A . Древнегреческий учёный Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». В то время существовало много попыток найти новые дружественные числа, но так как те математики высокой квалификации не отличались, то в их сочинениях присутствовали такие рецепты:

«Чтобы добиться взаимности в любви, нужно на чём-либо написать числа 220 и 284, меньшее дать объекту любви, а большее съесть самому». Каждое совершенное число дружественно самому себе. Первая пара различных дружественных чисел ($220 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 + 56 + 112$ и $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$) была известна древнегреческому учёному Пифагору (6 в. до н.э.); открытие второй пары (17296, 18416) приписывалось ранее французскому учёному П. Ферма, однако оказалось, что она была известна за три с половиной столетия до него. В сочинениях арабского учёного Аль-Хорезми была обнаружена следующая фраза: «Числа 17296 и 18416 дружественны. Аллах всеведущ». Большой вклад в отыскание дружественных чисел внёс учёный Л. Эйлер, который в 1747-1750 гг. указал сразу 59 пар дружественных чисел. После Л. Эйлера новую пару дружественных чисел указали французский учёный А. Лежандр и российский учёный П.Л. Чебышев. Поразительное открытие в 1887 г. сделал 16-летний итальянец Н. Паганини, обнаружив вторую по величине пару дружественных чисел (1184, 1210), которую все проглядели. В настоящее время известны все пары дружественных чисел (в основном их находят сейчас при помощи компью-

тера). Их 1427, причём до 1000000 всего 42. Но до сих пор неизвестно, конечно или нет множество пар дружественных чисел. В каждой известной паре либо оба числа чётные, либо оба нечётные. Неизвестно, существует ли пара дружественных чисел различной чётности. Приведём первые 12 пар дружественных чисел:

220 и 284
1184 и 1210
2620 и 2924
5020 и 5564
6232 и 6368
10744 и 10856
12285 и 14595
17296 и 18416
63020 и 76084
66928 и 66992
67095 и 71145
69615 и 87633.

school-collection.edu.ru/catalog/rubr/.../105350/?interface=themcol — Cached

От совершенных чисел повествование непременно перетекает к дружественным числам. Это такие два числа, каждое из которых равно сумме делителей второго дружественного числа. Наименьшие из дружественных чисел 220 и 284 были известны ещё пифагорейцам, которые считали их символом дружбы.

Следующая пара дружественных чисел 17296 и 18416 была открыта французским юристом и математиком Пьером Ферма лишь в 1636 году, а последующие числа находили Декарт, Эйлер и Лежандр. Шестнадцатилетний итальянец Никколо Паганини (тёзка знаменитого скрипача) в 1867 году потряс математический мир сообщением о том, что числа 1184 и 1210 дружественные! Эту пару,

ближайшую к 220 и 284, проглядели все знаменитые математики, изучавшие дружественные числа.

Методический комментарий

Цель — познакомить шестиклассников с историей возникновения дружественных чисел. Обобщаются знания учащихся о числах и признаках делимости чисел. В результате у школьников формируется культура счёта и математической речи, улучшаются вычислительные умения и навыки работы с величинами. Они учатся самостоятельно и творчески рабо-

тать с дополнительной математической литературой.

Обращается внимание на исторические факты. Исторические экскурсы позволяют в доступной форме раскрыть происхождение многих математических понятий и фактов, расширить математический кругозор учащихся.

Исторический аспект развития математики позволяет повысить интерес учащихся к её изучению, формирует положительное эмоциональное отношение к учебному предмету, способствует развитию их интеллекта и креативности.