Цикл задач по теме «Сфера и шар»

Л.И. Дружинина

Сферика. Что? Где? Когда?

Автор: Дружинина Людмила Ивановна, учитель математики средней школы № 45 г. Калининграда.

Предмет: Геометрия.

Класс: 11.

Тема: Сфера и шар.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Текст задачи № 1: Цицерон, который в 75 г. до н.э. был на Сицилии, обнаружил выглядывавшее из колючего кустарника надгробие и на нём — шар и цилиндр.

На чьей могиле изображены указанные геометрические тела и имеют ли они отношение к сферике?

На рисунках: Археологические раскопки, Греческий театр и предполагаемая могила Архимеда … http://nibiryukov.narod.ru/nb_pinacoteca/nbr_pinacoteca_artists_v...http://nibiryukov.narod.ru/nb_pinacoteca/nbr_pinacoteca_artists_v…, http://www.travelnn.ru/?id=19999&template=print

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните ваши выводы с выводами известных людей.

Возможные информационные источники

Книги:

1. Детская энциклопедия. Т. 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика,1972.

2. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. М.: Аванта+,1999.

3. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1985.

4. Математика: Школьная энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия; Дрофа, 1997.

5. *Александров Н.И., Ярандай И.П.* Словарь-справочник по математике. Пособие для учащихся средней школы. Йошкар-Ола: Марийское книжное издательство, 1976.

Компакт-диски:

Открытая математика (соответствует программе курса математики для общеобразовательных учреждений

России), версия 2.5. Стереометрия. Авторы курса: Р.П. Ушаков и С.А. Беляев / Под ред. Т.С. Пиголкиной.

Web-сайты:

www.history.ru/index.php?option=com_ewriting&Itemid=0&func=chapterin

http://www.mathsisgoodforyou.com

http://ru.wikipedia.org/wiki

http://www.krugosvet.ru

http://www.bolshoyforum.org/forum/index.php?action=printpage;topic

http://slovari.sosh.ru

www.krugosvet.ru/articles/15/1001550/1001550a2.htm

http://nauka.relis.ru

kvant.info/zkm_tex/zkm_main.pdf

http://nuclphys.sinp.msu.ru

http://www.math.omsu.omskred.ru

http://www.math.ru Словарь

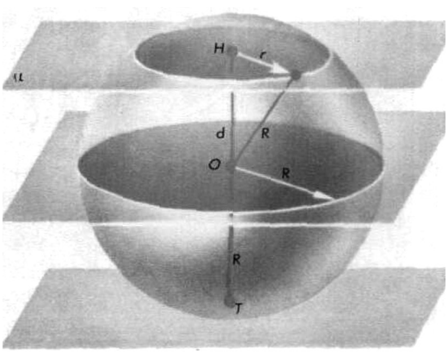
Культурные образцы

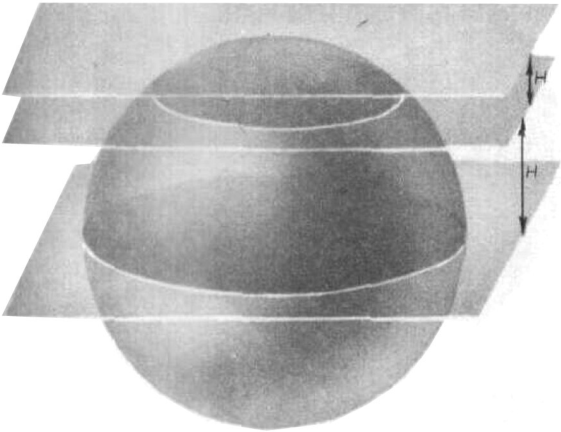
Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1985. С. 283–285.

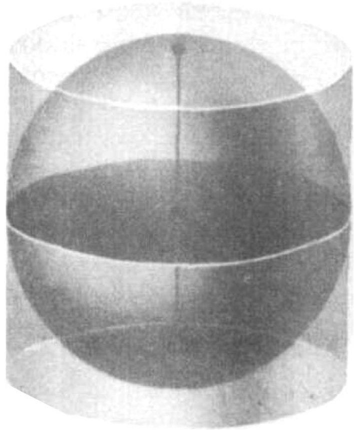
Сфера и шар

Точки пространства, удалённые от данной точки ***O*** на данное расстояние R, образуют сферу с центром ***O*** и радиусом R. Сфера ограничивает шар, состоящий из точек, удалённых от ***O*** на расстояние, не большее R. Эти геометрические объекты, так же как ***окружность и круг,*** рассматривали ещё в глубокой древности. Открытие шарообразности Земли, появление представлений о небесной сфере дали толчок к развитию специальной науки — ***сферики,*** изучающей расположенные на сфере фигуры (см. ***Сферическая геометрия***). В математике существует понятие «сферическая тригонометрия», которая рассматривает соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере, образованных дугами больших углов. Сферическая тригонометрия является частью сферической тригонометрии на плоскости, т.к. служит нуждам практической астрономии. Отсюда и возникло название «Сферика». Рассмотрим основные вопросы классической стереометрии: взаимное расположение шара (сферы) и других пространственных фигур, измерение объёма шара и его частей, а также площади сферы и её частей.

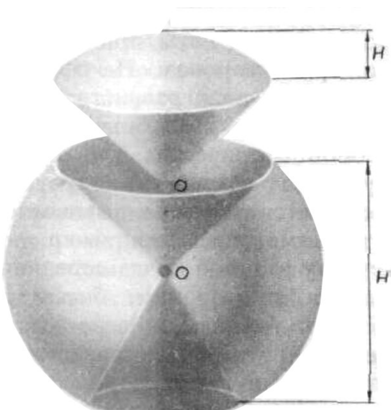
Прежде всего, плоскость б, проведённая на расстоянии $d < \boldsymbol{R}$ от центра ***O*** шара радиуса R, в пересечении с шаром даёт круг радиуса $r = R^2 – d^2$ с центром в точке H — основании перпендикуляра, проведённого из ***O*** к α. Если плоскость α отстоит от центра ***O*** на расстояние ***d*** = R, то α имеет с шаром (и сферой) единственную общую точку ***T***. Такие плоскости называются касательными к шару (сфере); они характеризуются тем, что перпендикулярны радиусу ***OT***, проведённому в точку касания.







Круговое сечение шара делит его на два шаровых сегмента, а сферу — на две сегментные поверхности. Часть шара, ограниченная двумя параллельными круговыми сечениями и лежащим между ними сферическим поясом (или зоной), называется шаровой зоной. Радиусы, проведённые от центра шара к точкам сферы, принадлежащим одной сегментной поверхности или сферическому поясу, образуют шаровой сектор — он может быть ограничен сферическим сегментом или зоной и одной или двумя ***коническими поверхностями***. Высота шаровой или сферической зоны — это расстояние между плоскостями сечений; высота шарового сегмента или сегментной поверхности определяется как расстояние от плоскости сечения до параллельной ей плоскости, касательной к этому сегменту. Высоту шарового сектора определяют как высоту соответствующей сегментной поверхности или сферического пояса.



Ещё в Древней Греции умели вычислять объёмы шаровых секторов и площади сферических зон или сегментов по формулам:

$$V_c = \frac{2}{3} \cdot R^2 H, \quad S_з = 2 \cdot R \cdot H.$$

где π, как обычно, — отношение длины окружности к её диаметру. Рассматривая шар и сферу как частные случаи шарового сектора и сферической зоны — с высотами H = 2R — мы получаем формулы для объёма шара и площади сферы:

$$V_ш = \frac{4}{3} \cdot R^3, \quad S_{сф} = 4 \cdot R^2.$$

Архимед интерпретировал эти формулы так: объём и поверхность шара составляют 2/3 от объёма и полной поверхности описанного около шара цилиндра (по желанию Архимеда такой чертёж был изображён на его гробнице). Дата рождения Архимеда (287 до н.э.) определяется исходя из свидетельства византийского историка 12 в. Иоанна Цеца, согласно которому учёный «прожил семьдесят пять лет». Яркие картины его гибели, описанные Ливием, Плутархом и Валерием Максимом, различаются лишь в деталях, но сходятся в том, что Архимеда, занимавшегося в глубокой задумчивости геометрическими построениями, зарубил римский воин. Кроме того, Плутарх сообщает, что Архимед, «как утверждают, завещал родным и друзьям установить на его могиле описанный вокруг шара цилиндр с указанием отношения объёма описанного тела к вписанному», что было одним из наиболее славных его открытий.

Плутарх пишет, что на могиле Архимеда была установлена плита с изображением шара и цилиндра. Её видел Цицерон, посетивший Сицилию через 137 лет после смерти Архимеда. Великий учёный оставил большое наследие в виде своих трудов. Только в XVI–XVII веках европейские математики смогли, наконец, осознать значение того, что было сделано Архимедом за две тысячи лет до них.

Цицерон, который в 75 г. до н.э. был на Сицилии, обнаружил выглядывавшее из колючего кустарника надгробие и на нём — шар и цилиндр.

www.mccme.ru/.../books/books.php?book=1&page=6

> Я вдруг обнаружил маленькую колонну, вершина которой поднималась из зарослей. На ней были изображены шар и цилиндр, которые я искал.
>
> Я тотчас же сказал сопровождавшим меня, что перед нами, несомненно, могильный памятник Архимеда.
>
> *Цицерон*

Математические труды

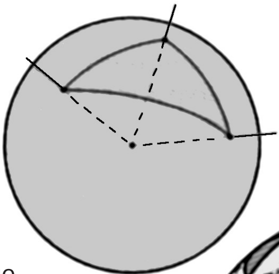
Сохранившиеся математические сочинения Архимеда можно разделить на три группы. Сочинения первой группы посвящены в основном доказательству теорем о площадях и объёмах криволинейных фигур или тел. Сюда относятся трактаты о шаре и цилиндре, об измерении круга, о коноидах и сфероидах, о спиралях и о квадратуре параболы. Вторую группу составляют работы по геометрическому анализу статических и гидростатических задач: о равновесии плоских фигур, о плавающих телах. К третьей группе можно отнести различные математические работы: о методе механического доказательства теорем, исчисление песчинок, задачу о быках и сохранившийся лишь в отрывках «Стомахион». Существует ещё одна работа — «Книга о предположениях» (или «Книга лемм»), сохранившаяся лишь в арабском переводе. Хотя она и приписывается Архимеду, в своём нынешнем виде она явно принадлежит другому автору (поскольку в тексте есть ссылки на Архимеда), но, возможно, здесь приведены доказательства, восходящие к Архимеду. Несколько других работ, приписываемых Архимеду древнегреческими и арабскими математиками, утеряны.

Дошедшие до нас работы не сохранили своей первоначальной формы. Так, судя по всему, первая книга трактата о равновесии плоских фигур является отрывком из более обширного сочинения «Элементы механики»; кроме того, она заметно отличается от второй книги, написанной явно позднее. Доказательство, упоминаемое Архимедом в сочинении о шаре и цилиндре, было утрачено ко 2 в. н.э. Работа об измерении круга сильно отличается от первоначального варианта. Заглавие о квадратуре параболы вряд ли могло принадлежать самому Архимеду, так как в его время слово «парабола» ещё не использовалось в качестве названия одного из конических сечений. Тексты таких сочинений, как о шаре и цилиндре и об измерении круга, скорее всего, подвергались изменениям в процессе перевода с дорийско-сицилийского на аттический диалект.

При доказательстве теорем о площадях фигур и объёмах тел, ограниченных кривыми линиями или поверхностями, Архимед постоянно использует метод, известный как «метод исчерпывания». Изобрёл его, вероятно, Евдокс (расцвет деятельности ок. 370 до н.э.) — по крайней мере, так считал сам Архимед. К этому методу время от времени прибегает и Евклид в XII книге «Начал». Доказательство с помощью метода исчерпывания, в сущности, представляет собой косвенное доказательство от противного. Иначе говоря, утверждение «А равно В» считается истинным в том случае, когда принятие противоположного утверждения, «А не равно В», ведёт к противоречию. Основная идея метода исчерпывания заключается в том, что в фигуру, площадь или объём которой требуется найти, вписывают (или вокруг неё описывают, либо же вписывают и описывают одновременно) правильные фигуры. Площадь или объём вписанных или описанных фигур увеличивают или уменьшают до тех пор, пока разность между площадью или объёмом, которые требуется найти, и площадью или объёмом вписанной фигуры не становится меньше заданной величины. Пользуясь различными вариантами метода исчерпывания, Архимед смог доказать различные теоремы, эквивалентные в современной записи соотношениям $S = 4pr^2$ для площади поверхности шара, $V = 4/3pr^3$ для его объёма, теореме о том, что площадь сегмента параболы равна 4/3 площади треугольника, имеющего те же основание и высоту, что и сегмент, а также многие другие интересные теоремы.

Ясно, что, используя метод исчерпывания (который является скорее методом доказательства, а не открытия новых соотношений), Архимед должен был располагать каким-то другим методом, позволяющим находить формулы, которые составляют содержание доказанных им теорем. Один из методов нахождения формул раскрывает его трактат о механическом методе доказательства теорем. В трактате излагается механический метод, при котором Архимед мысленно уравновешивал геометрические фигуры, как бы лежащие на чашах весов. Уравновесив фигуру с неизвестной площадью или объёмом с фигурой с известной площадью или объёмом, Архимед отмечал относительные расстояния от центров тяжести этих двух фигур до точки подвеса коромысла весов и по закону рычага находил требуемые площадь или объём, выражая их соответственно через площадь или объём известной фигуры. Одно из основных допущений, используемых в методе исчерпывания, состоит в том, что площадь рассматривается как сумма чрезвычайно большого множества плотно прилегающих друг к другу «материальных» прямых, а объём — как сумма плоских сечений, тоже плотно прилегающих друг к другу. Архимед считал, что его механический метод не имеет доказательной силы, но позволяет получить предварительный результат, который впоследствии может быть доказан более строгими геометрическими методами.

Текст задачи № 2. К какой фигуре относится формула Жирара SABC= FA+FB +FC – П? Почему эта особенность формулы связана с нарушением Евклидовой аксиомы о параллельных прямых и также присуща геометрии Лобачевского?



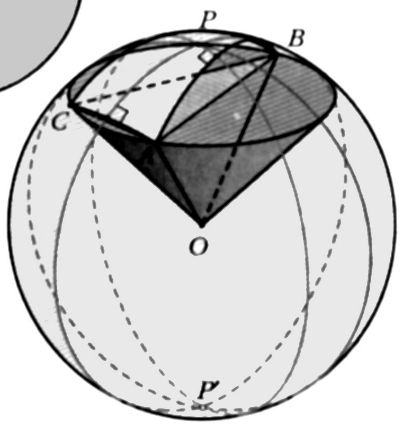
Культурный образец

sch140.omsk.edu/projects/evclides/orisfera.htm — 31k -

«Сферическая тригонометрия» — раздел геометрии, изучающий зависимости между углами и сторонами (дугами большого круга) сферических треугольников. Сферическая тригонометрия возникла значительно раньше плоской тригонометрии при решении задач сферической астрономии.

Особый интерес представляет простейший сферический многоугольник — треугольник. Первым его ввёл в геометрический обиход и исследовал Менелай из Александрии. Его труд «Сферика» стал вершиной достижений греков в сферической геометрии. Менелай перенёс на сферу евклидову теорию плоских треугольников и в числе прочего получил условие, при котором три точки на сторонах сферического треугольника или их продолжениях лежат на одной прямой. Интересно, что соответствующая теорема для плоскости в то время была уже широко известна, однако в историю геометрии она вошла именно как теорема Менелая. Птолемей и арабский учёный Насиреддин Туси систематически рассмотрели все случаи решения косоугольных сферических треугольников, впервые указав решение в двух труднейших случаях.

Российский учёный Л. Эйлер (1753 и 1779) дал всю систему формул сферической тригонометрии.

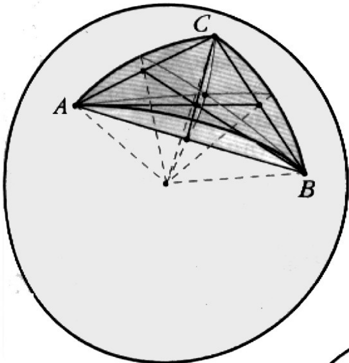


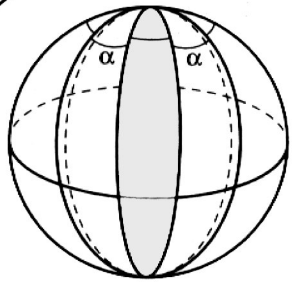
Многие свойства сферического треугольника (а они одновременно являются и свойствами трёхгранных углов) почти дословно повторяют свойства обычного треугольника. Среди них — неравенство треугольника, которое на языке трёхгранных углов гласит, что любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других. Или, например, три признака равенства треугольников. Понятно, что все планиметрические следствия упомянутых теорем вместе с их доказательствами остаются справедливыми на сфере. Так, множество точек, равноудалённых от концов отрезка, будет и на сфере перпендикулярной к нему прямой, проходящей через его середину. А отсюда следует, что серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника ABC имеют общую точку, точнее, две диаметрально противоположные общие точки P и P’, являющиеся полюсами его единственной описанной окружности.

В стереометрии это означает, что около любого трёхгранного угла можно описать конус. Легко перенести на сферу и теорему о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре его вписанной окружности.

Теоремы о пересечении высот и медиан тоже остаются верными, но их обычные доказательства в планиметрии прямо или косвенно используют параллельность, которой, как мы знаем, на сфере нет, и потому проще доказать их заново, на языке стереометрии.

Рисунок иллюстрирует доказательство сферической теоремы о медианах: плоскости, содержащие медианы сферического треугольника ABC, пересекают плоский треугольник с теми же вершинами по его обычным медианам, следовательно, все они содержат радиус сферы, про-





ходящий через точку пересечения «плоских» медиан. Конец радиуса и будет общей точкой трёх «сферических» медиан.

Можно привести ещё много примеров сходства двух геометрий, но различия между ними интереснее. Особенно удивительна формула для площади треугольника, впервые опубликованная голландцем А. Жираром в 1629 г. и названная его именем. Согласно этой формуле, площадь треугольника ABC на сфере радиуса 1 равна его угловому избытку, т.е. превышению суммы его углов над суммой углов плоского треугольника:

$$S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

Из формулы видно, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π. Откуда берётся столь неожиданная формула? Рассмотрим сначала двуугольник с углом α. При $\alpha = 2\pi/n$, где n — целое число, сферу можно разрезать ровно на n копий такого двуугольника. А площадь сферы равна $4\pi R^2 = 4\pi$ при $R = 1$, поэтому площадь двуугольника равна $4\pi/n = 2\alpha$. Эта формула, очевидно, верна и при $\alpha = 2\pi m/n$.

Отсюда следует, что она верна для всех α. Если углами сферического треугольника называются двугранные углы между плоскостями больших кругов, образующих стороны сферического треугольника, то эти углы измеряются плоскими углами при вершинах треугольника между касательными к его сторонам.

Обычно рассматриваются треугольники, углы и стороны которых меньше 180˚. Для таких сферических треугольников сумма углов всегда больше 180˚, но меньше 540˚, а сумма сторон всегда меньше 360˚. Разность между суммой трёх углов сферического треугольника и 180˚ называется сферическим избытком. Углами сферического треугольника называются двугранные углы между плоскостями больших кругов, образующих стороны сферического треугольника. Эти углы измеряются плоскими углами при вершинах треугольника между касательными к его сторонам.

Углами сферического треугольника однозначно задаётся не только его площадь, но и он сам как фигура: в сферической геометрии выполняется четвёртый признак равенства треугольников — по трём углам. Таким образом, на сфере не бывает подобных, но не равных треугольников. Более того, в сферической геометрии отсутствует само понятие подобия, потому что не существует преобразований, изменяющих все расстояния в одинаковое (не равное 1) число раз. Эти особенности связаны с нарушением евклидовой аксиомы о параллельных прямых и также присущи геометрии Лобачевского. Сферический треугольник, таким образом, отличается по своим свойствам от плоского и применять к нему формулы тригонометрии на плоскости нельзя.

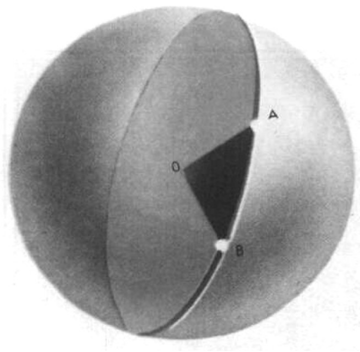
Текст задачи № 3. При решении плоских треугольников применяется ряд известных теорем, таких, как признаки равенства и подобия треугольников, теорема Пифагора, теорема синусов, теорема косинусов и др. Сколько теорем достаточно для определения всех элементов сферического треугольника по любым трём данным?

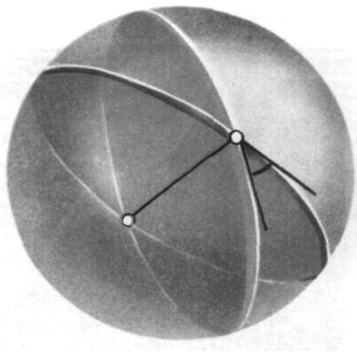
Культурный образец

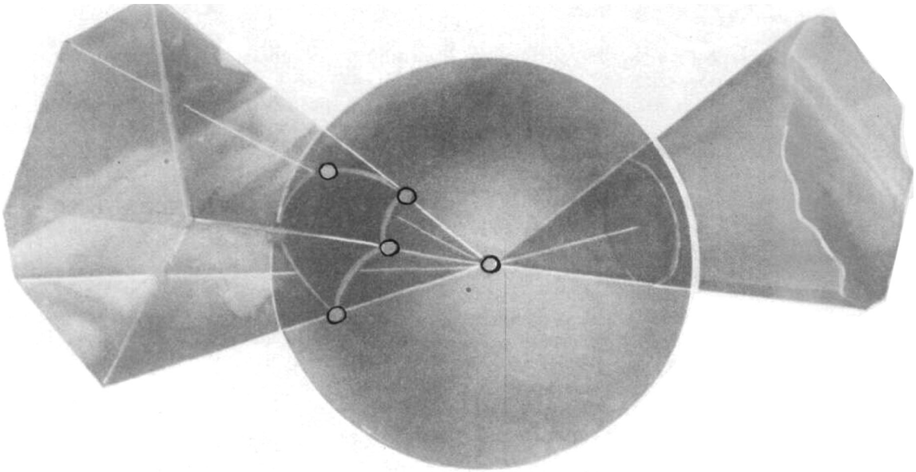
Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1985. С. 285–287.

Сферическая геометрия — раздел математики, в котором изучаются фигуры, расположенные на сфере (см. Сфера и шар). Сферическая геометрия возникла в связи с потребностями астрономии.

Точки А и В разбивают эту большую окружность на две дуги — два сферических отрезка, меньший из которых является кратчайшей линией



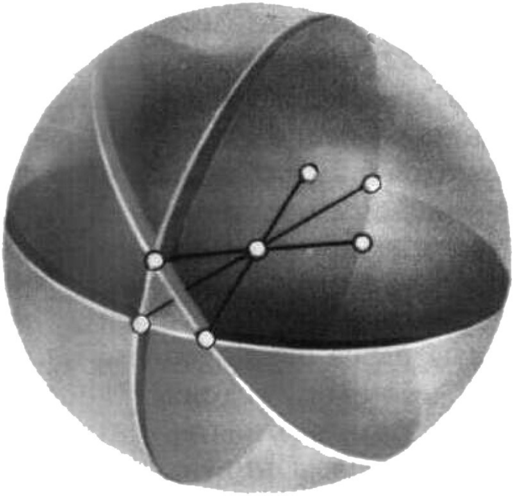




на сфере, соединяющей A с B. Длину сферического отрезка удобно измерять величиной угла, под которым он виден из центра сферы. Если углы измерять в радианах , то на сфере радиуса 1 такое измерение отрезка равно обычной длине дуги.

В сферической геометрии в отличие от планиметрии отсутствуют параллельные сферические прямые: любые две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Угол между сферическими прямыми — большими окружностями — определяется как угол между их плоскостями, или, что то же самое, как угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения.

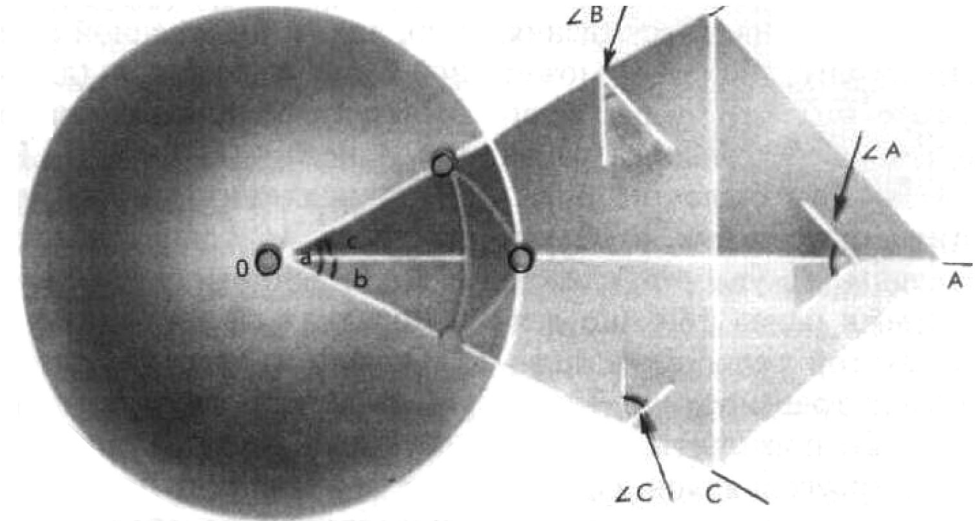
Если провести на сфере три большие окружности, то сфера разобьётся на восемь ***треугольников***. В отличие от планиметрического случая, сумма углов любого сферического треугольника больше 180˚, или р, причем она не постоянна, а зависит от площади треугольника. А именно площадь треугольника на сфере радиуса 1 связана с суммой его углов A, B и C формулой Жирара (А. Жирар —



нидерландский математик, 1595-1632): $S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$ (углы ***A, B, C*** измеряются в радианах).

Для сферических треугольников справедливы три известных в планиметрии признака равенства: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трём сторонам. На сфере справедлив ещё один признак равенства треугольников — по трём углам. Подобных, но не равных между собой, сферических треугольников не существует. Для сферических треугольников, однако, остаются справедливыми многие теоремы планиметрии, например, теоремы о пересечении в одной точке серединных перпендикуляров к сторонам, биссектрис внутренних углов, медиан и даже высот, лишь с той разницей, что эти линии дают сразу по две диаметрально противоположные точки пересечения.

Теоремы косинусов и синусов в сферической геометрии приобретают несколько необычный вид: для треугольника ***ABC*** **с** углами ***A, B, C*** и противолежащими сторонами соответственно ***а, в*** и ***с*** (напомним, что стороны измеряются как соответствующие центральные углы):



Сферическая геометрия представляет собой своеобразный мост между планиметрией и стереометрией, так как сферические многоугольники получаются в пересечении сферы с многогранными углами с вершинами в центре сферы, сферические окружности — в пересечении сферы с коническими поверхностями и т.д. Все теоремы о сферических треугольниках можно переформулировать в терминах трёхгранных углов; в частности, две последние формулы часто называют теоремами косинусов и синусов для трёхгранного угла.

Возьмём на сфере три точки А, В и С и проведём из её центра О лучи в эти точки. Лучи вместе с заключёнными между ними плоскими углами образуют трёхгранный угол ОАВС. Пересекаясь со сферой, он вырезает из неё криволинейный треугольник АВС, который называется сферическим треугольником. Его стороны — дуги больших кругов. Длина дуги АВ равна произведению радиуса сферы на величину угла АОВ в радианах.

Для простоты выберем единичную сферу, тогда стороны треугольника будут численно равны плоским углам трёхгранного угла. В сферическом треугольнике угол, например, при вершине А считается равным двугранному углу между гранями АОВ и АОС. По аналогии с планиметрией стороны будем обозначать а, в, с, а углы сферического треугольника, т.е. плоские и двугранные углы соответствующего трёхгранного угла, будем обозначать А, В, С соответственно. Соотношения между этими величинами и составляют предмет сферической тригонометрии. Приведём важнейшие из них; напомним, что радиус сферы мы приняли за 1.

Теорема синусов. Выводят теорему примерно так же, как и обычную теорему синусов: приравнивают два выражения для «высоты» треугольника — расстояния от точки на ребре соответствующего трёхгранного угла до противоположной грани.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

Другие формулы тоже выводят при рассмотрении трёхгранных углов.

Первая теорема косинусов. Её выражает довольно громоздкая формула, мало похожая на свой аналог из планиметрии:

$$\cos\alpha=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

Но решает она ту же задачу — позволяет определить сторону треугольника через две другие стороны и угол между ними. Если нарисовать на сфере треугольник и зафиксировать длины его сторон, а затем «раздувать» сферу, устремляя её радиус к бесконечности, то треугольник будет становиться всё более плоским, и формула сферической теоремы косинусов в конце концов превратится в обычную. То же верно и для теоремы синусов.

Сферическая теорема косинусов даёт возможность, например, найти расстояние между двумя городами по их географическим координатам. В качестве третьей вершины треугольника берут один из полюсов. Тогда угловые величины сторон сферического треугольника, соединяющих полюс с городами, определяются по долготам городов, а угол между этими сторонами равен разности широт городов.

Длина третьей стороны и есть интересующее нас расстояние.

Вторая теорема косинусов. С помощью этой удивительной теоремы находят стороны треугольника, зная его углы, так же, как посредством обычной теоремы косинусов углы выражают через стороны. Записывается вторая теорема косинусов так:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos\alpha.$$

Приведённых соотношений достаточно для определения всех элементов сферического треугольника по любым трём заданным. Сферическая тригонометрия особенно важна для практического применения. На сфере, как и на плоскости, по трём данным элементам треугольника нетрудно вычислить остальные. И конечно, соответствующие формулы можно рассматривать как зависимости между плоскими и двугранными углами трёхгранного угла. Сферическая теорема синусов очень похожа на обычную:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

где A, B, C — углы, а a,b,c — сферические длины сторон треугольника ABC. Теорема косинусов, напротив, здесь изменяется до неузнаваемости:

$$\cos\alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

но тоже связывает величины трёх сторон и одного угла. При этом формула превращается в своего рода сферическую «теорему Пифагора»:

$$\cos\alpha = \cos b \cos c.$$

На сфере справедлива и вторая теорема косинусов. Она связывает величины трёх углов и сторону треугольника:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos\alpha.$$

Здесь проявляется замечательное свойство геометрии на сфере, называемое принципом двойственности: понятия точки и прямой, расстояния и угла взаимозаменяемы.

Интересно, что исторически эти теоремы предшествовали аналогичным теоремам плоской тригонометрии, поскольку потребность людей в знаниях по астрономии, необходимых для исчисления времени, возникла прежде других потребностей человека, связанных с измерением углов. Исходя из геоцентрической гипотезы Вселенной, древнегреческие астрономы рассматривали Землю как шар, находящийся в центре небесной сферы, которая равномерно вращается около своей оси.

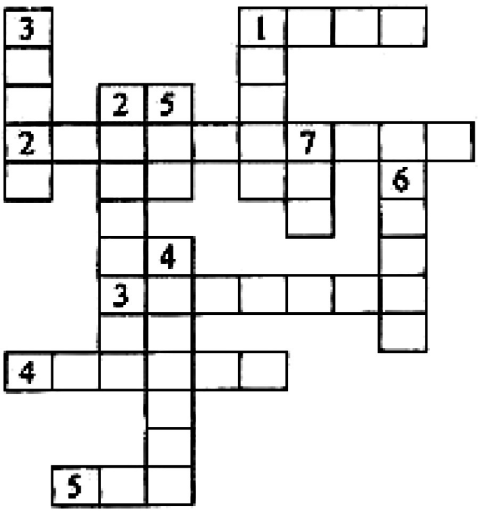
При изучении закономерностей движения светил возникли многочисленные математические задачи, связанные со свойствами сферы и фигур, которые образуют на ней большие окружности.

Автором первого капитального сочинения о «сферике» — так называли сферическую геометрию древние греки — был, по-видимому, математик и астроном Евдокс Книдский (ок. 408-355 гг. до н.э.). Но самым значительным произведением была «Сферика» Менелая Александрийского, греческого учёного, жившего в I в., который обобщил результаты своих предшественников и получил большое количество новых результатов. Построена его книга аналогично «Началам» Евклида, и долгое время она служила учебником для астрономов. В IX–XIII вв. «Сферика», переведённая на арабский язык, внимательно изучалась математиками Ближнего и Среднего Востока, откуда в XII в., в переводе с арабского, стала известна в Европе.

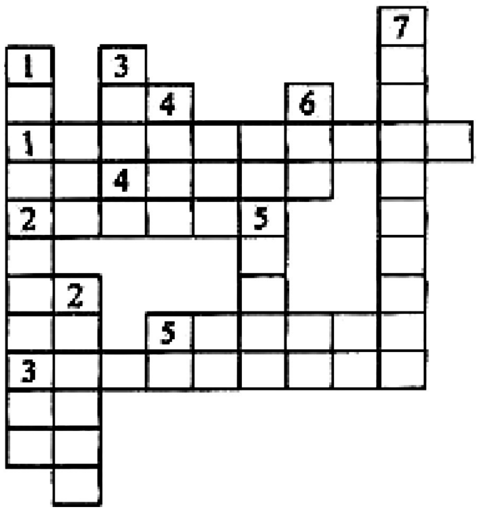
Сферическая геометрия нужна не только астрономам, штурманам морских кораблей, самолётов, космических кораблей, которые по звёздам определяют свои координаты, но и строителям шахт, метрополитенов, тоннелей, а также при геодезических съёмках больших территорий поверхности Земли, когда становится необходимым учитывать её шарообразность.

Текст задачи № 4. Познакомившись с таким понятием, как «Сферика», и рассмотрев тела вращения, изучаемые в сферике, с целью дальнейшего углубления знаний вашему вниманию предлагается кроссворд, который поможет лучше изучить данную тему:

Кроссворд 1



Кроссворд 2



Вопросы к кроссворду — 1

По горизонтали. 1. Фигура на плоскости, все точки которой расположены не далее данного расстояния от одной точки. 2. Прямая, при вращении которой вокруг оси образуется боковая поверхность цилиндра, конуса. 3. Тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. 4. Угол между высотой и плоскостью основания конуса. 5. Тело, полученное вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его.

По вертикали. 1. Тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. 2. Плоская фигура, при вращении которой образуется усечённый конус. 3. Тело вращения, являющееся верхней частью архитектурного сооружения. 4. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара. 5. Тело, полученное вращением полукруга вокруг его диаметра. 6. Фигура, полученная вращением полуокружности вокруг её диаметра. 7. Тело вращения, об устойчивости движения которого написана известная работа великой русской женщины-математика.

Вопросы к кроссворду — 2

По горизонтали. 1. Фигура, полученная вращением параболы вокруг её оси. 2. Отрезок, соединяющий центр сферы с любой её точкой. 3. Круг, являющийся элементом конуса, плоскость которого перпендикулярна оси конуса. 4. Музыкальный инструмент, часть которого напоминает псевдосферу Лобачевского. 5. Отрезок, соединяющий две точки окружности.

По вертикали. 1. Фигура, полученная вращением гиперболы вокруг её оси. 2. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. 3. Тело, полученное вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его. 4. Тело, полученное вращением полукруга вокруг его диаметра. 5. Фигура, полученная вращением полуокружности вокруг её диаметра. 6. Тело вращения, принцип движения которого описала великая русская женщина-математик. 7. Фигура, полученная вращением эллипса вокруг её оси.

Методический комментарий

Цель данной работы: познакомить учеников с интереснейшим геометрическим материалом, совершить экскурсию в историю древнего мира, подготовив тем самым учащихся к восприятию темы «Тела вращения». Предлагаемый материал знакомит учащихся с новым разделом математики «Сферическая геометрия», о существовании которой школьники до этого и не подозревали. Рассматриваемые теоремы и задачи составляют часть того, что им известно об истории развития математики. Ведь сферическая тригонометрия возникла значительно раньше плоской тригонометрии при решении задач сферической астрономии. Свойства прямоугольных сферических треугольников и различные случаи их решения были известны ещё древнегреческим учёным Менелаю, Птолемею и арабскому учёному Насиреддину Туси. Учащимся будет интересно работать над данной темой, так как это поможет им по-новому взглянуть на математику.

Предложенный кроссворд о телах вращения расширяет кругозор школьников, повышает интерес к предмету. Учащимся продвинутого уровня предоставляется возможность познакомиться с другими существующими источниками по этой теме, а также реализовать собранный материал в проектной деятельности. В ходе работы можно порекомендовать направляемый учителем выбор ключевых слов для информационного поиска. Слова «тела вращения», «сферика», «Эйлер Леонард», «А. Жирар», «сферический треугольник», «сферическая геометрия» — ключевые для решения данных задач. С их помощью можно отыскать достаточно много информации и, проанализировав её, ответить на поставленные вопросы, сделать выводы.