**Константин Лунгу,** профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Московского государственного открытого университета

# МОДЕРНИЗАЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В статье предлагается механизм обновления структуры математического содержания образования студентов нематематических специальностей, основанный на концепции фундирования, выдвинутой в 2000 году В.Д. Шадриковым. Фундирование состоит в обобщении и углублении школьных базовых элементов (знаний, умений, навыков, методов деятельности) до уровня, необходимого для высшей школы.

Школьные знания должны выступать структурообразующим фактором, позволяющим получить теоретические математические знания более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания. Педагогическая теория фундирования в математическом образовании учителя разработана В.Д. Шадриковым, В.В. Афанасьевым, Е.И. Смирновым. Основы концепции фундирования изложены в учебном пособии[1]. В статье использованы понятия этой книги, которые адаптированы к рассматриваемой ситуации.

Фундирование — это процесс становления личности специалиста, который опирается на поэтапное расширение и углубление качеств личности студента, необходимое и достаточное для теоретического обобщения школьного образования, развивающего мышление, личностные и профессиональные качества будущего специалиста. Фундирование осуществляется на основе создания механизмов и условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для актуализации и интеграции базовых учебных предметов общего образования и вузовских знаний (видов деятельности).

Фундирование как механизм и метод формирования нового качества профессиональных компетентностей будущего инженера характеризуется следующим компонентным составом (для учителей математики аналогичный состав сформулирован в[2]:

- ✦ Освоение современных областей науки на основе выявления генезиса базовых учебных элементов и способов деятельности от истоков до настоящего (требуемого) состояния.
- ✦ Преемственность содержательных линий школьного и вузовского математического образования и вариативность способов решения педагогических и учебных задач на уровне междисциплинарных взаимодействий.
- ✦ Создание механизмов и условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для развития креативности, поиско-

[1] *Буракова В.Ю., Соловьёв А.Ф., Смирнов Е.И.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика. Ярославль, 2002.

[2] *Лунгу К.Н.* Применение таблиц Гаусса в курсе линейной алгебры.: Сборник тезисов докладов участников II региональной научно-практической конференции «Профессиональная ориентация и методика преподавания в системе школа-вуз». М.: МИРЭА, 2001. С. 100–103.

вой, исследовательской и творческой активности студентов в решении учебных и профессионально-ориентированных задач.

В процессе фундирования используются новые педагогические технологии, позволяющие «уплотнять» учебный материал, не уменьшая его объёма, и уменьшить количество времени на его изучение. Увеличить «плотность» единицы учебного процесса позволяют технологии укрупнения дидактических единиц (П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев); метод проектов, интегральная технология (В.В. Гузеев); проблемно-модульное обучение (М.А. Чошанов); концентрированное обучение (Г.И. Ибрагимов, А.А. Остапенко).

Обратимся к процедуре фундирования конкретного школьного учебного элемента «линейное уравнение». Исходный элемент — уравнение ax=b и его решение $x=a^{-1}b$. Непосредственным обобщением этого элемента является система из двух уравнений с двумя неизвестными, представляющая также школьный элемент

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1. \end{cases}$$

Эта система решается методом подстановки или методом арифметических действий. Для фундирования (углубления, фундаментализации) целесообразно использовать метод (школьные умения) арифметических действий, поскольку трудно вообразить, как можно реализовать подстановку в системах больших размеров.

*Примечание*. В некоторых пособиях и учебниках по линейному программированию основные правила работы с симплексными таблицами основаны на рассуждениях, связанных именно с идеей подстановки, которая здесь отвергается (хотя допустима).

Конечным состоянием вузовского обобщения должно быть система из m уравнений с n неизвестными, которую по аналогии с исходным элементом нужно представить в виде уравнения AX=B (A — матрица, X, B — матрицы-столбцы).

Следуя общепринятому, стандартному, академическому подходу, соответствующий материал вузовской линейной алгебры (независимо от направления и специальности) структурирован почти единообразно. Например, в учебнике для технических специальностей имеем такую последовательность тем:

1. Линейные преобразования. Матрица.
2. Общие определения, связанные с понятием матрицы.
3. Обратное преобразование.
4. Действия над матрицами. Сложение матриц.
5. Преобразования вектора в другой вектор с помощью матрицы.
6. Обратная матрица.
7. Нахождение матрицы, обратной данной.
8. Матричная запись системы уравнений.

В учебнике для экономических специальностей:

1. Основные сведения о матрицах.
2. Операции над матрицами.
3. Определители квадратных матриц.
4. Свойства определителей.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы.
7. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения.
8. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера.
8. Метод Гаусса.
9. Система m линейных уравнений с n переменными.
10. Система линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

В наши дни нужна супермотивация студента нематематической специальности для того, чтобы он ждал 10–12 академических часов до тех пор, пока ему скажут, каким образом можно или нужно решить систему линейных уравнений с многими неизвестными (основная цель этого раздела состоит в том, чтобы студент овладел методами решения линейных систем, а не владение методами оперирования с матрицами).

Авторская методика решения линейных систем и связанная с ними технология обучения, основанная на концепции «фундирования, наглядности и понимания», состоит в том, чтобы закрепить навык «арифметических действий» студента для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными и формировать умение решить любую систему, а также интерпретировать её решение, а не ломать этот навык «матрицами». Основой обобщения и переноса метода должно быть школьное знание, иначе зачем нужно в школе научиться решать уравнения и системы, если в вузе это не используется?

Научный и методический анализ трёх методов решения линейных систем — метод Гаусса, метод Крамера и матричный — показывает, что все они могут быть выведены из метода Жордана-Гаусса и реализованы в таблице Гаусса. Между тем исходный, классический метод Гаусса приведения системы к ступенчатому виду (состоящий из двух этапов: прямой ход и обратный ход) в учебниках сохраняется до сих пор, что говорит об «устойчивости» традиционной математики (хотя и трудоёмкой).

Таким образом, наша концепция фундирования школьных математических элементов (знаний, умений, навыков, математических методов) предполагает развёртывание в учебном процессе следующей структуры рассматриваемого раздела. Ниже перечислим все понятия и термины (тезаурус), которые используются в учебном отрезке в четырёх лекциях (Л).

**Л1**. Системы линейных уравнений. Линейное уравнение со многими переменными (неизвестными). Решение уравнения. Линейная система, решение линейной системы. Эквивалентные преобразования, формулы Жордана-Гаусса. Метод Гаусса, приведение к единичным столбцам, неявное общее решение, параметризация, общее решение в параметрической форме, частные решения. Однородные системы, фундаментальные решения, структура общего решения.

**Л2**. Метод Крамера. Понятие определителя, вычисление определителей второго, третьего, произвольного порядка, минор, алгебраическое дополнение. Свойства определителей, вынесение множителя из данной линии, свойство о линейной комбинации линий. Метод Крамера решения линейных систем, сведение к методу Гаусса.

**Л3**. Матричный метод. Понятие матрицы, виды матриц, равенство матриц, линейные действия с матрицами. Умножение матриц, линейная система, матричное уравнение, обратная матрица, вырожденная матрица. Матричный метод решения линейных систем, сведение к методу Гаусса. Ранг матрицы и ранг линейной системы, теорема Кронекера-Капелли.

**Л4**. Линейные преобразования векторов. Понятие арифметического вектора, линейные действия с векторами, линейно зависимые и независимые системы векторов, базис, разложение по базису, переход к другому базису. Линейные преобразования векторов, матричная запись линейного преобразования. Собственный вектор, собственные числа, приведение матрицы к диагональному виду. Скалярное произведение векторов, ортогональные системы векторов, приведение системы векторов к ортогональному базису.

После каждой лекции следует практическое занятие.

Все три метода, о которых идёт речь, могут быть реализованы в таблице Гаусса и практически выражают метод Жордана-Гаусса. Поэтому автор в течение многих лет пропагандирует применение таблицы Гаусса[3] как универсальной технологии решения линейных систем. Единственная сложность (скорее, неудобство) применения — определение собственных чисел, поскольку вычислять определитель, содержащий параметр в таблице Гаусса, нецелесообразно из-за трудоёмкости.

Все операции (элементарные преобразования) легко формализовать и выражать в обобщённой (буквенной) форме. Вместе с тем ниже рассматривается конкретный пример, показывающий, что каждый из трёх методов решения квадратной системы получается фундированием школьного метода решения линейной системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Система из трёх уравнений с тремя неизвестными наиболее типична для понимания любых ситуаций, поэтому рассматриваем именно такую систему.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Первый блок таблицы Гаусса этой системы имеет вид

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | своб. чл. |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 7 |
| 3 | − 5 | 3 | 0 |
| 1 | − 5 | 3 | − 1 |

Вот последний, четвёртый блок системы, приведённой к единичным столбцам (единичный столбец состоит из нулей и одной единицы; вычисления представляют метод арифметических действий, которые можно автоматизировать при помощи формул Жордана-Гаусса[4]):

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | своб. чл. |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

Эти четыре блока составляют метод Жордана-Гаусса: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Если в элементарных преобразованиях деление уравнения на число не допускать, то соответствующий последний блок таблицы Гаусса будет таким:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | своб. чл. |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | −19/2 | 0 | −19/2 |
| 2 | 0 | 51/19 | 51/19 |

Здесь произведение диагональных коэффициентов представляют определитель системы ($\Delta = -51$), а свободные члены — это соответствующие определители при неизвестных. Таким образом, этот блок, после построчного домножения на — 51/2, 51/19, 19, соответственно, выражает содержание теоремы (правила, формулы) Крамера $x_j = \Delta_j / \Delta$.

Для получения метода обратной матрицы составим расширенную таблицу Гаусса, получаемую присоединением справа к основной таблице единичной матрицы, и левую часть приводим к единичным столбцам. Тогда

[3] *Лунгу К.Н.* Применение таблиц Гаусса в курсе линейной алгебры: Сборник тезисов докладов участников II региональной научно-практической конференции «Профессиональная ориентация и методика преподавания в системе школа-вуз». М.: МИРЭА, 2001. С. 100–103.

[4] *Лунгу К.Н., Макаров Е.В.* Высшая математика: Руководство к решению задач. М.: Физматлит, 2004.

в правой части получим обратную матрицу для матрицы системы.

Первый блок расширенной таблицы выглядит следующим образом (новые переменные введены для полноты таблицы, как запись линейного преобразования векторов, о чём идёт речь в Л4):

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | св. чл. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2<br>3<br>1 | 3<br>–5<br>–5 | 2<br>2<br>3 | 7<br>0<br>–1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 |

а последний блок таблицы содержит обратную матрицу $A^{-1}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | св. чл. | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1<br>1<br>1 | 5/51<br>7/51<br>10/51 | 19/51<br>–4/51<br>16/51 | – 16/51<br>– 2/51<br>19/51 |

Для получения решения X необходимо выполнить одно умножение: $X=A^{-1}B$. (B — столбец свободных членов). Таким образом, в таблице Гаусса получены все три метода решения линейной системы, что подтверждает процессуальную связь методов Гаусса, Крамера и обратной матрицы (наш опрос показал, что 80% преподавателей не знают о такой связи), а экономия времени — очевидна.

Блоки таблицы Гаусса можно заменить матрицами, но тогда теряется визуальное единство, целостность процесса решения. Таблица технологична, удобна, наглядна ввиду вертикального расположения информации (глазам удобнее). К тому же сбоку от таблицы можно указать выполняемые действия или дополнительный контрольный столбец.

В таблице можно выполнять работу, относящуюся к преобразованию координат векторов, разложение или переразложение вектора по данной системе, не обязательно составлять для этого системы уравнений. Умение читать таблицу экономит временя и место.

В нашей структуре предусмотрена возможность использовать сэкономленное временя для решения задач с практическим содержанием, на построение алгебраических моделей конкретных задач и последующее их решение любым методом. Традиционная структура насыщена большим числом действий по обработке текущего материала (отчасти ненужного) и не позволяет рассматривать практические задачи, к тому же они и не предусматривались программой. Приведём конкретные задачи, которые можно решить уже на втором практическом занятии.

1. Обувная фабрика специализируется на выпуске трёх видов обуви: сапоги, ботинки, кроссовки. Нормы использования трёх видов сырья С1, С2, С3 в течение рабочего дня и нормы расхода сырья на одну пару обуви приведены в таблице.

| Вид сырья | Нормы расхода сырья на одну пару (усл. ед) | | | Расход сырья на 1 день (у.е.) |
|---|---|---|---|---|
| | Сапоги | Ботинки | Кроссовки | |
| С1 | 7 | 3 | 5 | 4700 |
| С2 | 3 | 2 | 3 | 2500 |
| С3 | 4 | 3 | 2 | 2600 |

Определить ежедневный объём выпуска каждого вида обуви.

Следующая задача линейного программирования выполняет пропедевтическую и мотивационную функции. С одной стороны её математическая модель содержит неравенства и не может быть решена с помощью рассматриваемых методов (пропедевтика), а значит, необходимо создавать аппарат решения таких задач (мотивация).

2. С двух заводов поставляются в двух городах, потребности которых соответственно равны 50 и 110 машин. Первый завод выпустил 60 и 100 машин, а второй — 50 и 110 машин. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждый город и они показаны в таблице.

| Завод | Затраты на перевозку в город (денежные единицы) | |
|---|---|---|
| | Город 1 | Город 2 |
| 1 | 10 | 15 |
| 2 | 14 | 20 |
| С3 | 4 | 3 |

Минимальные затраты на перевозку равны 1600 ден. ед. Определить оптимальный план перевозок машин.

3. Система уравнений представляет собой математическую модель некоторой сюжетной задачи. Модель выражает её абстракцию. Для записи системы из m уравнений с n неизвестными необходимо использовать mn числовых или буквенных символов. Используя «многоточие, можно записать системы, ограничиваясь 12 символами.

Существенную экономию можно получить, осуществляя абстракцию очередного уровня. Эта абстракция приводит к понятию вектора — набор коэффициентов системы при одной неизвестной. Принимая

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

систему уравнений можно представить в векторной форме

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B.$$

Следующий уровень обобщения будет достигнут при помощи понятия матрицы как специфическом математическом объекте. На этом уровне абстракции модель задачи имеет вид AX=B. На очередном уровне абстракции объект предыдущего уровня становится элементом следующего, но при этом свойства объекта могут не переноситься на элемент, а свойства элемента не обязательно сохранятся. Другими словами, абстрагирование может не соблюдать преемственность. Например, если последнее уравнение называют векторным, то не обязательно, что над этими векторами можно выполнить обычные арифметические действия.

Между тем понятие вектора в нашей системе занимает место после понятия матрицы, поэтому структура основана не только на принципе обобщения, но и на принципе интеграции. Казалось бы, что можно говорить о том, что вектор есть частный случай матрицы (вектор — это матрица-столбец). Но в таком случае должны сохраняться свойства объектов, в частности, произведения матриц и векторов должны определяться одинаково, чего на самом деле не происходит. Поэтому понятие вектора необходимо ввести отдельно, индивидуально, независимо от матрицы.

Представление системы уравнений в векторном виде позволяет разработать механизм для приближённого решения неразрешённых (переопределённых) линейных систем (в случае, когда число уравнений больше числа неизвестных). Речь идёт о методе проектирования, о котором объём статьи не позволяет говорить.

4. Механизм фундирования (фундаментализации, теоретического обобщения) как использование, обобщение и углубление школьных учебных элементов мы применяем на протяжении многих лет. Он помогает в усвоении нового материала практически всех разделов высшей математики. Приведём лишь один пример, относящийся к понятию предела функции. Вычисление пределов сводится к преобразованию выражений, в чём школьники накопили большой опыт. Этот опыт практически ломается и отбрасывается самим определением предела:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = $$
$$= \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Поэтому вместо того, чтобы тратить огромные усилия на усвоение определения предела, затем попытаться как-то обратиться (почти безуспешно) к опыту учащихся, который уже потерян или забыт, лучше исходить из их опыта преобразования выражений и приходить к методам вычисления пределов, а в этом процессе приблизиться к пониманию соответствующего определения. Например, преобразование

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 12}{x^2 - 16} = \frac{(x-4)(x^2+3)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2+3}{x+4}, \ x \neq 4,$$

которое легко может быть выполнено школьниками, является основанием говорить ещё в школе о пределе исходного выражения (функции) при x → 4, неопределённого при x = 4. Термин «предел» фиксирует тот факт, что при значениях x, близких к 4, значения данного выражения (на самом деле полученного после сокращения) близки к числу 19/8, и записываем

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 12}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2+3}{x+4} = \frac{19}{8}.$$

Если же x → –4, то и в исходной, и в конечной дроби получаем 9/0 и эту символическую дробь (и все аналогичные дроби с ненулевым числителем 1/0, — 100/0, 0,0001/0 и т.д.) обозначим ∞:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 12}{x^2 - 16} = \lim_{x \to -4} \frac{x^2+3}{x+4} = \infty.$$

Таким образом, можно ввести понятие предела функции как необходимость раскрыть неопределённость вида 0 : 0.

Вычисление значения выражения

$$f(x) = \frac{10}{x^2 - 25} - \frac{1}{x - 5}$$

при x → 5 приводит к необходимости раскрыть неопределённость вида ∞ — ∞. (то, что в примере фигурирует эта неопределённость, подтверждается тем, что дроби при x, близких к 5, принимают значения одинакового знака).

Аналогичную ситуацию неопределённости вида ∞ — ∞ имеем в случае

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 25}$$

при x → +∞. В этом случае необходимо использовать преобразования с иррациональными выражениями.

После каждого примера можно проверять, что «разность между значением функции и её пределом становится сколь угодно малой при значениях x достаточно близких к его предельному значению». Это почти точное определение предела функции.

Ситуацию неопределённости вида $0 \times \infty$ имеем в

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\cdot \sin\pi x$$

при $x \to 1$. Раскрыть неопределённости при этом элементарными средствами невозможно, нужен новый способ исследования таких функций.

Так мы используем при выборе и организации структуры содержания обучения математике в техвузе механизм фундирования. В данной теме (вычисление пределов) он приводит к отдельным фреймам, имена которых выражают вид неопределённости. Из системы фреймов складываем учебные модули как дидактические единицы, фигурирующие в структуре тем, разделов и т.д. Под фреймом (англ. frame — каркас, рама; термин, введённый М. Минским[5]) мы подразумеваем повторяющийся способ организации учебного материала и учебного времени. В один фрейм могут входить несколько слотов, например, как отдельные приёмы раскрытия одного вида неопределённости (слот сокращения дроби, слот преобразования суммы в произведение, слот вынесения за скобки старшей степени и т.п.).

Для функций, не допускающих сокращение (как в последнем примере), нужны специальные методы раскрытия неопределённости, а тогда и вычисления пределов. К таким методам относятся, например, формулы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Если традиционно первая формула устанавливается наглядными средствами, то остальные основаны на абстрактных формулах и суждениях. Вместе с тем разработанный автором аппарат выпуклых (гладких) функций, позволяет получить каждую из этих формул и много других, используя наглядность и визуальность[6]. Для произвольной функции f(x) строится разностное отношение

$$F(x,t)=\frac{f(x)-f(t)}{x-t},\ \ F(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x},$$

выражающее угловой коэффициент хорды, соединяющей точки (x, f(x)) и (t, f(t)). Второе отношение — это угловой коэффициент секущей, хорды, проходящей через начало координат (0, 0). С одной стороны, при $x \to 0$ это отношение стремится к угловому коэффициенту касательной к графику соответствующей функции в точке (0, 0), т.е. предел разностного отношения существует. С другой стороны, значение углового коэффициента легко найти, исходя из наглядных, геометрических соображений.

Например, функции $e^x$ и ln *x* являются взаимно обратными, а тогда их графики симметричны относительно прямой y=x (биссектрисы первой четверти). Тогда в симметричных точках графиков их касательные тоже взаимно симметричны. Следовательно, каса-

[5] *Минский М.* Фреймы для представления знаний. М.: Энергия, 1979;// Школьные технологии. 2005. № 1. С. 140–142.

[6] *Лунгу К.Н.* Число π и первый замечательный предел. Длина окружности. Тригонометрические функции // Новые технологии. 2007. № 5, С. 47–53.

тельная к первому графику точке (0, 1) и касательная ко второму графику в точке (0, 1) параллельны биссектрисе y=x, что подтверждает справедливость последних двух формул.

Справедливость первых двух формул вытекает из определений числа «π» и числа «e»[7].

Таким образом, концепция фундирования позволяет использовать наглядность математических объектов, процесс моделирования, приводящий к адекватности их восприятия, достижения психологии и нейро-физиологии, связанные с развитием личности.

Приведённые идеи составляют основу инновационной технологии фреймового обучения, основные признаки которой — уплотнение учебного материала, уменьшение времени на его изучение, использование и развитие всех школьных математических знаний, умений, навыков и методов, понимание математики как учебного предмета, и науку.

---

7 *Минский М.* Фреймы для представления знаний. М.: Энергия, 1979; // Школьные технологии., 2005. № 1. С. 140–142..