Константин Никитович Лунгу, профессор Московского государственного открытого университета

ФОРМИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МЫШЛЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Система знаний представляет собой сложную самоорганизующуюся систему, в которой даже один новый факт может вызвать значительные подвижки в привычной структуре представлений. Уже Аристотель интуитивно понимал *нелинейный характер* накопления знаний: «Каждый мало что добавляет к истине, но, когда всё складывается, получается заметная величина».

В последние десятилетия активно развивается неклассическое направление в философии познания — *нелинейная диалектика*. Оно связано с понятием нелинейности в науке, с полученными в естественных науках и социальных исследованиях результатами. «Вторым принципом когнитивной диалектики является принцип нелинейности. Подобно классической диалектике данный принцип выражает видение мира. Но в отличие от неё принцип нелинейности указывает на новое современное видение мира, связанное с нелинейностью, синергетикой, компьютеризацией, с развитием всей современной науки как естественной, так и гуманитарной, и технической»[1].

Нелинейное мышление более гибко, поскольку оно допускает и даже предполагает вариантность решения рассматриваемой проблемы, вариантность истины, нарушение принципа суперпозиции, характерного для линейного мышления, когда результат одного из воздействий на систему при наличии другого воздействия оказывается не таким, каким он был бы при отсутствии последнего.

Таким образом, складывается новый перспективный стиль мышления, поскольку материальные процессы по своей сущности нелинейны. Формируется новая философская категориальная сетка, категориальная структура путём либо повышения статуса общенаучных категорий, либо формирования новых, либо изменения статуса прежних философских понятий. В качестве примера можно назвать категорию случайности, статус которой в системе категорий нелинейной диалектики становится равным с категорией необходимости, или понятие хаоса, которое начинает играть роль философской категории в познании...

Важная категория нелинейной диалектики — кооперация, которая тесно связана с развитием образования, с получением знаний в различных областях наук, в том числе и в математике. Категория кооперации шире по своему содержанию понятия синтеза.

---

[1] *Уваров А.И.* Философские проблемы образования //Философские проблемы образования. М.: РАГС, 1996. С. 235–238.

И синтез, и анализ — стороны кооперации. Кооперация в современном познании начинает занимать исключительное место, тем самым она накладывает отпечаток на философском методе, современной гносеологии и методологии.

Фундаментальность и приоритетность кооперации по сравнению с категориями анализа и синтеза, её когнитивная эффективность связаны с такими её признаками, как:

1) иерархичность (кооперация направлена на создание структур разного уровня);

2) исходным началом кооперации служит хаос, который исключает линейность, упрощённый, прямолинейный подход;

3) неоднозначность при решении обратной задачи, когда в отличие от синтеза не обязательно можно получить те же самые исходные данные, так как исходной точкой был хаос.

Последнее положение как раз свидетельствует о том, что при кооперации повышается уровень системы, который препятствует простому возвращению назад этой системы, этой новой организации. Тем самым кооперация как бы включает в когнитивный процесс время, способность появления принципиально нового, неповторимого. Существует достаточно эффективный адекватный математический аппарат, позволяющий исследовать нелинейные задачи. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения позволили описать и получить важнейшие результаты большого класса задач типа «хищник — жертва». Г. Хакен описывает в своей книге «Синергетика» большое число экспериментов из различных областях науки, которые можно объяснить только кооперативными эффектами, описываемыми нелинейными моделями.

Идеи А. Пуанкаре, А.А. Ляпунова, А.Н. Колмогорова позволили создать математическую теорию катастроф, которая позволяет описывать скачкообразные изменения, возникающие в процессах, определяемых непрерывными условиями, и их исследование невозможно при помощи аппарата обычного дифференциального исчисления. Метод клеточных автоматов позволил моделировать явление само-организованной критичности и математически решить старую философскую проблему о том, «начиная с какого количества зёрен возникает куча». Метод обратной задачи рассеяния позволил решить класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное дифференциальное уравнение Шрёдингера позволяет описывать явления из различных областей физики и других наук, причём при решении этих уравнений неприменим принцип суперпозиции решений, который характерен для случая линейных дифференциальных уравнений. Частными решениями нелинейных уравнений являются уединённые волны — солитоны, которые никогда не возникают при решении классических линейных волновых уравнений.

Современные исследователи настаивают на необходимости формирования новой методологии, основанной на нелинейных методах исследования, на «нелинейном (синергетическом) мышлении». Синергетика (греч. synergetikos — совместный, согласованно действующий) — научное направление, изучающее связи между элементами структуры (подсистемами), которые образуются в открытых системах (биологических, физико-химических, экономических, социальных и др.) благодаря интенсивному (потоковому) обмену веществами и энергией с окружающей средой в неравновесных условиях; в таких системах наблюдается согласованное поведение подсистем, в результате чего возрастает степень её упорядоченности, т.е. уменьшается энтропия.

Идеи многовариантности, недетерминированности процессов, результатов породили также и различные варианты логик. Это конструктивная логика, в которой в отличие от классической логики утверждение подвергается конструктивной проверке путём наблюдения[2]. Релевантная логика, в которой формально правильные, но «неуместные» логические построения «отбраковываются», что позволяет избежать заведомо неверных выводов[3]. Нечёткая логика, в которой вместо однозначных ответов «да» или «нет» используются вероятностные суждения: с вероятностью p — «да» и с вероятностью $1 - p$ — «нет». При этом каждый объект или суждение в нечёткой логике рассматриваются как ансамбль сходных объектов или суждений.

Математические разделы и методы, о которых идёт речь, так или иначе связаны с математическим моделированием, в котором кооперируются и математические методы, и специальные знания, и методы, использующие современную вычислительную технику. Поэтому математическое моделирование стало обсуждаться как имеющее философское, а точнее гносеологическое значение. Так как кооперация свойственна математическому моделированию по определению, то при чтении такой дисциплины в вузе нужно решить проблему межпредметных связей.

Важной чертой математического моделирования как метода познания является конструктивизм. Конструирование математических моделей (как рассмотрение различных вариантов реконструкции реальных явлений, так и создание неких фантастических систем) и использование электронной вычислительной техники представляют собой две важнейшие составляющие методов математического моделирования. Математическое моделирование применяется в самых различных, казалось бы, неформализуемых объектах и областях науки — истории, биологии, экологии, социологии, праве, криминалистике.

Проблема исследования и развития нового философского метода — нелинейной диалектики рассматривается различными авторами. Так, например, И.К. Кудрявцев и С.А. Лебедев[4] пишут: «Линейный подход можно охарактеризовать как научную основу индустриального общества. Следствием его была попытка организовать как производство, так и общество как идеально функциональную машину (наглядным примером может служить американская Конституция)». Но... «по мере развития как науки, так и промышленности всё больше росло осознание того, какую роль играют нелинейные явления, характерными чертами которых являются пороговость, насыщение, наличие обратных связей... Пришло понимание того, что все реальные системы нелинейные и могут считаться линейными лишь приближённо».

Как подчёркивает Г.И. Рузавин, настало время всерьёз заговорить о новой форме диалектики, которую с известным основанием можно назвать неклассической, опирающейся

---

[2] *Новиков П.С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.

[3] *Сидоренко Е.Л.* Релевантная логика. М.: Институт философии, 2000.

[4] *Кудрявцев И.К., Лебедев С.А.* Синергетика как парадигма нелинейности //Вопросы философии. 2002, № 12.

на достижения современной, неклассической науки, а согласно Д.С. Чернавскму, современная синергетика является математической основой диалектического материализма. И.К. Кудрявцев и С.А. Лебедев считают, что нелинейный образ мышления должен быть характерен для современного постиндустриального общества. Научной дисциплиной, вобравшей в себя основные черты нелинейного подхода, основные его методы, ставшей его парадигмой в мировоззренческом плане, является синергетика.

Особенности линейного представления о мире в качестве упрощённых допущений удобны при научном исследовании и техническом воплощении научных идей. Если считать эти допущения истинными, очень легко поверить во всемогущество науки, человека и человечества.

Вместе с тем ограниченность таких представлений ежедневно подтверждается наблюдениями над реальной жизнью, хотя эти представления достаточно жизнестойки. Линейным и однозначным представлениям о природных процессах нелинейная наука противопоставляет гораздо более сложные и неоднозначные представления, требующие в каждом конкретном случае тщательного исследования сомнений и размышлений. Простым и ясным постулатам линейного мышления противопоставляются «нелинейные» возражения, к которым Г.Ю. Ризниченко[5] относит такие.

1) Все процессы в живой природе и большинство процессов в неживой природе описываются нелинейными уравнениями. Это связано с тем, что живые системы — открытые по веществу и энергии и удалены от термодинамического равновесия (процессы роста популяции в зависимости от условий могут приводить к стабилизации численности, к регулярным колебаниям или даже квазистохастическим вспышкам численности).

2) Характер стационарного режима в нелинейной системе зависит от типа нелинейности, от параметров системы и её окружения, от начальных условий.

3) Устойчивость решения системы по отношению к малым отклонениям не является общим свойством. В нелинейных системах и в параметрическом и в фазовом пространствах есть области, где система становится чрезвычайно чувствительной к флуктуациям и малым внешним воздействиям. В параметрическом пространстве это бифуркационные границы, по разные стороны которых система имеет качественно различный характер поведения. В фазовом пространстве это сепаратрисы, границы, отделяющие области влияния тех или иных аттракторов.

4) В нелинейных системах однозначная идентификация параметров, как правило, невозможна. Это обстоятельство сильно ограничивает возможности классической науки, содержание которой представляет собой установление природных закономерностей по наблюденным экспериментальным данным.

5) В нелинейных системах принцип «узкого места» не всегда справедлив. Общие принципы управления нелинейными системами, в отличие от линейных систем, пока не найдены.

Кооперация включает в когнитивный процесс время, способность проявления при-

---

[5] *Ризниченко Г.Ю.* Нелинейное естественно-научное мышление // Сборник научных трудов VI Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Ч. 1. М.: Прогресс-Традиция, 1998. Ч 1. С. 110–117.

нципиально нового, неповторимого. В этом плане немалый интерес представляют те математические методы, которые играют важную роль в формировании научной парадигмы на современном этапе обучения человека и его развития. Здесь приводим несколько принципиально важных педагогических примеров, дополняющих те, что приведены в материалах,[6] и имеющих естественно-научную и математическую направленность.

Эффекты нелинейности проявляются в классических объектах, в частности, в процессе сходимости ряда Фурье для стандартной, «контрольной» функции

$$\mathrm{signx} = |x|/x = \left[\begin{array}{l} -1,\ \ x < 0, \\ \ \ 0,\ \ x = 0, \\ \ \ 1,\ \ x > 0 \end{array}\right., \mathrm{x} \in [\,-\,\varpi, \varpi],$$

в окрестности точки разрыва x=0. Неожиданный эффект был назван Г.М. Фихтенгольцем[7] явлением Гиббса. Оно состоит в том, что ряд Фурье для функции signx (и для произвольной другой функции с характерной точкой разрыва) справа от точки разрыва стремится к величине, на 18% превышающей значение функции, равной 1, а слева к величине, на 18% ниже значения — 1. Это математически необъяснимое явление (с точки зрения роли ряда Фурье как средство и аппарат аппроксимации, приближения, поскольку вне фиксированной окрестности точки разрыва ряд Фурье сходится равномерно к своей функции) указывает на проявление нелинейности в окружающей действительности, в теории познания, в том числе и в теории аппроксимации.

В теории наилучших приближений рациональными функциями нелинейность становится большим препятствием для получения так называемых обратных теорем. Здесь суть эффекта нелинейности состоит в том, что сумма (разность) двух рациональных функций порядка n является рациональной функцией порядка $2n$.

Исследование характера особых точек для функций, заданных локально сходящимся степенным рядом, длится более ста лет, а окончательных результатов не получено. Единственный положительный, но весьма частный, результат в этом направлении принадлежит Фабри (1896), а исследований, посвящённых этой проблеме, — сотни. Препятствие — нелинейность, которая может быть преодолена только «кооперацией». По-видимому, нелинейность заложена во всех тех проблемах, решение которых продолжалось десятилетия или столетия (в том числе проблемы Ферма).

Современное естествознание приходит к выводу о неоднозначности и неустойчивости по отношению к начальным условиям как о естественном состоянии природных систем. Один из главных вопросов нелинейной динамики, или синергетики, как раз состоит в том, чтобы разработать методы изучения таких систем, критерии их упорядоченности. Разработка таких критериев означает, что невоспроизводимые явления также могут быть объектом научного исследования.

Добавим ещё, что к таким системам относятся экономические системы: они сложны, не равновесны и открыты; в них действуют прямые и обратные положительные и отрицательные связи; они погружены во внешнюю по

---

[6] *Михеев В.И., Лунгу К.Н.* Проблема формирования нелинейного мышления учащихся и студентов в эпоху информатизации //Вестник Российского университета дружбы народов. 2005. № 10. С. 79–85.

[7] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1963.

отношению к ним социальную среду и постоянно испытывают влияние внешних факторов. Функционирование подобных систем описывается с помощью нелинейных уравнений, что указывает на множественность реальных путей развития. Сложность экономических ситуаций также связана с их многопараметричностью. В связи с этим весьма актуально использование в учебном процессе студентов экономического профиля методов, позволяющих связать большое число параметров и переменных в единую целостную картину так, как это делается в теории катастроф. Эволюция рыночной экономики представляет собой смену состояний устойчивого развития, разделённых более или менее длительными периодами кризисов, т.е. нестабильности (хаоса) с последующими переходами к более упорядоченным состояниям, соответствующим стабильному развитию на более высоком уровне. Иерархия неустойчивых состояний порождает структурные изменения, исключая негативные эффекты линейной экономики (плановой), ведущей изолированную систему к застою. Одна из негативных особенностей последней является понятная с позиций информационно-синергетического подхода слабая чувствительность к такому мощному инструменту современного общества, каким является научно-технический прогресс.

Из вышеизложенного следует, что важную методологическую роль играет изучение в школе и вузе тех разделов математики, которые в какой-то мере формируют или способствуют формированию нелинейного мышления. В школе, по нашему мнению, это, прежде всего, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, а также уравнения и неравенства с параметрами. Эти темы представляют собой типичные примеры проявления «кооперации» при обучении математике в школе. Анализ решения уравнения или неравенства с параметром основан на использовании многих разделов математики.

В вузовской математике — это: теория множеств, отдельные темы в дифференциальном и интегральном исчислении, теории рядов, комбинаторика, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного.

Скажем отдельно несколько слов о такой теме, как «Комбинаторика». Большинство студентов при попытке решить комбинаторную задачу, сталкиваются со своеобразным «хаосом» и «сумбуром». На вопрос: «В чём состоит сложность при решении задач по комбинаторике?» ответ стандартный: «Нечем думать». Этот ответ можно расшифровывать как неумение на данном этапе оперировать понятиями, которых в комбинаторике немного: размещения, перестановки, сочетания (с повторениями и без), другими словами, подвести объект под понятие. В каждой задаче весьма сложно понять, о каком из комбинатороных понятий идёт речь. В этом и проявляется своеобразная нелинейность. К тому же формулы вычисления числа размещений, перестановок и сочетаний далеко не линейные. Поэтому методика решения комбинаторных задач должна основываться на эмпирическом мышлении, использовании индуктивных суждений, структуризации, классификации, обобщении, систематизации.

Учитывая «хаос», возникающий при решении комбинаторных задач, исходя из специализации студентов (экономические, технические или математические) мы выбираем определённую стратегию и технологию обучения: эмпирическую, моделирующую с преобладанием индуктивности и обобщения (экономические, гуманитарные специальности); конструктивную, технологическую с элементами строгости и правдоподобных рассуждений, здравого смысла (технические специальности); теоретическую, дедуктивную с восхождением от общего к частному (специальности прикладной математики).

Приведём некоторые примеры для первой стратегии, поскольку две другие представлены с той или иной степенью доступности в классических учебниках, в том числе и нашем пособии[8]. Заметим, что для мотивационного обеспечения студентов, особенно экономического направления, каждой задаче можно придать экономический аспект и вес.

Задача об освещении. В аудитории 6 люминисцентных ламп. Сколько существует способов освещения?

Примечание. Ясно, что эту задачу (и последующие), для усиления прикладного эффекта можно существенно обобщить (или осложнить), заменяя, например, аудиторию на стадион или на любой другой зал..

Задача о светофорах. На сложном перекрёстке (в Братееве) движение регулируется десятью светофорами. В какой-то момент механизм управления светофорами нарушился, и они могут независимо друг от друга и произвольно переключаясь, гореть одним светом — *К, Ж, З*. Сколько вариантов освещения может быть в тот или иной момент времени?

Задача о выходе из метро. В поезд метро на станции Красногвардейская вошли 1000 человек. Сколькими способами эти люди могут выйти из метро на протяжении всего маршрута, насчитывающего 19 остановок?

После формулирования каждой задачи студентам предлагается угадать искомое число и высказаться о подходе к её решению. За двадцать лет таких предложений правильных ответов и мнений не последовало.

Для решения первой задачи есть предпосылки хотя бы начинать рассуждать. Понимание условий задачи позволяет перечислять некоторые варианты освещения (для двух, трёх ламп). Можно практически реализовать конкретные варианты освещения в аудитории. Эмпирическим путём мы строим визуальные, хотя и абстрактные, модели освещения (ГГГГГГ — все горят), НННcomponents ННГГ — только какие-то две горят!). Индуктивно рассуждая (для одной лампы возможны два варианта — Г, Н; для двух — в два раза больше — ГГ, ГН, НГ, НН, для трёх — ещё в два раза больше, и т.д.), используя аналогию, обобщение, систематизацию, можно получить 2^6 способов освещения.

При переходе к решению второй задачи используется опыт предыдущей, который был зафиксирован специальным образом. После определённых раздумий (у некоторых достаточно длительных) срабатывает теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина, Н.Ф. Талызиной, перенос метода посредством мыслительных операций приводит к искомому ответу: 3^{10} вариантов.

При переходе к решению третьей задачи «хаос и сумбур» непреодолим и не позволяет высказать ни одной целесообразной мысли: все пассажиры могут выйти на одной станции — и этим завершается каждая попытка любого рассуждения. Так проявляется нелинейность в комбинаторике.

---

[8] *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 2 курс. М.: Айрис Пресс, 2004.

Самый низкий уровень кооперации состоит в том, чтобы преподаватель, управляя учебно-познавательной деятельностью студентов, при помощи системы вопросов навёл на поиск аналогии этой задачи с предыдущими. Аналогию можно выразить одним термином «состояние»: у лампы два состояния (Г, Н), у светофора три (К, Ж, З), у пассажира — девятнадцать: любой человек независимо от другого может выходить, предположительно, на одной из 19 станций — в этом состоит преодоление одной стороны нелинейности. У другого — столько же возможностей. Преодоление другой стороны нелинейности состоит в понимании того, что полученные варианты (19 для одного и 19 для другого) следует перемножать. Таким образом, во всех приведённых задачах есть два параметра — число состояний и число объектов. Это приводит к искомому ответу: 19^{1000}.

Эмпирическое обобщение позволяет формулировать соответствующее комбинаторное понятие «размещения с повторениями» или «отбор элементов данного множества с возвратом» и убедительно, с пониманием можно получить необходимую вычислительную формулу: m^n, где m — число объектов, n — «число состояний».

Таким образом, стратегия обучения комбинаторике студентов экономических специальностей состоит в выборе системы «именованных задач» (об освещении, о светофорах, о выходе из транспорта, о расписании, о поощрении, о распределении должностей, медалей, мест, о букетах, об обмене и т.д. и т.п.), в построении конкретных нематематических комбинаторных моделей, их структурировании, выводе расчётных формул, а затем в построении соответствующих абстрактных математических моделей, понятий (размещения, перестановки, сочетания, отбор элементов множества с возвратом или без возврата). В ясном смысле мы подтвердили идею А.М. Кушнира о возможности (частично!) обучения математике «нематематическими средствами», а уже математическими средствами необходимо получить максимальную эффективность развития мыслительных способностей как математических, так и общих. Таким образом, нелинейное мышление позволяет превратить известную педагогическую триаду «знания, умения, навыки» в кварту измеряемых педагогических категорий ЗУНП (знание, умение, навык, понимание) как тетраэдр с основанием ЗУН и вершиной П. Эта концепция по отношению к комбинаторике реализована автором в «Задачах по математике»[9].

Все вершины пирамиды можно диагностировать (измерять), если в системе тестов тактично предусмотреть систему вопросов «что», «как», «почему» и «откуда». Можно диагностировать уровни понимания: понятий, отношений между ними, приёмов деятельности, причинно-следственных связей.

Приведём только один пример задачи для стратегии, основанной на теоретическом мышлении, использующей также так называемые принципы сложения и умножения в комбинаторике. Здесь много больше нелинейных связей.

Задача о выборе команды или о расстановке «специалистов». На каждом борту лодки должны сидеть по пять человек (гребцы). Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если имеется 21 кан-

---

[9] *Лунгу К.Н., Макаров Е.В.* Задачи по математике. Руководство к решению задач. Ч. 2. М.: Физматлит, 2007.

дидат, причём восемь человек хотят сидеть на левом борту лодки, шесть — на правом, а для семи безразлично, где сидеть?

Объём статьи не позволяет сформулировать всё большое число задач, в которых проявляется нелинейность мышления. Таких задач много, но мы выделим здесь лишь две, которые имеют историческое значение. С первой из них знакомы все, кто закончил среднюю школу.

На вопрос «Что за число π» каждый ученик, каждый студент отвечает: π есть геометрическое число, поскольку, по определению Архимеда, оно равно отношению длины окружности к длине её диаметра. Убедительно!

Этим установлено наличие нелинейности в математике, восходящее к Архимеду (287–212 г. до н.э.) и относящееся к числу π. Более двух тысяч лет многие математики всего мира пытались решить проблему квадратуры круга, т.е. построения с помощью циркуля и линейки квадрата, площадь которого равна площади круга данного радиуса, желая доказывать «соизмеримость» длины окружности и её диаметра. Именно линейное мышление направляло людей на поиск методов вычисления π, связанных с вписанными и описанными многоугольниками. Найденные впоследствии связи числа π со значениями сумм рядов Фурье конкретных функций позволили найти сколь угодно точное рациональное значение π, но оставался разрыв между тем, что, с одной стороны, переход от градусной меры угла к радианной (абстрактной) мере основывалось на аксиоме «$180^0 = \pi$«, а с другой стороны, для π имеется только постулат Архимеда. Другими словами, не была обоснована связь градусной и абстрактной мер угла, поэтому на самом деле величина sinx не определена.

Только нелинейное мышление позволило обнаружить[10] связь числа π с угловым коэффициентом касательной к графику функции синус, проходящей через начало координат. При этом достаточно использовать только законное определение синуса для угла прямоугольного треугольника, измеряемого в градусах.

Примечание. О работе, опубликованной в 1984 г.[11], автор узнал только в 2007 году, поэтому, не претендуя на авторство обоснования числа π, мы здесь обсуждаем только внешнюю сторону проблемы — проявление нелинейного мышления С.И. Мироном, приведшее к возвращению символа π в числовую линию из геометрической, куда положил его Архимед.

В этом проявляются удивительные качества и свойства реального мира, выражающиеся в разнообразии его единств: дискретного и непрерывного, рационального, иррационального и трансцендентного, обучения и развития, материального и духовного, содержательного и процессуального и пр.

Формула

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{180^0}{n}$$

узаконивает определение числа π как предел сходящейся последовательности. Приведённое предельное равенство, как и другое фундаментальное равенство,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad ,$$

показывает независимость числа π от длины окружности, хотя под знаком предела стоит именно периметр правильного n-угольника,

---

[10] *Мирон С.И.* Число π и тригонометрические функции //Советский учитель. 1984. № 2. С. 45–49.

[11] Там же

вписанного в окружность радиуса $^1/_2$. Но периметр здесь выступает как интерпретация, а не как постулат. Подчеркнём, что как показано в[12], последовательность

$$\pi_n = n \cdot \sin \frac{180^0}{n}$$

монотонно возрастает и сверху ограничена, а потому имеет предел.

Идя по геометрическому пути, тысячи математиков, преодолевая огромные трудности, прибавляли всё новые и новые цифры в рациональное разложение числа π (Ф. Виета вычислил 14 знаков числа π после запятой, Л. Эйлер — 20, Мэшин — 100, Рихтер — 500, Шенкс — 707 и т.д.).

Другой раздел математики, в котором проявляются характерные для нелинейного мышления аспекты, — «Числовые последовательности и ряды». Задачи преобразования последовательностей от рекуррентного вида к явному и наоборот требуют разных подходов, разных видов мышления. Но здесь мы обратим внимание также на старинную задачу о суммировании многочленов, т.е. нахождении формулы для вычисления суммы

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(k),$$

где под знаком суммы стоит многочлен степени *n*.

Классические и современные пособия решают частный случай задачи с

$$P_m(k) = k^m$$

геометрическими средствами. Много внимания таким задачам уделяется в книгах[13], приводя и показывая удивительные способности древних и современных учёных к нелинейному мышлению (такие суммы приводят к интересным геометрическим конфигурациям — фигурные числа), но прямых формул для получения требуемой суммы не установлено.

Вместе с тем обозначены аналитические методы суммирования степеней, позволяющие получить рекуррентные формулы, т.е. найти последовательно суммы степеней при *к*=1, 2, 3, 4 и т.д.

В частности, для определения суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k^m$$

используют приём суммирования разности

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1},$$

которую можно представить при помощи бинома Ньютона

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^{1} k^m + C_{m+1}^{2} k^{m-1} + \ldots + 1.$$

Следовательно, для нахождения

$$\sum_{k=1}^{n} k^m$$

нужно найти аналогичные суммы для всех меньших степеней, затем преобразовать сумму всех слагаемых в приемлемое выражение.

Автору этих строк удалось найти приём определения

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(k)$$

как многочлен степени (*m*+1).

---

[12] Там же

[13] *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики. М.: Просвещение, 1996; *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976.

Возможность использования хорошо известного метода неопределённых коэффициентов реализована в процессе многолетнего внедрения в практику обучения авторских методических линий (линию неопределённых коэффициентов, линию матриц и определителей, линии подстановок, преобразований, уравнений, неравенств и т.д.), способствующих систематизации и запоминанию учебного материала, знаний и приёмов учебной деятельности. Полное решение проблемы приведено в моей работе[14].

Важной проблемой в математике, идущей от О. Коши, К. Вейерштрасса, Л. Эйлера, является проблема аналитического продолжения функций. Казалось бы, вся информация об аналитической функции должна быть сосредоточена в коэффициентах её ряда Тейлора. Ряд Тейлора, в свою очередь, однозначно определяет так называемые рациональные аппроксимации Паде. Тем самым естественная область аналитичности исходной функции должна совпадать с областью сходимости последовательности аппроксимаций Паде. Вместе с тем нелинейность является препятствием доказательства и этого факта.

Явление нелинейности должно привести к большим кооперационным результатам, синтезу теорий и направлений, возможно, к чему-то большему, чем «нанотехнологии».

---

[14] *Лунгу К.Н.* Об одном методе суммирования многочленов //Труды Колмогоровских чтений. Ярославль, 2007. С. 207–214.