Обобщение теоремы Паскаля

Автор: Попов Юрий,
11 «А» класс гимназии № 4 г. Мурманска.
Научный руководитель:
Верещагин Борис Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент Мурманского государственного педагогического университета

В 1640 году французский ученый Блез Паскаль обобщил теорему Паппа. В настоящее время этот результат известен как теорема Паскаля: если шестиугольник вписан в окружность (либо любое другое коническое сечение — эллипс, параболу, гиперболу или даже пару прямых), то точки пересечения трёх пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

Цель данной работы — обобщить теорему Паскаля в плоскости и в пространстве. В настоящей работе поставлены **задачи** доказать аналог теоремы Паскаля для *n-угольников, n-угольных* пирамид, вписанных в сферу и *n*-гранного угла.

Заметим, что исследование проводится в *расширенном пространстве*, что позволяет провести обобщения и для случая параллельности противоположных сторон многоугольника.

Дополнительная информация.

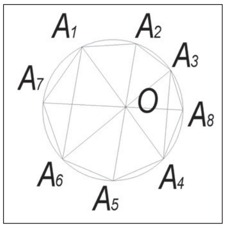
В пространство добавим так называемые несобственные или бесконечно удалённые точки, причём ко всем прямым пучка параллельных прямых добавляем одну и ту же точку, а к прямым разных пучков добавим разные точки. Таким образом, в новом пространстве нет параллельных прямых, а «старые» пересекаются в несобственных точках. Полученное пространство называется проективным или расширенным. Нам потребуются следующие факты проективной геометрии.

В проективной геометрии теорема Дезарга является одной из самых ранних и важных теорем. Она может быть сформулирована таким образом: «Если два треугольника в пространстве расположены так, что прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке, то три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон лежат на одной прямой».

Обратное утверждение: «Если два треугольника на плоскости расположены так, что три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон, лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке» тоже верно.

В 1847 году появилось обобщение теоремы Паскаля, сделанное Мебиусом, которое звучит так (далее — Теорема Мебиуса): если многоугольник с $4n + 2$ сторонами вписан в коническое сечение и противоположные его стороны продолжены таким образом, чтобы пересечься в $2n + 1$ точке, то если $2n$ этих точек лежат на прямой, последняя точка будет лежать на той же прямой.

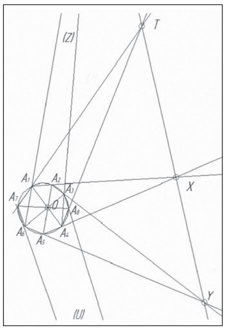
Наиболее важными из полученных результатов являются следующие теоремы:



Теорема 1: если у *(2k+6)*-угольника, вписанного в коническое сечение, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, то главные диагонали – соединяющих противоположные вершины *(2k+6)*-угольника — пересекаются в одной точке.

Рассмотрим сначала восьмиугольник, вписанный в коническое сечение, точки пересечения противоположных сторон которого лежат на одной прямой: по теореме Паскаля для шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и по обратной теореме Дезарга для треугольников $A_6A_7A_1$ и $A_3A_8A_4$ получим, что прямые (диагонали шестиугольника) $(A_1A_4),(A_7A_8)$ и (A_3A_6) пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что прямые $(A_1A_4),(A_2A_5)$ и (A_3A_6) также имеют общую точку. Следовательно, все главные диагонали 8-угольника $A_1 A_2 A_3 A_8 A_4 A_5 A_6 A_7$ пересекаются в одной точке. Рассмотрим *(2k+6)*-угольник, вписанный в коническое сечение, точки пересечения противоположных сторон которого лежат на одной прямой. Рассматривая каждые 4 пары противоположных вершин многоугольника аналогично случаю с 8-уголь-ником, получим, что все главные диагонали исследуемого многоугольника пересекаются в одной точке.

Таким образом, пересечение главных диагоналей *(2k+6)*-угольника, вписанного в коническое сечение, является необходимым условием выполнения аналога теоремы Паскаля (точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой).



Теорема 4: если главные диагонали *(2k+6)*-угольника, вписанного в коническое сечение, пересекаются в одной точке, то точки пересечения противоположных сторон этого *(2k+6)*-угольника лежат на одной прямой.

Пусть все главные диагонали восьмиугольника $A_1A_2A_3A_8A_4A_5A_6A_7$, вписанного в коническое сечение, пересекаются в одной точке *O*.

Применяя теорему Паскаля для шестиугольников $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и $A_1A_3A_8A_4A_6A_7$, а также Теорему Дезарга для треугольников $A_1A_6A_7$ и $A_3A_8A_4$ и треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$, получим, что точки пересечения противоположных сторон данного восьмиугольника лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь произвольный *(2k+6)*-угольник, вписанный в коническое сечение, у которого главные диагонали пересекаются в одной точке. Его можно получить из шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ добавлением k пар противоположных вершин. Добавляя на коническое сечение пару противоположных вершин, у многоугольника получим две новые пары противоположных сторон взамен одной, однако их точки пересечения также лежат на прямой *XYZ*. Добавив k пар противоположных точек, получим *2k* новых точек пересечения противоположных сторон многоугольника (теперь – *(2k+6)-угольника*), однако каждая из них будет принадлежать прямой *XYZ*. Таким образом, пересечение главных диагоналей *(2k+6)*-угольника, вписанного в коническое сечение, является достаточным условием выполнения обобщаемой теоремы Паскаля (точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой).

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 4 следует, что пересечение главных диагоналей *(2k+6)*-угольника, вписанного в коническое сечение, равносильно выполнению для него аналога теоремы Паскаля.

В работе доказаны аналог теоремы Паскаля на плоскости для *(2k+6)*-угольников и в пространстве для пирамид, основания которых удовлетворяют условию теоремы Паскаля или её обобщению, а также для (2k+6)-гранных углов. Также показано, что теорема Паскаля выполняется для вырожденного *(4k+12)*-угольника с двойными противоположными вершинами и не выполняется для вырожденного *(4n+8)*-угольника с одной двойной вершиной. Полученные результаты являются новыми. Их можно применять при подготовке к олимпиадам высокого уровня. Интересно рассмотреть частные случаи этих теорем в евклидовом пространстве (когда некоторые точки или прямые конфигураций являются несобственными). Такие задания можно давать школьникам как темы самостоятельного исследования.

Автор выражает благодарность Верещагину Борису Михайловичу за руководство при выполнении настоящей работы.

Литература

1. Задачи по планиметрии. Часть 1 / Прасолов В.В. М.: Физматлит, 1995.

2. Проективная геометрия / Н.В. Четверухин. Учпедгиз, 1953.

3. Википедия [электронный ресурс]. Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/