Об одном обобщении задачи Всероссийской математической олимпиады

Автор: Овчинников Кирилл,
11А класс гимназии №4 г. Мурманска.
Научный руководитель:
Локоть Вадим Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Мурманского государственного педагогического университета

В своей работе я обобщаю неравенство, предоставленное на всероссийской математической олимпиаде в 2000 году.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}},\ \ x,y\in[0;\ 1].$$

В данной работе приводится доказательство следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}\le\frac{n}{\sqrt[k]{1+\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}},\quad c>0,\ a_i\in[0;\ 1],\ k,n\in N. \qquad (1)$$

§ 1. Доказательство частного случая

Докажем частный случай неравенства *n=2, k=1.*

$$\frac{1}{1+a^c}+\frac{1}{1+b^c}\le\frac{2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}},\ \ a,b\in[0;\ 1],\ c>0. \qquad (2)$$

$$\frac{1}{1+a^c}+\frac{1}{1+b^c}\le\frac{2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow\frac{2+a^c+b^c}{(1+a^c)(1+b^c)}\le\frac{2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+a^c+b^c\le\frac{2(1+a^c+b^c+a^cb^c)}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow 2+a^c+b^c\le 2\frac{\left(1+(ab)^{\frac{c}{2}}\right)^2+\left(a^{\frac{c}{2}}-b^{\frac{c}{2}}\right)^2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+a^c+b^c\le 2+2(ab)^{\frac{c}{2}}+2\frac{\left(a^{\frac{c}{2}}-b^{\frac{c}{2}}\right)^2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow\left(a^{\frac{c}{2}}-b^{\frac{c}{2}}\right)^2\le 2\frac{\left(a^{\frac{c}{2}}-b^{\frac{c}{2}}\right)^2}{1+(ab)^{\frac{c}{2}}}\Leftrightarrow\ (ab)^{\frac{c}{2}}\le 1.$$

Учитывая, что $a,b\in[0;1]$, неравенство (2) доказано.

§ 2. Доказательство обобщения для *n*.

В этой части мы обобщим неравенство (2) для $n \in N$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^c} \le \frac{n}{1+\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{c}{n}}}, \ a_i \in [0;\ 1], \ c>0. \qquad (3)$$

Введём обозначения $a_i^c = x_i$. В книге [2, стр. 24] неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \le \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}} \qquad (4)$$

где $0 \le x_n,\ldots,x_2,x_1 \le 1,\ n \ge 2$ предложено в виде задачи для самостоятельного решения. Докажем неравенство (4) методом математической индукции. При $n=2$ неравенство доказано в §1. Пусть неравенство (4) справедливо. Докажем неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}} \le \frac{n+1}{1+\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}} \qquad (5)$$

Без уменьшения общности можно считать, что выполняются следующие соотношения: $0 \le x_{n+1} \le x_n \le \ldots \le x_2 \le x_1 \le 1$.

Используя индукционное предположение, получим

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}} \le \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\frac{1}{1+x_{n+1}}.$$

Остаётся доказать неравенство

$$\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}+\frac{1}{1+x_{n+1}} \le \frac{n+1}{1+\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}} \qquad (6)$$

Пусть $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=u^{n+1},\ x_{n+1}=t^{n+1}$, тогда

$$\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}=\sqrt[n+1]{u^{n(n+1)}t^{n+1}}=u^nt,\ 0 \le t \le u.$$

Неравенство (6) примет вид

$$\frac{n}{1+u^{n+1}}+\frac{1}{1+t^{n+1}} \le \frac{n+1}{1+u^nt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\left(1+t^{n+1}\right)\left(1+u^nt\right)+\left(1+u^{n+1}\right)\left(1+u^nt\right) \le (n+1)\left(1+t^{n+1}\right)\left(1+u^{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+nu^nt+nt^{n+1}+nu^nt^{n+1}+1+u^{n+1}+u^nt+u^{2n+1}t \le$$

$$\le n+1+(n+1)u^{n+1}+(n+1)t^{n+1}+(n+1)u^{n+1}t^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^{n+1}+(n+1)u^{n+1}t^{n+1}-nu^nt^{n+2}-(n+1)u^nt-u^{2n+1}t+nu^{n+1} \ge 0 \qquad (7)$$

Для доказательства неравенства (7) рассмотрим функцию $f(t), t \in [0;\ u]$.

$$f(t)=t^{n+1}+(n+1)u^{n+1}t^{n+1}-nu^nt^{n+2}-(n+1)u^nt-u^{2n+1}t+nu^{n+1}.$$

$$f'(t)=(n+1)t^n+(n+1)^2u^{n+1}t^n-n(n+2)u^nt^{n+1}-(n+1)u^n-u^{2n+1}.$$

$$f''(t)=n(n+1)t^{n-1}+n(n+1)^2u^{n+1}t^{n-1}-n(n+1)(n+2)u^nt^n=$$

$$=n(n+1)t^{n-1}(1+(n+1)u^{n+1}-(n+2)u^nt) \ge n(n+1)t^{n-1}(u^{n+1}+(n+1)u^{n+1}-(n+2)u^nt)=$$

$$=n(n+1)(n+2)t^{n-1}u^n(u-t) \ge 0 \ \text{ при } t \in [0;\ u].$$

Так как $f''(t)\ge 0$, то $f'(t)$ не убывает на отрезке $[0;\ u]$. Поскольку $f'(u)=f(u)=0$, то $f'(t)\le 0$, $f(t)$ не возрастает на отрезке $[0;\ u]$ и $f(t)\ge 0$ для всех $t\in[0;\ u]$.

Неравенство (3) справедливо.

§3. Доказательство обобщения для *k*.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}\le\frac{n}{\sqrt[k]{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}},\quad c>0,\ a_i\in[0;\ 1],\ k,n\in N.$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k]{a_i}}{n}\right)^k\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\qquad(8)$$

Левая часть неравенства (8), доказанного в книге [3, стр. 17], справедлива при любых $k>1$, $a_i\ge 0$. Сделаем замену:

a_i на $\frac{1}{1+a_i^c}$. Получим $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}}{n}\right)^k\le\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^c}}{n}$

Воспользуемся теперь неравенством (3), доказанным в §2.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^c}\le\frac{n}{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^c}}{n}\le\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}}{n}\right)^k\le\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}\le\frac{n}{\sqrt[k]{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}}.$$

Неравенство (1) доказано.

Вывод.

В работе доказано неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+a_i^c}}\le\frac{n}{\sqrt[k]{1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{c}{n}}}},\ c>0,\ a_i\in[0;\ 1],\ k,n\in N.$$

Литература

1. Mihaly Bencze and D.M. Batinetu-Giurgiu. About a problem of the Russian Mathematical Olympiad. Octogon. Vol. 13, №2, P. 1113-1117.

2. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 256 с.

3. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. «Наука». М., 1967. 304 с.