ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИЗУАЛИЗАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Виктор Алексеевич Далингер,
заведующий кафедрой теории и методики обучения математике Омского государственного педагогического университета

ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА НАГЛЯДНОСТИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ МОЖЕТ ПОЛУЧИТЬ ПРИНЦИПИАЛЬНО НОВОЕ РЕШЕНИЕ, ЕСЛИ УДАСТСЯ НАЙТИ ТАКОЕ МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧЕНИКА, КОТОРОЕ ПОЗВОЛИТ ВКЛЮЧАТЬ ФУНКЦИИ ЕГО ВИЗУАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОДУКТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ОВЛАДЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ПОНЯТИЯМИ, СПОСОБАМИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ДЛЯ УСИЛЕНИЯ РАЗВИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НАГЛЯДНОСТИ.

Для того чтобы правильно формировать мышление, необходимо представлять себе его психологические механизмы и направления развития. Значительные достижения психологов в этой области связаны с открытием межполушарной асимметрией мозга.

Открытие межполушарной функциональной асимметрии мозга по своей значимости в физиологии и психологии можно сравнить с открытием деления ядра в физике. Оно началось с работы американского исследователя Р. Сперри (ныне — нобелевский лауреат), который провёл смелую операцию над больным, страдающим эпилепсией. Он рассек все основные связи, соединяющие полушария у больного (конечно, это было предпринято не в научных целях, а для помощи больному). Эти и другие наблюдения Р. Сперри и его последователей позволили установить особенности работы левого и правого полушарий мозга человека.

Работа левого полушария позволяет человеку понимать письменную и устную речь, давать грамматически правильные ответы, манипулировать строго формализованными знаками, свободно оперировать цифрами и математическими формулами. Однако левое полушарие в отличие от правого не способствует различению интонаций речи и модуляций голоса, оно нечувствительно к музыке. Работа одного лишь левого полушария не обеспечивает эстетическое восприятие произведений искусства. Правое полушарие является носителем неосознаваемых творческих потенций человека.

Исследования психологов показали, что при выполнении заданий, требующих аналитического подхода, при совершении простых арифметических операций происходит активизация левого полушария (об этом судят по изменениям электрической активности мозга).

Приведённые выше и другие факты позволили психологам на первых этапах исследования сделать предположение о том, что левое полушарие специализировано на оперировании словами и другими условными знаками, а правое — на оперировании образами реальных предметов, кроме того, оно отвечает за ориентацию в пространстве и эмоциональное состояние.

При чтении технических, математических текстов больше активизируется работа левого полушария, а при чтении художественных — правого.

Психологи выявили пять основных дихотомий полушарного доминирования у человека: вербальное — невербальное, время — пространство, анализ — синтез, последовательное и одновременное восприятие, абстрактное и конкретное восприятие. Н.Н. Брагина, Т.А. Доброхотова различают три группы функциональных асимметрий полушарий мозга человека:

- моторная: неодинаковость двигательной активности рук, ног, лица, половины тела;
- сенсорная: неравнозначность восприятия объектов, расположенных слева и справа от средней плоскости тела;
- психологическая.

А.И. Захаров[1] отмечает, что у каждого третьего человека вообще нет преобладания особенностей работы одного из полушарий. У остальных двух третей можно говорить об относительно большей функциональной активности того или иного полушария.

Среди «левополушарных» встречается много инженеров, математиков, философов, лингвистов, представителей теоретических дисциплин, среди «правополушарных» — художники, артисты, музыканты.

Интерес представляют работы психологов, направленные на изучение особенностей мышления в связи с деятельностью правого и левого полушарий мозга. Так, например, В.С. Ротенберг пишет: «Преобладающее развитие функций того или иного полушария оказывает огромное влияние на склад ума человека и «несёт ответственность» за то, что люди делятся на «художников» и «мыслителей», «физиков» и «лириков», «теоретиков» и «практиков»[2].

Люди мыслят по-разному: у одних, например, преобладает абстрактное, словесно-логическое мышление, у других — образное, у третьих образные и абстрактные компоненты мышления находятся в относительном равновесии.

Значительное большинство людей обладает мышлением, основные компоненты которого развиты относительно равномерно. И лишь у 21% один вид мышления резко преобладает над другим.

В.С. Ротенберг, выделяя аналитический и наглядно-образный склады мышления, отмечает особенности учебной деятельности так называемых аналитиков и геометров. Аналитики страдают там, где успешность работы зависит от развития воображения. Они легче рассуждают, чем действуют, легче объясняют, как надо решать задачу, чем решают её.

Трудности для геометров начинаются там, где им приходится работать без наглядной опоры. Даже когда их деятельность протекает в уме, она нуждается в опоре на образы, на работу представления и воображения. Геометры значительно лучше себя чувствуют при работе со зрительным материалом, чем со словесно-логическим. Словесное объяснение задач они понимают хуже, чем рисунок или чертёж. Действуя правильно практически, такие ученики испытывают затруднения при необходимости дать теоретические обоснования своим действиям.

В.С. Ротенберг отмечает, что «нередко наше обучение, забираясь в самые отдалённые отвлеченности, попросту не адресуется к образному мышлению по познавательным возможностям и тем самым создаёт большие затруднения у учащихся. Трудности мышления, оторванного от образной основы, вполне естественны: образ — это не просто подножка теоретической мысли, это её необходимая составная часть. Мышление, лишённое элементов образности, рискует стать сухим, формальным. Обучение, совсем не адресованное к образному мышлению, не только не способствует его развитию, но и в конечном счёте подавляет его. Отсутствие опоры на образную сторону учебного материала не просто затрудняет обучение, а подчас придаёт ему мучительный характер, приводит к конфликту между образно мыслящим учеником и «сухой», скучной учебной работой».

В.А. Крутецкий[3] в своих исследованиях выделяет аналитический, геометрический и гармонический типы мышления, их сравнительная характеристика представлена в таблице.

Мышление представителей аналитического типа характеризуется явным преобладанием очень хорошо развитого словесно-логического компонента над слабым наглядно-образным. Они легко оперируют отвлеченными схемами, у них нет потребности в наглядных опорах, в использовании предметной и схематической наглядности при решении задач. Представители аналитического типа успешно решают задачи, выраженные в абстрактной форме, а задачи,

---

[1] **Захаров А.И.** Неврозы у детей. СПб: Дельта, 1996.

[2] **Ротенберг В.С.** Мозг, обучение, здоровье. М.: Просвещение, 1989.

[3] **Крутецкий В.А.** Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1963.

Характеристика типов	Аналитический тип	Геометрический тип	Гармонический тип
Развитие словестно-логического компонента	Очень сильный	Выше среднего	Сильный
Развитие наглядно-образного компонента	Слабый	Очень сильный	Сильный
Соотношение компонентов	Преобладание словесно-логическкго	Преобладание наглядно-образного	Равновесие
Пространственные представления	Слабые	Очень сильные	Хорошие
Использование в решении наглядных опор	Не может и не испытывает нужду	Может и испытывает нужду	Может

выраженные в наглядно-образной форме, стараются по возможности переводить в абстрактный план.

Анализ школьной практики обучения учащихся математике показывает, что основной упор учителя делают на логическое мышление, то есть на работу левого полушария головного мозга; иначе говоря, в обучении имеет место «левополушарный крен». В то время, как исследования психологов показывают, что до 80% информации человек получает через зрительный канал. Что же касается математики, то уместно привести здесь слова великого К. Гаусса: «Математика — наука не столько для ушей, сколько для глаз».

Психологами и физиологами доказано, что левое полушарие специализируется на вербально-символических функциях, а правое — на пространственно-синтетических.

Учителя математики в своей работе больший акцент делают на использование формально-логических средств, на оперирование знаковыми системами без необходимой опоры на образные компоненты.

Встаёт вопрос: как сделать обучение математике таким, чтобы оно строилось на сбалансированной работе и левого, и правого полушарий головного мозга, то есть на разумном сочетании логического и наглядно-образного мышления?

В настоящее время широкое распространение получил термин «визуальное мышление», то есть зрительно-наглядное, означающее, как пишет Р. Артхейм, «мышление посредством визуальных (зрительных) операций»[4].

Визуальное мышление есть деятельность, обеспечивающая создание образов, оперирование ими, перекодирование их в заданном или произвольном направлении, использование разных систем отсчёта для построения образа, выявление в образе различных признаков и свойств объекта, значимых для человека.

В.П. Зинченко и Н.Ю. Вергилес так определяют понятие визуального мышления: «Визуальное мышление — это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определённую смысловую нагрузку и делающих знание видимым»[5].

Основой принципа визуализации служит когнитивная графика, цель которой состоит в создании комбинированных когнитивных моделей представления знаний, сочетающих в себе символический и геометрический способы мышления и способствующих активизации процессов познания. Но использование визуальной информации не должно приводить к другой крайности — «правополушарному крену». Оптимальным является разумное сочетание визуального и вербального способов представления информации.

Наглядность играет в процессе обучения непосредственные и опосредованные функции. К непосредственным относятся: познавательная, управление деятельностью учащихся, интерпретационная, эстетическая, непосредственности рассуждений. К опосредованным следует отнести следующие функции: обеспечение целенаправленного внимания учащихся, запоминания

[4] **Arnheim R.** Visual thinking. — Berkley. Univ. of California Press, 1969.

[5] **Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю.** Формирование зрительного образа. Исследование деятельности зрительной системы. М: Изд-во МГУ, 1969.

и повторения ими учебного материала, реализация прикладной направленности.

М.И. Башмаков и Н.А. Резник по поводу используемой на уроке наглядности отмечают: «Каждый учитель использует на уроке наглядный материал — формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы в руках у учеников. Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы. Этой цели достичь легко. Вторая цель состоит в том, чтобы ученик смотрел и видел то, что заложено в этих образах. Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьёзного воспитания, как культура письма и речи»[6].

Попытки визуализировать математику, сделать её более наглядной, предпринимались уже давно. Ещё древние пытались самые элементарные алгебраические тождества и теоремы представлять в геометрическом виде. Позже сторонниками разумной визуализации математики выступали такие выдающиеся учёные, как Леонард Эйлер, Бернхард Риман, Давид Гильберт.

Без наглядных образов знания учащихся становятся бессодержательными, и это приводит к формализму. Вообще следует подчеркнуть, что там, где можно дать тому или иному математическому объекту наглядную интерпретацию, это следует делать в обязательном порядке.

Проблема реализации принципа наглядности в обучении математике может получить принципиально новое решение, если удастся найти такое методическое обеспечение деятельности ученика, которое позволит включать функции его визуального мышления для получения продуктивных результатов в овладении математическими понятиями, способами деятельности, для усиления развивающей функции наглядности.

Дидактически выверенное использование наглядных образов в обучении математике может превратить наглядность из вспомогательного, иллюстрирующего средства, в ведущее, продуктивное методическое средство, способствующее математическому развитию учащихся.

Язык образов является основным средством наглядности при изучении абстрактных математических понятий, позволяющих осознанно оперировать понятиями и умозаключениями, закреплять и «оживлять» их в памяти.

Наглядные образы выполняют важные функции в обучении: приобретение, хранение и репродуцирование информации; создание упреждающей программы поведения; эталонная функция; регулирование действий и т.д.

И.С. Якиманской разработаны следующие показатели, определяющие уровень оперирования учащимися образами: широта оперирования образом, полнота образа, его обобщённость и динамичность[7].

Главная идея когнитивно-визуального подхода к формированию знаний, умений и навыков — широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности. Когнитивно-визуальный подход направлен на воспитание «математического зрения». Для накопления визуального опыта полезны специальные задачи — визуализированные.

Визуализированной назовём задачу, в которой образ явно или неявно задействован в условии, ответе, задаёт метод решения задачи, создаёт опору каждому этапу решения либо явно или неявно сопутствует на определённых этапах решения[8].

Визуализированные задачи позволяют передать информацию об учебных возможностях, определённых особенностях умственной деятельности учащихся и тем самым служат инструментарием для диагностики учебных и личностно значимых качеств, а также являются одним из основных инструментов реализации когнитивно-визуального подхода к обучению математике.

Визуальный поиск — это процесс порождения новых образов, новых визуальных форм, несущих конкретную визуально-логическую нагрузку и делающих видимым значение искомого объекта или его свойства. Исходной позицией такого процесса является запас готовых, известных учащимся визуальных образов, структура и элементы

[6] **Башмаков М.И., Резник Н.А.** Развитие визуального мышления на уроках математики // Математика в школе. 1991. № 1.

[7] **Якиманская И.С.** Образное мышление и его место в обучении// Советская педагогика. 1968. № 12.

[8] **Далингер В.А.** Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999.
Далингер В.А. Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике: монография. Омск. Изд-во ОмГПУ, 2006
Резник Н.А. Технология визуального мышления // Информационная среда обучения. СПб: Свет, 1997.

информации, визуально обозримые связи между ними. Визуализированные задачи служат средством формирования навыков визуального поиска.

В решении математических задач образ может использоваться либо явно, либо неявно (см. ниже). Но и в том, и в другом случае это приводит к поиску пути решения задачи.

I. Неявное использование наглядного образа

1) При каких значениях параметра a система уравнений имеет более двух решений:

$$\begin{cases} 7ax + 4y = -8, \\ x + 7ay = 49a^2. \end{cases}$$

Решение задачи облегчается, если в каждом из уравнений системы увидеть прямую. В данном случае образ прямой используется нами неявно (прямые не строятся). Две прямые могут пересекаться (одно решение), быть параллельными (ни одного решения), совпадать (бесконечное множество решений — это как раз то, о чём спрашивается в задаче).

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{7a}{4}x - \dfrac{8}{4}, \\ y = -\dfrac{1}{7a}x - \dfrac{49a^2}{7a}. \end{cases}$$

Прямые совпадают, если равны их угловые коэффициенты и равны свободные члены, тем самым имеем такую систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{7a}{4} = -\dfrac{1}{7a}, \\ \dfrac{49a^2}{7a} = -\dfrac{8}{4}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем ответ к задаче:

$$a = -\frac{2}{7}.$$

2) Решите уравнение $|x+7| + |x-3| = 10$.

Традиционное решение выглядит так: числовая прямая точками $x = -7$ и $x = 3$ разбивается на три промежутка, на каждом из которых затем решается уравнение.

Используя неявно образ расстояния (а модуль это и есть расстояние между двумя точками), решающий может рассуждать так: «От меня требуют найти такие значения x, сумма расстояний от которых до точек $x = -7$ и $x = 3$ равно 10. Ясно, что это лишь значения х, принадлежащие отрезку [– 7; 3]». Это утверждение можно продемонстрировать рис. 1.

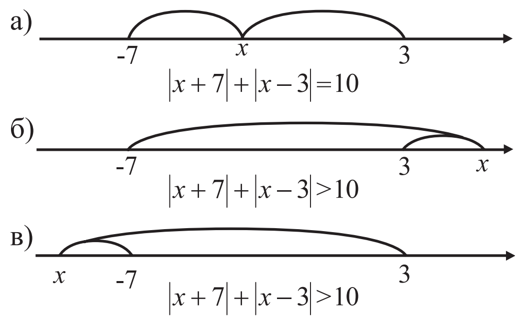

Рис. 1

3) Указать в каких точках функция, график которой изображён на рис. 2, не дифференцируема.

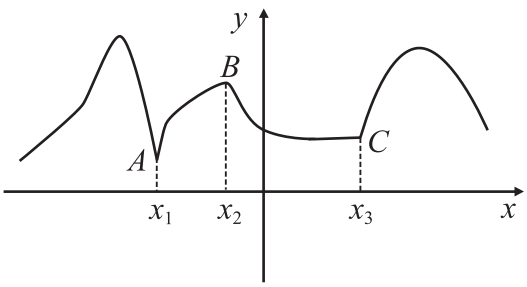

Рис. 2

Отвечая на вопрос этой задачи, следует мысленно опираться на связь между дифференцируемостью функции и возможностью проведения касательной к графику функции, в точке с абсциссой x_0. В данном случае в x_1, x_2, x_3 функция не дифференцируема, так как в точках A, B, C нельзя провести касательную к кривой.

Рассмотрим примеры задач, решение которых значительно облегчается за счёт явного использования соответствующего образа. Этот образ (график, рисунок, чертёж и т.п.) позволяет считывать информацию, тем самым обеспечивая наглядности познавательную функции (в отличие от иллюстративной).

II. Явное использование наглядного образа

1) Доказать тождество

$$\text{arsin}\,x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Читателю известно доказательство тождества с помощью производной. Мы же воспользуемся образом слагаемых, стоящих в левой и правой частях тождества: *arsin x* — это угол, синус которого равен x, а *arccos x* — это угол, косинус которого равен x; знак суммы означает сложение двух углов; в правой части тождества $\frac{\pi}{2}$ означает величину прямого угла.

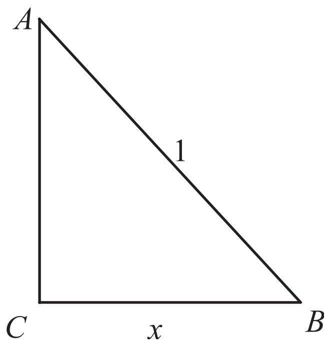

Рис. 3

Имеем $\frac{x}{1} = \sin\angle A,\ \frac{x}{1} = \cos\angle B.$
Из этих равенств получаем:
$\angle A = \arcsin x,\ \angle B = \arccos x$, а так как треугольник прямоугольный, используя теорему о сумме углов треугольника, окончательно получаем $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2) Доказать тождество

$$arctg\,\frac{1}{2} + arctg\,\frac{1}{3} = 45^\circ.$$

Это тождество доказывает рис. 4.

Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный (читателю предоставляется возможность доказать эти два факта). Из этого следует, что углы при основании ΔABC равны по 45°. Следовательно, мы доказали тождество, $arctg\,\frac{1}{2} + arctg\,\frac{1}{3} = 45^\circ$, используя явно образы углов и суммы углов.

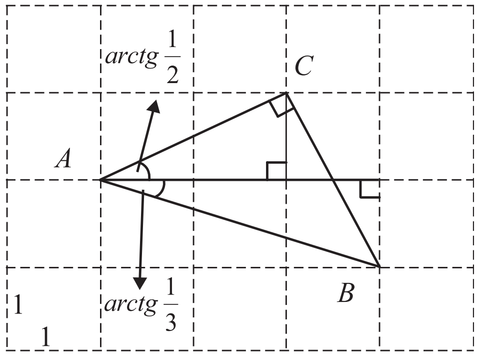

Рис. 4

3) Доказать, что если $0 < a < b$,

то $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{2ab}$

Решать эту задачу будем с опорой на явный образ площади криволинейной трапеции и площади прямоугольников. На рис. 5 изображена ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$.
$\ln\frac{b}{a}$ — это площадь криволинейной трапеции $ABKCD$, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = \frac{1}{x}$, при $x = 0$.

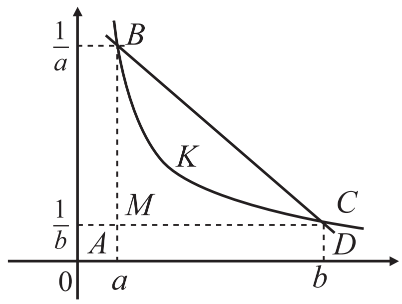

Рис. 5

Действительно, имеем:

$$S_{ABKCD} = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}.$$

Из рисунка мы видим, что площадь криволинейной трапеции $ABKCD$ меньше площади трапеции $ABCD$ и больше площади треугольника $AMCD$ (это познавательная функция наглядности):

$$S_{AMCD} < S_{ABKCD} < S_{ABCD}.$$

Точка С имеет координаты $\left(b;\frac{1}{b}\right)$, а точка В — координаты $\left(a;\frac{1}{a}\right)$.

Тогда $S_{AMCD}=(b-a)\cdot\frac{1}{b}=\frac{b-a}{b}$,

а $S_{ABCD}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2ab}$.

Окончательно имеем: $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b^2-a^2}{2ab}$.

Здесь и далее график играет роль визуального образа функции.

4) Доказать неравенство

$$\frac{1}{102}<\ln\frac{102}{101}<\frac{1}{101}.$$

Доказательство аналогично предыдущему и наглядно проиллюстрировано на рис. 6.

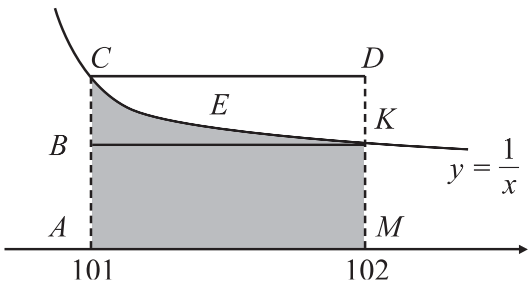

Рис. 6

Действительно, имеет место двойное неравенство

$S_{ABKM}<S_{ACEKM}<S_{ACDM}$.

$$S_{ACEKM}=\int_{101}^{102}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{101}^{102}=\ln 102-\ln 101=\ln\frac{102}{101}.$$

$$S_{ABKM}=(102-101)\cdot\frac{1}{102}=\frac{1}{102}.$$

$$S_{ACDM}=(102-101)\cdot\frac{1}{101}=\frac{1}{101}$$

Окончательно имеем $\frac{1}{102}<\ln\frac{102}{101}<\frac{1}{101}$.

5) Доказать неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$, где $x>0$.

Основой для доказательства неравенства служит рис. 7.

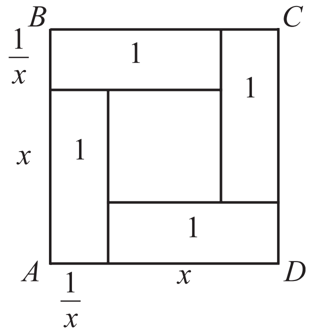

Рис. 7

Площадь квадрата $ABCD$ будет равна $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

Из рисунка видно, что эта площадь больше, чем сумма площадей четырёх прямоугольников $(1 + 1 + 1 + 1 = 4)$.

Значит, имеем $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geq 4$, откуда $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Видим, что мы снова для доказательства явно использовали образ площади квадрата.

6) Пусть имеются функция $y = f(x)$ и ей обратная функция $x = \varphi(y)$, и пусть $f(0) = 0$**.**

Докажите неравенство

Из рисунка 8 видно, что $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(y)dy\geq ab$.

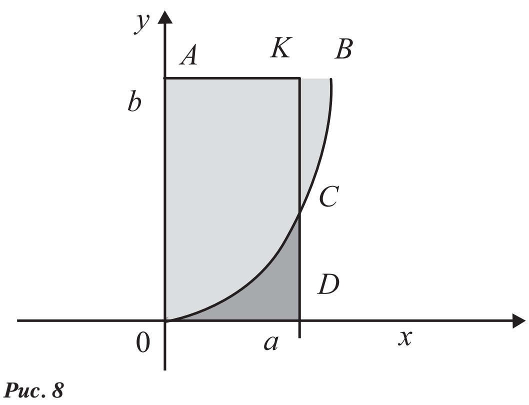

Рис. 8

Геометрический образ позволяет заключить,

что $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(y)dy\geq ab.$

Заметим, что эта формула верна для любой пары взаимообратных функций.

7) Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Проведём оси симметрии заданного правильного восьмиугольника AA_1 и CC_1 (рис. 9). Проведём также $EK \perp AA_1$ и $KD \perp CC_1$. Тогда EK равна наименьшей диагонали восьмиугольника, а KD — наибольшей.

Путём перекладывания треугольников указанным на рисунке способом, получаем, что $S_{ABCFA_1PC_1N} = S_{EKDT} = EK \cdot DT$. Это и доказывает утверждение, содержащееся в задаче.

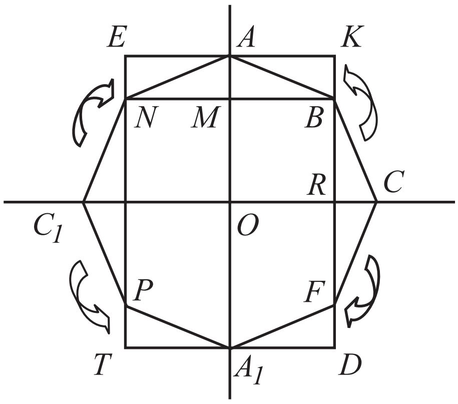

Рис. 9

Замечание: Указанное в доказательстве перекладывание треугольников возможно, если соответствующие треугольники равны (в силу симметрии достаточно показать это для одной пары треугольников). Предоставляем читателю возможность доказать самостоятельно, что $\Delta AKD = \Delta BCR$.

Предложим *задачи для самостоятельного решения*.

1) Какое из чисел больше, $\frac{2}{201}$ или $\ln\frac{101}{100}$?

(Указание: воспользуйтесь графиком функции $y = \ln x$.)

2) Доказать неравенство $99 < \int\limits_1^{100} \lg x dx < 198$.

(Указание: воспользуйтесь геометрическим смыслом определённого интеграла.)

3) Табличное значение для интеграла $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$ равно $\approx$ 1,463. Найдите значение интеграла $\int\limits_1^e \sqrt{\ln z} dz$.

(Указание: воспользуйтесь соответствующим графиком и геометрическим смыслом определённого интеграла.)

4) Докажите, что если $0 < a < b$, и функция $y = f(x)$ непрерывна, монотонна и $f(x) > 0$, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \varphi(y)dy,$$

где $\varphi(y)$ — функция, обратная для функции $y = f(x)$. (Указание: воспользуйтесь геометрическим смыслом определённого интеграла.)

5) Используя результаты предыдущей задачи, вычислите следующие интегралы:

а) $\int\limits_2^8 \log_2 x dx$; г) $\int\limits_2^4 \arcsin\sqrt{\frac{1}{x}} dx$;

б) $\int\limits_1^{-1} \arccos dx$; д) $\int\limits_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$;

в) $\int\limits_0^1 \arcsin dx$; е) $\int\limits_3^4 \sqrt{\frac{1}{x-1}} dx$.

6) В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка (рис. 10). Вершина B соединена с серединой стороны DC, вершина A — с серединой стороны BC, вершина D — с серединой стороны AB, вершина C — с серединой стороны AD. Докажите, что четырёхугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, — параллелограмм, и что его площадь в пять раз меньше площади данного параллелограмма.

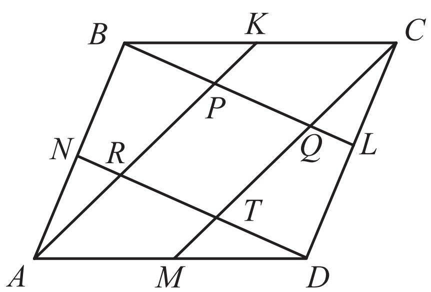

Рис. 10

(Указание: используйте для решения задачи когнитивно-визуальный (познавательно-зрительный) подход.)

7) Решите уравнения:

а) $|x-11|+|x-3|=14;$

б) $|x+8|+|x+9|=17;$

в) $|3x-8|+|3x-4|=12.$

(Указание: используйте геометрический смысл модуля.)

8) Коля, Вова и Саша решили вместе 100 задач. Каждый мальчик решил по 60 задач. Назовём задачу лёгкой, если её решили все три мальчика, и трудной, если её решил лишь один мальчик. Докажите, что трудных задач на 20 больше, чем легких. (Указание: воспользуйтесь кругами Эйлера).

9) Доказать неравенство: $\sin 20^\circ < \frac{7}{20}$.

(Указание: воспользуйтесь наглядным образом круга, сектора и треугольника).

10) Найдите сумму первых десяти нечётных чисел, не прибегая к непосредственному вычислению или к использованию соответствующих формул.

11) Запишите формулу для возведения четырёхчленна $(a+b+c+d)$ в квадрат. (Указание: воспользуйтесь наглядным образом — площадью квадрата, сторона которого есть сумма четырёх отрезков a, b, c, d.

12) В одно и то же время из гавани А в гавань В и обратно из В в А каждые сутки отплывает теплоход одной и той же компании. Вы сели на один из этих теплоходов. Сколько вы встретите в пути теплоходов этой компании, следующих в обратном направлении, если в одном направлении на путь уходит 7 суток? (Указание: методом графического моделирования представьте схему движения теплоходов; их движение представляет собой отрезки). ❑