

# КАКАЯ МАТЕМАТИКА НУЖНА ШКОЛЬНИКАМ

**Шота Алексеевич Музенитов,**

*директор Российско-Греческого межшкольного и межвузовского центра развития, сближения и единения школьников и студентов, преподаватель математики, доцент, кандидат педагогических наук*

Определённый период моей педагогической работы был связан с преподаванием математики в профессионально-техническом училище и вечерней школе. Особенно запомнилась группа, которая упорно игнорировала уроки математики. «Упрямыцы» ставили вопросы ребром: что нам даёт этот учебник по алгебре? Хоть одна задача для нас составлена? Зачем нас вынуждают изучать то, что адресовано не нам?

Сегодня аналогичные вопросы задают многие школьники. Действительно, кому и для чего предназначен учебник, по которому мы преподаём основы математики учащимся общеобразовательных школ и колледжей, и «вечерников»? Не один день просидел я, разбирая методическую структуру, направленность учебника «Алгебра и начала анализа» всех авторских коллективов.

Вывод: неоправданно слабое звено школьной математики — содержание предлагаемых для решения задач, оторванность теоретической части учебника от трудовой деятельности учащихся. Математика не рассматривается как средство познания реальных экономико-практических ситуаций, не развивает экономическое мышление, организаторские способности и деловые качества школьников, столь нужных в современных условиях рыночных отношений.

Падение интереса школьников к изучению математики, на наш взгляд, связано с тем, что её содержание ни в какой форме не отражает переход страны к рыночным отношениям в экономической сфере, хотя она имеет огромные потенциальные возможности для изучения и исследования экономических явлений и их взаимосвязей.

Вызывает озабоченность методика изучения и самой математики. К примеру, при изучении темы «Производная сложной функции» вряд ли в России найдётся хоть

один школьник, который осознанно и осмысленно воспримет связь между тремя переменными ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) в абстрактной форме. Но если изучать эту тему на примере зависимости себестоимости ( $Y$ ), урожая ( $Z$ ) от количества внесённого в почву удобрения ( $X$ ) и произвести при этом необходимый математический расчёт, всё встанет на свои места.

А вот другой пример. Веду урок по математике на автотранспортном предприятии, где администрация любезно предоставила помещения для обучения водителей непосредственно на месте. Тема: «Производная функции». Рассказав предварительно о применении производной в различных областях науки и техники, продолжаю: «Пусть независимая переменная « $x$ » принимает приращение « $\Delta x$ », а зависимая переменная « $y$ » принимает приращение « $\Delta y$ » — и всё это демонстрирую на графике. Увлёкшись выводом формулы, поворачиваюсь, чтобы убедиться в том, что мои ученики успевают записывать. И вижу картину: один водитель положил голову на парту, второй, третий. Сделав замечание, начинаю всё сначала, но тщетно: реакции никакой. И вдруг один из них, в полусонном состоянии, произносит: «А зачем эта производная в нашем шофёрском деле?» И тогда, несколько повысив голос, начинаю: «Пусть расход горючего на 100 км пути зависит от скорости движения автомобиля». Далее акцентирую их внимание на том, что при очень малых и очень высоких скоростях расход горючего наибольший. Что для каждой марки автомобиля существует своя наиболее экономичная скорость, при которой расход горючего минимальный. Привожу для наглядности математическую модель, вычерчиваю довольно точно отражающую её параболу. Указываю, что для каждого автомобиля — своя модель, своя парабола. И если каждый водитель знал бы наиболее

экономичную скорость своего автомобиля, то горючее расходовалось бы экономнее, детали машин реже выходили из строя, да и аварий было бы гораздо меньше. После всех объяснений наблюдаю совсем другую картину: полусонные водители поочерёдно поднимают головы, просыпаются.

Если изучать школьную математику на примерах экономической деятельности, у школьников значительно повысится интерес и будет развиваться экономическое мышление, что очень важно в поступательном развитии страны в сфере экономики и безопасности страны в условиях перехода к рыночным отношениям.

На мой взгляд, определённое число часов, которое сейчас отводится на решение отдельных типов уравнений (например, показательных, логарифмических, тригонометрических), встречающихся разве только в специальных задачниках и решаемых частными и искусственными способами, можно было бы с большей пользой посвятить изучению важнейших математических приложений, решению задач из сферы экономики средствами математики. Целый ряд тем без заметного ущерба можно сократить из программы, включив взамен другие, принципиально важные разделы математики, например, теорию матриц. Надеюсь, в обозримом будущем она займёт достойное место в содержании среднего и высшего математического образования, связав практическую реализацию методов обучения с использованием современных компьютерных технологий.

Всё это в совокупности позволит представить процесс изучения математики в виде блока, состоящего из трёх взаимосвязанных и взаимопроникающих частей:

1. Математические структуры (алгебра, геометрия, функции и графики).
2. Математические модели естествознания и экономики.
3. Вычислительная математика (компьютерная технология).

Сейчас в курсе математики представлена в основном первая часть (она даже выглядит гипертрофированной и является, чуть ли не самоцелью). В результате учащиеся не проявляют должного интереса к изучению математики, такая способность присуща людям с чисто математическим складом ума, а они составляют весьма незначи-

тельную часть. Математика же должна стать средством изучения математических моделей (часть вторая) и давать возможность их рассчитывать (часть третья).

Поэтому математические модели следует рассматривать как средство познания окружающей действительности, математические структуры — как средство изучения математических моделей, а вычислительные машины (компьютерные технологии) — как средство их расчёта.

На основе опыта работы в должности инженера-экономиста скажу, что наша экономика содержит в себе богатейший материал для любого профильного класса, который может быть описан, проанализирован всеми известными математическими функциями и понятиями. Да и сама математика легче и прочнее усваивается, если она основывается на экономико-производственном материале. Между математикой и основами экономики должна быть тесная межпредметная связь, а между составителями учебников и преподавателями по этим учебникам — тесные и всесторонние контакты.

Не секрет, что экономические знания сегодня необходимы каждому человеку — в условиях возрастающих темпов научно-технического прогресса повышается роль и ответственность каждого работника на производстве. Практическое применение экономических знаний повышает эффективность труда, позволяет успешно выполнять плановые задания, умело и рационально использовать имеющиеся природные ресурсы. Экономическое образование расширяет кругозор, вырабатывает государственный подход к своей трудовой деятельности.

Значительную часть работающих в народном хозяйстве составляют выпускники средних школ и колледжей. Приходя на производство, новоиспечённые специалисты должны отчётливо представлять экономические интересы своего предприятия, принимать участие в грамотном обсуждении вопросов экономики. Основная роль при этом, естественно, отводится обществознанию, экономической географии, истории, но значительную роль здесь должна сыграть и математика. Именно с помощью математики можно научить расчёту простейших, но вместе с тем важных экономических величин. И в процессе обучения в вузе, и в школе, и в самостоятельной трудовой

деятельности учащихся курс учебника математики и весь процесс её преподавания должен стать тем стержнем, на котором основывается сознательное стремление и умение бороться за повышение производительности труда, экономию сырьевых ресурсов, профессиональную культуру.

Сегодня можно с уверенностью сказать, что в условиях высшей и средней школы роль математики для воспитания экономической грамотности учащихся должна быть значительной. Такие элементы экономической грамотности как экономность, бережливость, расчётливость, рациональное использование природных ресурсов, умелое применение экономических знаний для достижения наибольших результатов в производственной сфере невозможно формировать без применения математических методов, без тесной связи теоретического материала по математике с задачами экономического содержания.

Давайте поставим себя на место школьника или студента. Нам, взрослым понятно и очевидно, что производительность труда — это количество продукции, выпускаемое за единицу времени, или количество времени, затраченное на выпуск единицы продукции. А учащимся — нет, и следует целенаправленно просвещать их, указывая на различные факторы, способствующие повышению производительности труда. Это достижения научно-технического прогресса, внедрение передовых методов и приёмов труда, постоянная механизация ручного труда, совершенствование технологических процессов, рациональное использование материалов и энергетических ресурсов, повышение квалификации и многое другое.

Все эти понятия вполне можно раскрыть через математические задачи с экономико-производственным содержанием, каждая из которых наглядно продемонстрирует учащимся, что влияет на повышение производительности труда, к каким производственным успехам это приводит и какие нежелательные последствия возникают, если принять неправильное решение. Роль цифровых сравнений и математических расчётов трудно переоценить.

Важно отметить и то, что любому человеку, даже слабо представляющему производство, знакома простая истина: по существу, на производстве в каждом конкретном случае приходится выполнять

простейшие математические расчёты для достижения поставленной цели в возможно короткий срок. Сама же математика, тонко проникая и пронизывая производственные дела и являясь элементом НОТ, способствует постоянному повышению производительности труда. При этом эффективность экономического образования и воспитания учащихся в целом значительно улучшится, если умело, всесторонне и полнее реализовать межпредметную связь в экономическом аспекте курса математики с другими школьными дисциплинами. Такая реализация межпредметной связи крайне необходима для вооружения будущих работников производства теми теоретическими сведениями, которые будут нужны им в дальнейшей жизни, особенно в трудовой деятельности.

Чтобы наполнить содержание среднего математического образования прикладными задачами из сферы экономики, отражающими рыночные отношения, изучить теоретические вопросы школьной математики на примерах экономической деятельности, автором разработана программа специального курса «Математика и экономика». Она представляет собой логическое продолжение основных тем обязательного курса по математике средней общеобразовательной школы.

### **Тематическое планирование математического содержания курса «Математика и экономика»**

#### **Тема 1. Предмет и задачи курса «Математика и экономика»**

*ЗАНЯТИЕ 1.* Занятие посвящается обсуждению общих задач, стоящих перед экономикой нашей страны в условиях рыночной экономики. Обращается внимание учащихся на производственную деятельность предприятия, фирмы, связанную с использованием в народном хозяйстве новейших достижений науки и техники.

Подчёркивается необходимость повышения экономической грамотности трудящихся, которая способствует развитию общественной инициативы, активному участию в управлении производством, использованию экономических знаний учащимися в своей будущей трудовой деятельности.

Определяются предмет и задачи курса.

## Тема 2. Экскурсия на строительное или промышленное предприятие или на фирмы

**ЗАНЯТИЯ 2–3.** Преподавателем первоначально составляется план проведения экскурсии, и определяются её цели. Устанавливается связь с администрацией предприятия, согласуются сроки и основные этапы проведения.

Предварительно проводится краткое ознакомление учащихся со структурой работы следующих функциональных отделов (подразделений): планового, технического, труда и заработной платы, финансового, отдела контроля качества продукции, отделов главного механика и энергетика, снабжения и сбыта, отдела кадров и технического обучения, административно-хозяйственного и бухгалтерии.

Во время экскурсии обращается внимание учащихся на структуру аппарата управления данного предприятия. Учащиеся знакомятся с технологическим процессом изготовления продукции на данном предприятии; с требованиями, предъявляемыми к её качеству, выясняют, как определяется себестоимость продукции, от каких параметров она зависит.

Обработанные и обобщённые материалы экскурсии преподаватель должен широко применять в дальнейшем проведении курса для сопоставления особенностей работы конкретного предприятия с общими требованиями экономики.

## Тема 3. Математические расчёты в системе оплаты труда рабочих

**ЗАНЯТИЯ 4–5.** Повременная, сдельная, аккордная, договорная формы оплаты труда. Премии.

В ходе занятия рассматриваются две формы оплаты труда: повременная и сдельная, как наиболее распространённые на предприятиях нашей страны. Вводятся понятия нормы времени, нормы выработки, тарифной ставки и расценки. Приводятся формулы подсчёта заработной платы каждого рабочего. Рассматриваются различные премиальные системы оплаты труда: повременно-премиальная, сдельно-премиальная, аккордная и т.п., которые применяются на производстве для повышения материальной и моральной заинтересованности рабочих в повышении

производительности труда. Преподаватель отмечает, что премии устанавливаются руководителями промышленных предприятий, и они выплачиваются за выполнение и перевыполнение производственного плана, за выпуск бездефектной продукции, за экономию сырья и материалов и т.п. Решается система логически взаимосвязанных задач с экономическим содержанием и проводится экономико-математический анализ их решения.

**ЗАНЯТИЕ 6.** Составление простейших калькуляций.

В начале занятия преподаватель даёт объяснение понятия «калькуляция». Отмечается, что с помощью составления калькуляций определяют себестоимость изготовленной продукции и время, затраченное на её изготовление. Составление калькуляции облегчает описание выполненной работы, помогает объединить результаты ряда промежуточных работ по изготовлению того или иного изделия. Учащимся указывается на возможность получения калькуляции для любого вида продукции. Отмечается широкое использование калькуляции для начисления заработной платы рабочих. Составляются калькуляции по изготовлению школьной парты, сооружению типового гаража, волейбольной площадки и т.п. Особое внимание обращается на то обстоятельство, что с помощью калькуляций легко выявить те отдельные промежуточные производственные операции, которые можно улучшить, для того, чтобы снизить себестоимость готовой продукции.

Решаются задачи типа:

**Задача 1.** Составить калькуляцию затрат труда и заработной платы:

- по строительству волейбольной площадки;
- по изготовлению мороженого.

**Задача 2.** Плотник в течение месяца изготовил:

- деревянные переносные лестницы (150 м);
- полотерки (100 шт.);
- столы на «козлах» длиной 2 м на шпонках (15 шт.);
- ящики для гашеной извести (5 шт.);
- ящики для пожарных «рукавов» (10 шт.).

Определить месячный заработок рабочего.

**Задача 3.** Проведена сварка стыков стержней с накладной из круглой стали при  $d = 30$  мм. Вычислить стоимость проделанной работы, если заварено 970 стыков.

**Задача 4.** Изготовлены бетонные блоки для стен подвала объёмом до 0,5 куб.м одного блока. Вычислить стоимость изготовления 176 блоков, если премиальные составляют 20% от основной зарплаты.

**Задача 5.** Численность работающих в кафе — 10 человек. Себестоимость одного обеда в кафе — 20 руб. (без учёта заработной платы). Ставка налога — 12% от прибыли. Величина спроса: если цена обеда 60 руб., то количество продаж обедов в месяц — 7000 шт., если цена обеда 75 руб., то количество продаж обедов в месяц — 4000 шт., если цена обеда 80 руб., то количество продаж обедов в месяц — 1800 шт.

Определить оптимальную цену обедов, установить среднемесячную зарплату работающим и определить величину прибыли, полученную владельцем кафе в месяц.

#### **Тема 4. Понятие о научной организации труда на предприятиях**

**ЗАНЯТИЕ 7.** Учащиеся знакомятся с научными основами организации труда (НОТ). Отмечается, что научная организация труда основывается на достижениях науки и передового опыта. Приводятся основные направления НОТ: рациональное разделение и кооперация труда, улучшение организации и обслуживания рабочих мест, внедрение передовых приёмов, методов труда, повышение квалификационного и культурно-технического уровня кадров.

Вся работа по научной организации труда подразделяется на три этапа.

На первом этапе при активном участии руководителей предприятий проводится анализ состояния организации труда. Определяются основные направления её совершенствования.

На втором этапе проводится разработка мероприятий по повышению эффективности производства на основе данных экономического анализа.

На третьем этапе проводится реализация разработанного плана по осуществлению намеченных мероприятий, подсчитывается эффективность внедрения.

Обращается внимание учащихся на то, что большую роль в совершенствовании организации труда, в осуществлении НОТ играют передовые рабочие, новаторы и рационализаторы производства, которые способствуют повышению эффективности труда путём внедрений передовых методов и приёмов обработки изделий в виде рационализаторских предложений. Подчёркивается важная роль знания математики и математических методов при решении экономических задач. Дается разбор задач типа:

**Задача 1.** Бригада каменщиков из 8 человек после трёх дней работы применила новое приспособление, благодаря чему увеличила дневную производительность труда на 10% и всего за 24 рабочих дня выполнила 672 куб.м кирпичной кладки. Определить средний месячный заработок до и после применения приспособления, если премиальные составляют 10% от основного заработка.

**Задача 2.** Бригада плотников, применив НОТ, при условии экономии строительных материалов, увеличила производительность труда на 25%, в результате чего ежемесячно стала изготавливать на 270 оконных блоков больше. Привести расчёт оплаты рабочим, если премиальные начисляются из расчёта 15% к основной оплате.

**Задача 3.** На одной сельскохозяйственной ферме годовой удой молока за 2008 год составил 4500 тыс. литров, а на другой — годовой удой молока на 850 тыс. литров меньше, хотя коров на 150 голов больше, чем на первой ферме.

За счёт применения научных методов содержания коров годовой удой молока от одной коровы на первой ферме на 1 тыс. литров больше, чем на второй.

Определить:

1. Поголовье коров на первой и второй фермах.
2. Вычислить средний годовой удой молока на одну корову на каждой ферме.
3. Найти себестоимость 1 литра молока на каждой ферме, если стоимость содержания одной коровы с учётом зарплаты рабочих и других расходов составляет 3000 рублей в год (расходы по реализации молока не учитывать).

**Тема 5. Применение элементарных математических функций в экономических расчётах**

**ЗАНЯТИЯ 8–9.** Использование понятия функции в экономических расчётах.

Преподаватель вспоминает с учащимися определение функции одной переменной  $y = f(x)$ , приводит различные примеры. Даёт геометрическую интерпретацию уравнений

$$y = kx, y = kx + b,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

как уравнений прямой на плоскости.

Отмечается, что линейная функция в экономике может выражать зависимость между издержками производства и выпуском продукции, между ценой товара и спросом, между нормой прибыли и прибавочной стоимостью, между производством продукции и расходом материала и т.п. Решаются различные задачи по определению себестоимости.

Учащимся даются сведения о выгодности перевозки груза определённым видом транспорта на основе графического решения системы линейных уравнений. Преподаватель показывает, как оценивать выгодность перевозки груза определённым видом транспорта, используя графические решения системы линейных уравнений относительно стоимости перевозок.

Даются примеры вычисления транспортных расходов, амортизационных отчислений и других экономических показателей с помощью понятия функции. Решаются задачи:

**Задача 1.** Перевозка груза из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 230 км, обходится в 57 рублей, а в пункт С, находящийся на расстоянии 680 км — 118 рублей. Вычислить стоимость перевозки в пункты Д, К, М, расстояние до которых от пункта А 120 км, 750 км, 900 км.

**Задача 2.** Себестоимость перевозки груза двумя видами транспорта выражается функциями:  $C = 0,22x + 5,25$  и  $C = 0,18x + 8,05$ ,  $10 \leq x \leq 110$ , где  $x$  — расстояние в км,  $C$  — транспортные расходы.

Определить, какой вид транспорта выгоднее для перевозок и начиная с какого расстояния.

**Задача 3.** Срок службы фуговального станка составляет 8 лет, а его стоимость равна 8560 руб. Изобразите графически стоимость станка с учётом амортизации за 2, 5, 7 лет.

**Задача 4.** Стоимость нового станка  $A$  руб., а стоимость капитального ремонта —  $r$  руб. Установлено, что станок без ремонта может работать  $n$  месяцев, а с ремонтом  $m$  месяцев. При каких соотношениях  $A, r, m, n$  расходы на ремонт оправдают себя, если производительность труда до и после ремонта одинакова?

1.  $A = 18500$  руб.,  $r = 8000$  руб.,  $n = 5$  м,  $m = 8$  м.
2.  $A = 12000$  руб.,  $r = 5800$  руб.,  $n = 6$  м,  $m = 7$  м.
3.  $A = 28000$  руб.,  $r = 10000$  руб.,  $n = 8$  м,  $m = 10$  м.

**ЗАНЯТИЯ 10–11.** Вычисление процентов в экономике. Накопление.

В начале занятия преподаватель должен ввести понятие процента в экономике как денежной суммы, выплачиваемой вкладчику за пользование денежными средствами, т.к. средства, пущенные в оборот, способствуют получению прибыли. Определяется понятие процентной ставки или нормы как отношение процента к величине денежных средств. Выводятся формулы накопления денежных средств:  $K_n = K(1 + n\alpha)$  в случае простых процентов,  $K_n = Kq^n$  — в случае сложных процентов, где  $\alpha$  — процентная ставка,  $K$  — величина первоначального взноса,  $n$  — число лет,  $q = 1 + \alpha$ .

Доказывается формула 
$$S_n = \frac{Kq(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

для суммы накопления денежных средств в случае периодического взноса, как сумма членов геометрической прогрессии.

В ходе занятия следует обратить внимание учащихся на финансово-экономические связи населения страны с государством через сберегательные кассы. Указывается выгода, получаемая вкладчиком в виде накопления средств для приобретения ценной вещи и т.п., и выгода для государства, заключающаяся в том, что деньги, поступающие в сферу обращения, идут на государственные нужды, на строительство промышленных предприятий, на социальные расходы и т.п. Решаются задачи следующего типа:

**Задача 1.** Определить, сколько рублей было отдано в пользование под простые 2% годовых, если через 5 лет накопилась сумма 1200 рублей.

**Задача 2.** Рабочий машиностроительного завода зарабатывает в месяц 8600 руб., 20% от заработной платы через бухгалтерию завода ежемесячно (с 1 января) в течение 5 лет откладывает в сберегательную кассу. Вычислите накопление денежных средств у рабочего за данный период (при норме  $p = 13\%$ ).

**ЗАНЯТИЕ 12.** Погашение кредитов.

Учащимся сообщается, что любое учреждение устанавливает сроки выплаты предоставленного долгосрочного кредита: разрабатывает план его погашения. В нашей стране кредиты выдаются Сбербанком и другими частными банками при определённых процентных взысканиях за пользование денежными средствами на условиях чёткого соблюдения обеими сторонами договорной дисциплины. Приводятся примеры процентных взысканий для конкретных случаев.

Доказывается формула погашения кредита:

$$R = \frac{K(1+\alpha)^n \cdot \alpha}{(1+\alpha)^n - 1} = \frac{Kq^n(q-1)}{q^n - 1},$$

где  $K$  — кредит, предоставленный на  $n$  лет,  $R$  — ежегодный взнос на погашение кредита, выплачиваемый в конце каждого года.

Решаются задачи типа:

**Задача 1.** Вычислите, чему равен ежегодный взнос денежных средств предприятием для погашения кредита, предоставленного Госбанком, в сумме 4000 руб., при процентной норме  $p = 12\%$ , если выплата производится в срок и равный 4 годам. Какой ущерб в денежной форме будет нанесён предприятию, если выплата будет произведена несвоевременно?

**ЗАНЯТИЕ 13.** Вычисление амортизационных отчислений.

Проводится знакомство учащихся с линейным и дегрессивным методами вычисления амортизационных отчислений. Вводится понятие амортизационного фонда. Учащимся сообщается о смешанном методе вычисления амортизационных отчислений. Разбираются примеры решения задач.

**Задача 1.** Стоимость оборудования, купленного в литейный цех, равна 84000 рублей, и оно должно прослужить 4 года. Стоимость его по окончании службы составляет

12000 руб. Вычислить стоимость оборудования и его амортизационные отчисления в конце каждого года, сначала дегрессивным, а затем линейным методами.

**Тема 6. Использование понятия производной в экономических расчётах**

**ЗАНЯТИЯ 14–15.** Определение скорости роста (снижения) производительности труда, себестоимости продукции, расхода сырья, материалов и т.п. с помощью понятия производной.

В начале занятия даётся экономическая интерпретация понятия производной, с помощью которой описываются скорость роста (снижения) производительности труда, скорость сгорания топлива, изменение себестоимости выпускаемой продукции и т.п.

Рассматривается алгоритм нахождения производной в математике и даётся его поэтапное объяснение с использованием экономических понятий. Приводятся примеры решения задачи на применение понятия производной произведения двух функций, производной сложной функции, дифференциала функции и т.п. к решению экономических задач. В ходе занятия преподаватель должен обращать внимание на привитие учащимся навыков экономического мышления, развивать у них как у будущих рабочих умения и навыки проведения простейшего экономического анализа производственных процессов с целью своевременного выполнения плановых заданий, определения скорости роста производительности труда при выполнении государственного плана. Решаются следующие задачи:

**Задача 1.** Производительность труда бригады рабочих в течение смены описывается функцией

$$f(t) = -4,6t^2 + 28,6t + 120,6, \quad 1 \leq t \leq 8,$$

где  $t$  — рабочее время в часах. Вычислить скорость роста производительности труда бригады при:  $t = 2$ ;  $t = 6$ .

**Задача 2.** На промышленном предприятии работают 100 тысяч рабочих, каждый с годовой производительностью труда 50 ед. продукции. Скорость роста количества рабочих в год равен 2 тыс., а производительности труда — 20 ед. в год. Определите годовой объём выпуска продукции при данных производственных условиях.

**Задача 3.** Расходы на топливо для теплохода делятся на 2 части. Первая из них не зависит от скорости и равна 200 руб. в час, а вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причём при скорости 15 км/ч эта часть расходов равна 50 рублям в час. Найти наиболее экономичную скорость теплохода. Вычислить дополнительную прибыль, если расстояние до порта назначения 2000 км.

**Задача 4.** По плану предусмотрено выпустить 150 тыс. ед. продукции. Количество рабочих, занятых производительным трудом, составляет 3 тыс. человек и увеличивается ежегодно на 0,1 тыс. Средний выпуск продукции каждого рабочего составляет 28 ед. в год. При какой скорости роста производительности труда можно выполнить план досрочно?

**ЗАНЯТИЕ 16.** Эластичность функции. Динамика спроса и предложения на товар относительно их цены.

Цель занятия — научить учащихся применять понятие производной для определения динамики спроса и предложения, используя определение эластичности функции. Для функции  $y = f(x)$  одного аргумента вводится понятие относительного приращения

$$\frac{\Delta x}{x} \text{ аргумента и функции } \frac{\Delta y}{y}.$$

Предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right)$ , если он существует,

называется эластичностью функции  $y = f(x)$  по переменной  $x$ , т.е.  $E_x(y)$ :

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x), \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Аналогично вводится понятие эластичности величины спроса  $q = q(p)$  относительно цены  $p$ :

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p(p)$$

и эластичности величины предложения  $S = S(p)$  относительно цены:

$$E_p(S) = \frac{p}{S} S'_p(p).$$

Разъясняется учащимся смысл понятий эластичности спроса и предложения относительно цены, которые означают, как будет изменяться спрос или предложение на данный товар, если изменится его цена, указывается на цену как компромисс спроса и предложения.

Решаются задачи по определению  $E_p(q)$ ,  $E_p(s)$ .

**Задача 1.** Составить график спроса и предложения на пшеницу и определить цену равновесия спроса и предложения.

Вариант	Цена	Спрос, млн т	Предложения, млн т
A	6	8	18
B	5	9	16
C	4	11	12
D	3	14	7
E	2	20	0

**Задача 2.** Определить эластичность и коэффициенты эластичности спроса на автомобиль, обувь и пшеницу, если величина спроса и цена на товар менялись

а) при цене за автомобиль 120 тыс. руб. объём продаж составил 1,2 млн штук, а при снижении цены до 100 тыс. руб. объём продаж увеличился до 3 млн штук;

б) при цене за сапоги женские 2000 руб. объём продаж составил 60 тыс. пар, а при снижении цены до 1500 руб. объём продаж увеличился до 100 тыс. пар;

в) при цене за 1 кг пшеницы 4 рубля объём продаж составил 10 млн т, а при снижении цены до 2 руб. за 1 кг объём продаж увеличился до 15 млн т.

**Задача 3.** Между ценой картофеля  $p$  и спросом его  $q$  на рынке установлена зависимость в виде  $q = 120 - 3p$ ;  $3 \leq p \leq 22$  ( $p$  выражается в рублях).

Определить эластичность спроса относительно цены  $p = 15$ .

**Задача 4.** Предложение некоторого товара описывается функцией  $S = 100 - 2p$ ,  $3 \leq p \leq 22$ .

Определить эластичность предложения относительно цены  $p = 20$ .

**ЗАНЯТИЕ 17.** Нахождение наибольшего и наименьшего значения функций при решении задач с экономическим содержанием.

Цель занятия — научить учащихся использовать понятия производной для вычисления наибольшего и наименьшего значения функций при решении экономических задач. Определять оптимальные размеры денежных расходов, объёма выпускаемой продукции, прибыли промышленного производства и т.п.

При проведении данного занятия преподаватель особое внимание должен уделить формированию у учащихся умений применять математические знания производной функции для решения практических задач, давать простейший экономический анализ производственных процессов. Определять условия получения максимальной прибыли за счёт экономии средств, рационального использования техники, природных ресурсов и т.п. При решении задач анализируются условия наиболее экономичного расхода горючего, получения минимальной себестоимости продукции и максимальной прибыли при её реализации и т.д. Обращается внимание учащихся на то, что снижение себестоимости продукции, получение прибыли являются основными характеристиками рентабельности любого предприятия.

Решаются задачи типа:

*Задача 1.* Открытый бассейн с квадратным дном имеет форму прямоугольного параллелепипеда, объём которого равен 6125 куб.м. Вычислите минимальную стоимость облицовки внутренних стен и дна, если стоимость 1 кв.м равна 30 руб.

*Задача 2.* Из сопротивления материалов известно, что прочность балки прямоугольного поперечного сечения на горизонтальный изгиб пропорциональна произведению ширины на квадрат высоты. Вычислите размеры наиболее прочной балки, т.е. отношение ширины к высоте поперечного сечения, которую можно изготовить из цилиндрического брёвна, если диаметр равен  $d$  линейных единиц. Найти экономию балок и средств за счёт правильной их укладки, если для достижения проектной прочности при неправильной укладке будет израсходовано 2000 штук. Стоимость 1 балки — 50 руб.

*Задача 3.* Себестоимость производства штангенциркулей-125 на заводе описывается функцией:

$$c(x) = 0,01x^2 - 0,52x + 12,36, \quad 5 \leq x \leq 50,$$

где  $x$  — объём выпускаемой продукции за месяц в тыс. ед.

Определить скорость изменения себестоимости при выпуске 20 тыс. ед. и 40 тыс. ед. продукции. При каком объёме выпуска продукции заводом себестоимость штангенциркулей-125 будет минимальной?

### ЗАНЯТИЕ 18. Семинарское занятие.

Семинарское занятие проводится по итогам года. В период подготовки к семинару преподаватель должен сформулировать ученикам вопросы, которые необходимо наиболее широко осветить при изучении той или иной темы. Дается список литературы и вопросы каждому учащемуся. Можно предложить, например, следующие темы докладов:

1. Производительность труда и пути её повышения.
2. Себестоимость продукции и пути её снижения.

В первом докладе следует отметить, что рост производительности труда повышает эффективность общественного производства, является основой увеличения национального дохода, повышения благосостояния народа. Обращается внимание учеников на то, что повышения производительности труда в основном следует добиваться за счёт технического перевооружения производства, использования передовых методов и приёмов труда на основе достижений научно-технического прогресса.

Во втором докладе подчёркивается, что себестоимость продукции является одним из важнейших и основных показателей эффективности работы предприятий, организаций, строительных и сельскохозяйственных фирм. Систематическое снижение себестоимости продукции даёт дополнительную прибыль для дальнейшего развития производства, повышения благосостояния трудящихся, указывает на его рентабельность. Проводится дополнительный анализ ранее решённых математических задач с экономическим содержанием.

Преподаватель во время проведения семинара должен давать введение в темы выступлений, делать краткие выводы по докладам учащихся и обсуждению, подвести итог всему семинарскому занятию. При подведении итога важно выделить взаимосвязь основных математических и экономических понятий, которые рассматривались на занятиях.

### ЗАНЯТИЕ 19. Роль математики в экономическом образовании, влияние математических знаний трудящихся на повышение производительности труда.

На занятии вновь, но более углублённо, повторяются и рассматриваются задачи,

стоящие перед экономикой. Подчёркивается роль и значение компьютерных технологий для интенсивного развития народного хозяйства страны. Подчёркивается настоятельная необходимость повышения экономической грамотности каждого выпускника общеобразовательных школ и колледжей в целях эффективного и рационального использования полученных знаний в будущей трудовой деятельности. Можно заслушать два доклада, подготовленные учащимися:

1. Ученические производственные бригады (20 мин).
2. Обзор состояния местной промышленности (20 мин) с последующим обсуждением.

**ЗАНЯТИЯ 20–21.** Экскурсия на завод, фабрику, фирму.

Учащихся знакомят с номенклатурой выпускаемой продукции, назначением продукции, наблюдают за выпуском продукции. Учащиеся знакомятся с условиями работы, с порядком вычисления заработной платы рабочим и предоставления различных льгот, получают сведения о возможности трудоустройства на данное предприятие, знакомятся с работой наставников.

**Тема 7. Применение понятий о матрицах и их свойствах в экономике и производстве**

**ЗАНЯТИЯ 22–23.** Матрицы и действия над ними. Понятие определителя.

Даются общие сведения о матрицах и их свойствах. Вводится понятие определителя матрицы. Выполняются действия сложения (вычитания) и умножения матриц. Перечисляются свойства определителей, вводится понятие алгебраического дополнения элемента матрицы и минора.

Приводится без доказательства теорема о разложении определителя  $n$ -го порядка по элементам строки или столбца. Решаются примеры на вычисление определителей второго, третьего порядков.

**ЗАНЯТИЕ 24.** Обратные матрицы.

На этом занятии преподаватель закрепляет у учащихся навыки вычисления определителей путём решения примеров. Далее вводится понятие единичной матрицы  $E$  и понятие об обратной матрице. Дается формула для вычисления обратной матрицы  $(\alpha_{ij})^{-1}$ .

Подчёркивается, что обратная матрица  $(\alpha_{ij})^{-1}$  лишь тогда существует, когда определитель матрицы  $(\alpha_{ij})^{-1}$  отличен от нуля, т.е.  $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ .

Решаются примеры на вычисление обратных матриц для матриц типа:

$$1) (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad 2) (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**ЗАНЯТИЯ 25–26.** Решение систем линейных уравнений матричным способом.

Цель занятия — научить учащихся применять понятия матриц, обратных матриц и их определителей для решения систем линейных алгебраических уравнений не выше третьего порядка в простейших случаях, когда решение существует и оно единственное. Решение системы уравнений матричным способом подразделяется на следующие этапы:

- 1) выписывается основная матрица из коэффициентов при неизвестных ( $A$ ), матрица переменных ( $X$ ) и матрица свободных ( $B$ );
- 2) вычисляется определитель  $A: \det(A)$ ;
- 3) вычисляется обратная матрица  $(A)^{-1}$ ;
- 4) определяются неизвестные переменные из уравнения:  $(X) = (A)^{-1}(B)$ .

В ходе занятия иллюстрируется применение матричного метода решения систем уравнений для рассмотрения производственных задач.

Преподаватель также может дополнительно показать эквивалентность решения систем матричным способом и методом (исключения неизвестных) Гаусса.

**ЗАНЯТИЯ 27–28.** Межотраслевые связи производства. План выпуска продукции.

На занятии показывается применение матриц в экономическом анализе производства. Отмечается, что любое производство делится на ряд отраслей. Выпускаемая ими продукция частично может перерабатываться внутри самой отрасли, а основная часть реализуется, образуя конечный продукт. Вводятся понятия технологического коэффициента производства и матрицы техники производства (матрица коэффициентов прямых затрат). Дается вывод формулы  $Q = (E - A)^{-1}q$  для определения планового

объёма выпуска продукции, где  $q$  — матрица конечной продукции каждой отрасли, а выражение  $(E - A)^{-1}$  обозначает обратную матрицу разности единичной матрицы  $E$  и матрицы техники производства  $A$ . Элементы матрицы  $(E - A)^{-1}$  выражают коэффициенты полных внутрипроизводственных затрат.

При решении задач по данной теме с помощью матриц определяются: коэффициенты полных затрат, валовой выпуск продукции предприятия, коэффициенты косвенных затрат. Проводится экономический анализ производственной программы какого-либо конкретного предприятия. Можно решать задачи типа:

**Задача 1.** Матрица технологических коэффициентов трёх отраслей промышленности:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Потребности в конечном продукте предусмотрены: для 1-й отрасли — 300 единиц, для 2-й отрасли — 400 единиц, для 3-й отрасли — 500 единиц. Определите объём продукции каждой отрасли.

**Задача 2.** Матрица технологических коэффициентов для трёх отраслей имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,0 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Конечные продукты отраслей составляют  $q_1 = 500$  единиц,  $q_2 = 600$  единиц,  $q_3 = 800$  единиц. Определите объём выпуска продукции каждой отрасли.

**ЗАНЯТИЯ 29–30.** Определение себестоимости единицы конечной продукции. Размер капитальных вложений.

На данном занятии в процессе решения задач с экономическим содержанием учащимся даются понятия о расходных нормах сырья на единицу продукции. Определяются производственные затраты, суммарный расход сырья для выполнения производственной программы, себестоимость единицы продукции. Выполняется элементарный экономический анализ работы предприятия и показывается необходимость увеличения объёма выпуска-

емой продукции в данной отрасли, в целях прироста объёма продукции в смежных отраслях. Это вызывает необходимость вложения дополнительных средств в данное производство. Вводятся понятия коэффициента капиталоемкости, прямых капиталовложений, сопряжённых капиталовложений.

Следует рассмотреть решение задач типа:

**Задача 1.** Химическое предприятие состоит из трёх цехов. Дана следующая матрица техники производства:

$$A = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,2 & 0,0 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Потребности в конечном продукте предусмотрены: для 1-го цеха — 200 единиц, для 2-го — 400 единиц, для 3-го — 600 единиц. Определите:

- коэффициенты полных затрат;
- валовой выпуск продукции для каждого цеха;
- коэффициенты косвенных затрат.

**Задача 2.** Между тремя отраслями существуют производственные связи. Матрица технологических коэффициентов (техники производства) задаётся в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

По плану предусмотрено увеличение выпуска продукции во второй отрасли на 10 единиц. Коэффициенты капиталоемкости продукции в отраслях составляют соответственно  $m_1 = 10000$ ,  $m_2 = 30000$ ,  $m_3 = 15000$ . Определить величины прямых и сопряжённых капиталовложений.

## Тема 8. Использование понятия определённого интеграла в экономике

**ЗАНЯТИЯ 31–32.** Составление экономико-математических моделей, отражающих производственные условия. Определение объёма выпускаемой продукции, запаса товара и сумм амортизационных отчислений.

В начале занятия кратко рассматриваются и составляются функции (экономико-математические модели), описывающие

разнообразные производственные процессы. На основе сравнения табличного задания функции и составленной аналитической функции даётся понятие определённого интеграла как предела интегральной суммы. Даётся его геометрическая интерпретация. С помощью понятия определённого интеграла в процессе решения задач вычисляется, например, объём выпускаемой бригадой продукции в течение всего рабочего дня или за определённый час и т.п. На основе зависимости от времени поступления товара на склад и его реализации определяется запас товара по истечении определённого срока. Вычисляются суммы амортизационных отчислений с помощью понятия определённого интеграла и формулы Ньютона-Лейбница. Кратко приводится экономический анализ решённых задач.

**ЗАНЯТИЕ 33.** Определение средней производительности труда, среднего расхода сырья и т.п.

Преподаватель даёт вначале доказательство первой теоремы: о среднем значении для определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a),$$

где  $\mu = f(\xi)$ ,  $a < \xi < b$  для непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Вводится формула для подсчёта среднего значения функций на отрезке. Рассматриваются примеры решения задач по вычислению среднего расхода сырья, средней производительности труда и т.п. в зависимости от параметров производственных функций. В заключение преподаватель может дать примеры применения изученной теоремы при решении простых физических задач: при нахождении работы переменной силы, определении давления жидкости на стенки сосуда и т.п., и отметить практическую значимость данных задач для конкретного производства.

**ЗАНЯТИЕ 34.** Экскурсия в вычислительный центр.

Преподаватель составляет план экскурсии с указанием цели, объекта, времени проведения. Устанавливает связь с будущим экскурсоводом. В ходе экскурсии учащиеся знакомятся с устройством и принципом про-

граммного управления ЭВМ, с процессами ввода и вывода информации, с контролем над прохождением всей программы. В процессе проведения экскурсии следует отмечать роль, которую играет использование ЭВМ в управлении экономикой нашей страны, в деле интенсификации развития народного хозяйства.

**ЗАНЯТИЯ 35–36.** Семинарские занятия по итогам года. Лекция о выборе профессии.

Проводится итоговое семинарское занятие по результатам года. Преподаватель кратко даёт обзор основных тем курса, делает выводы. Заслушиваются два-три выступления учащихся по актуальным проблемам применения математических методов в экономике труда и производства: по методам линейного программирования; оптимизации производства, применения основ теории вероятностей и математической статистики в экономических задачах и т.п.

В лекции о выборе профессии можно кратко охарактеризовать ряд профессий, указать на престижность каждой из них. Отметить, что правильный выбор профессии зависит от учёта индивидуальных особенностей каждого ученика и его познавательных способностей. Перечислить факторы, влияющие на выбор профессии. Можно провести анкетный опрос учащихся по выбору профессии по заранее составленному учителем тесту. Преподаватель кратко анализирует правильность выбора профессии.

На занятие желательно пригласить выпускников школ и колледжей, которые рассказали бы о своей работе, отметив при этом те факторы, которые повлияли на их окончательный выбор профессии. □