ЕГЭ-2009. МАТЕМАТИКА: НОВЫЕ ЗАДАНИЯ ЧАСТИ В

Д.А. Мальцев,

А.Г. Клово

Для того чтобы получить высокий сертификационный балл, ученик должен не только решить ряд задач уровня С, но и не допустить досадных ошибок при выполнении заданий базового и среднего уровней сложности. Хотелось бы обратить внимание читателя на те задачи уровня В, которые являются «новыми для ЕГЭ».

План единого экзамена по математике в 2009 году содержит 3 задания нового типа (А7, В3, В8), которые ранее не встречались. Кроме того, наряду с задачей В5, традиционно проверяющей умение связывать свойства функции и её производной посредством графика, есть ещё одна — В2, посвящённая этой же тематике.

В статье приводятся различные, потенциально возможные варианты заданий В2, В3, В8, излагаются идеи решения этих заданий, а также рекомендации по подготовке к их успешному выполнению.

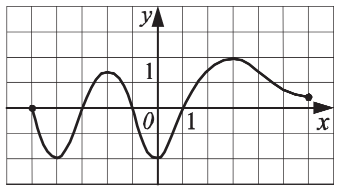
Задание В2

Согласно плану экзаменационной работы, в заданиях В2, В5 требуется проявить умение решать задачи на геометрический смысл производной и исследовать свойства функции с помощью производной. Например, находить по графику производной некоторой функции её точки экстремума, точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, промежутки возрастания и убывания.

Чтобы наверняка решить задание такого типа на экзамене, при подготовке к ЕГЭ необходимо разбирать самые разнообразные случаи, учесть, что формулировки заданий меняются год от года, не зацикливаться на одних и тех же заданиях.

Обратим внимание на следующий факт. На протяжении практически всех лет проведения ЕГЭ в формулировке соответствующего задания приводится график производной и требуется узнать некоторые факты, относящиеся к поведению функции. Эта задача будет не менее интересной, если «обратить» её формулировку. То есть предложить выпускнику, сдающему ЕГЭ, наоборот, по графику функции узнать нечто об её производной. Приведём следующие примеры.

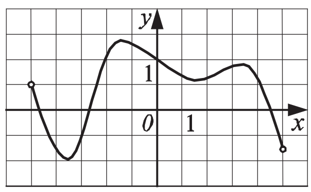
Пример 1. На рисунке изображён график функции, заданной на промежутке [–5; 6]. Пользуясь этим рисунком, найдите максимальную длину промежутка, на котором производная функции положительна.



Решение. Из рисунка к условию мы видим, что промежутки возрастания функции следующие: [–4; –2] и [0; 3]. В соответствующих интервалах с длинами 2 и 3 соответственно производная положительна. Следовательно, максимальная длина промежутка, на котором производная этой функции положительна, равна 3.

Ответ. 3.

Пример 2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале (–5; 5). Найдите количество точек с целыми абсциссами, в которых производная этой функции отрицательна.

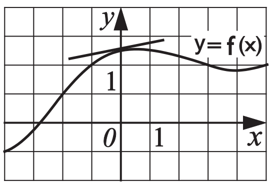


Решение. Если производная положительна на интервале, то функция на нём возрастает, если отрицательна, то убывает. Для того чтобы производная была отрицательна, достаточно, чтобы функция убывала, производная существовала и не была равна 0. Эти условия выполнены при x = –4, x = –1, x = 0, x = 1 и x = 4. В остальных точках с целочисленными абсциссами функция возрастает.

Ответ. 5.

С другой стороны, задание В2 может быть приближено к соответствующему заданию демонстрационного варианта. В этом случае потребуется использовать геометрический смысл производной и умение определять угловой коэффициент прямой по её изображению на координатной плоскости. В связи с этим ученикам полезно напомнить, что если прямая проходит через точки А(x_1;y_1) и В(x_2;y_2), то её угловой коэффициент определяется формулой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Рассмотрим следующий пример. На рисунке изображены участки графика функции $y = f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой $x = 0$. Известно, что данная касательная параллельна прямой, проходящей через точки графика с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$. Найдите значение производной $f'(0)$.

Решение. Ординаты точек графика $y = f(x)$ с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$ равны соответственно 1 и 2. Следовательно, угловой коэффициент прямой, проходящей через эти точки, равен $\frac{2-1}{3-(-2)} = 0{,}2$ (см. формулу выше). А поскольку касательная в точке с абсциссой $x = 0$ параллельна этой прямой, то её угловой коэффициент также равен 0,2. Осталось лишь заметить, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0 равен значению производной $f'(x_0)$, т.е. $f'(0) = 0{,}2$.

Ответ. 0,2.

Завершая обсуждение задания В2, отметим, что успешно решать подобные задачи помогает следующий методический приём — необходимо отождествить в своём сознании три понятия:

1) значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0;

2) тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0;

3) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Проделав эту операцию, легко увидеть, что для ответа на поставленный вопрос в большинстве заданий типа В2, В5 достаточно лишь выполнить в нужном месте (диктуемом условием задачи), соответствующую замену одного понятия на другое.

Задание В3

Для выполнения задания В3 необходимо построить математическую модель описываемой ситуации. Вполне вероятно, что в процессе решения задачи придётся выполнять значительное количество арифметических вычислений. Но калькулятор на ЕГЭ справедливо запрещён, так как он может скорее навредить, чем помочь. Ведь главное — понимать, что нужно вычислять (что с чем складывать, вычитать, умножать, делить и в какой последовательности). Поэтому, читая условие такой задачи и переводя его на математический язык, нужно быть предельно внимательным, правильно интерпретируя каждую фразу.

Перейдём к конкретным примерам.

Пример 1. Спортзал имеет форму прямоугольного параллелепипеда с основанием 16 на 25 метров и высотой 8 метров. В зале 8 окон размером 4 м × 3 м каждое и 4 двери размерами 2 м × 2,5 м каждая. Требуется нанести специальное покрытие на стены зала. Найдите стоимость этих работ в тысячах рублей, если квадратный метр покрытия стоит 200 рублей. Необходимо приобрести покрытие с запасом 10%, а стоимость работ по его нанесению составляет 70% от стоимости фактически нанесённого покрытия.

Решение. Покрываемая площадь (площадь стен без окон и дверей) равна произведению периметра зала (82 м) на его высоту (8 м) минус площадь окон и площадь дверей. Площадь всех 8 окон равна 8 × 4 м × 3 м = 96 м^2, площадь всех четырёх дверей — 4 × 2 м × 2,5 м = 20 м^2. Таким образом, покрываемая площадь равна 540 м^2.

Стоимость покрытия, фактически нанесённого на стены, равна (540×200) 108 000 руб., а стоимость работ, составляющая 70% от стоимости нанесённого покрытия, равна ($0,7 \times 108000$) 75600 руб. Так как приобрести покрытие нужно с запасом 10%, то требуется приобрести ($540 \times 1,1$) 594 м^2 покрытия, стоимость которого равна (594×200) 118800 руб. Таким образом, итоговые затраты (стоимость покрытия с запасом и работа) составляют 75,6 + 118,8 = 194,4 тысячи рублей.

Ответ. 194,4.

Рассмотренная выше задача аналогична заданию В3 из демонстрационного варианта ЕГЭ-2009, опубликованного на сайте ФИПИ (www.fipi.ru). Отличие от демоверсии по сути состоит в том, что нужно вычислить не стоимость материалов, а стоимость материалов плюс стоимость работ. При этом «дополнительной тонкостью» является то, что вычисляя стоимость работ, надо взять 70% от стоимости нанесённого материала, а не от всего закупленного.

Обратите внимание, с точки зрения практического смысла более естественным представляется такое условие задачи, в котором фраза «требуется купить с запасом 10%» меняется на фразу «до 10% используемых материалов уходит в отходы». В рассмотренном выше примере такое изменение условия означает, что если покрытие куплено Sм^2, то 0,9 S = 540 м^2, т.е. S = 600 м^2 (а не 594 м^2, как в прежней формулировке).

Пример 2. Танцевальный зал имеет форму прямоугольного параллелепипеда с основанием 8 м $\times$ 12 м и высотой 5 м. В зале есть две колонны от пола до потолка, сечением которых является квадрат со стороной 0,8м. Требуется нанести плиточное покрытие на пол и колонны. Найдите минимальное количество квадратных метров плитки, которое необходимо для этого приобрести, учитывая, что 10% приобретённой плитки уйдёт в отходы.

Ответ. 140,8.

Пример 3. Для оклейки стен комнаты требуется приобрести обои. Ширина комнаты составляет 4 м, длина — 5 м, высота — 3 м. В комнате есть окно размером 3 м $\times$ 2 м и дверь размером 1,05 м $\times$ 2 м. Длина рулона обоев равна 10,5 м, ширина — 0,6 м. До 15% купленных обоев идёт в отходы из-за состыковки рисунка и неиспользованных узких полос. Найдите минимальное количество рулонов обоев, которое необходимо приобрести для оклейки комнаты.

Ответ. 9.

Весьма вероятно, что в заданиях В3 реальных тестов ЕГЭ-2009 прикладные геометрические знания будут проверяться на несколько более глубоком уровне.

Пример 4. Найдите максимальное число кубиков объёмом 2 кубических сантиметра, которые поместятся в коробке объёмом 50 кубических сантиметров. Предполагается, что грани кубиков параллельны соответствующим граням коробки.

Решение. Чтобы определить наибольшее число кубиков, которые можно «разместить в ряд» вдоль стороны коробки, произведём оценку отношения стороны коробки к стороне кубика. Сторона коробки равна $\sqrt[3]{50}$, сторона кубика — $\sqrt[3]{2}$, $\frac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{25}$. Так как $2 < \sqrt[3]{25} < 3$, то максимальное число кубиков, которые можно «разместить вдоль» каждой из сторон коробки, равно 2. Поэтому максимальное число кубиков, помещающихся в коробке, равно 8.

Ответ 8.

При поспешном решении этой задачи, не замечая «подвоха», школьники могут делить 50 на 2. Ответ при этом, естественно, получается неправильный. Поучительным моментом в данном примере является то, насколько сильно (более чем в три раза) неправильный ответ отличается от правильного.

Задание В8

Безусловно, одним из самых неприятных сюрпризов для рядового ученика является появление в задании В8 уравнения с параметром, содержащего модуль. Надо прямо признать, что если не готовиться к этому заданию специально, то такая задача может показаться очень трудной. Но существует некий «универсальный» метод решения задач на эту тему, который вполне доступен для освоения самому среднему ученику. Речь идёт о «графическом подходе».

ШКОЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Со спецификой применения графического метода к уравнениям с параметром, содержащим модуль, авторы предлагают ознакомиться на приведённых ниже примерах.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| + a - 9| = a^2$ имеет ровно 3 корня. Если таких значений a более одного, в ответе укажите их произведение.

Решение. На рисунке а) изображён эскиз графика $y = |x| + a - 9$, а на рисунке б) — эскиз графика $y = ||x| + a - 9|$ и прямой $y = a^2$.

(рисуя графики, предполагаем, что $a - 9 < 0$, так как если $a - 9 > 0$, то $||x| + a - 9| = |x| + a - 9$ данное в условии уравнение принимает вид $|x| = a^2 - a + 9$ и имеет не более двух корней).

Из рисунка б) следует, что график $y = ||x| + a - 9|$ и прямая $y = a^2$ имеют ровно три общие точки $\Leftrightarrow a^2 = 9 - a$, $a^2 + a - 9 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет два корня, произведение которых по теореме Виета равно –9.

Ответ. –9.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x - a| - 2| = x + 4$ имеет бесконечное число корней. Если таких значений a более одного, в ответе укажите их сумму.

Решение. На данном ниже рисунке а) изображён эскиз графика $y = |x - a| - 2$, а на рисунке б) — эскиз графика $y = ||x - a| - 2|$ и прямой $y = x + 4$.

Из рисунка б) следует, что график $y = ||x - a| - 2|$ и прямая $y = x + 4$ имеют бесконечное число точек пересечения $\Leftrightarrow$ прямая $y = x + 4$ содержит отрезок AB или луч CD. А это, в свою очередь, равносильно следующему: точка A или точка C лежат на прямой $y = x + 4 \Leftrightarrow a - 2 = -4$ или $a + 2 = -4 \Leftrightarrow a = -2$ или $a = -6$. Таким образом, искомыми значениями a являются числа –2 и –6, сумма которых равна –8.

Ответ. –8.

В реальном экзаменационном задании на уравнение с параметром и модулем под знаком модуля помимо линейной функции также может находиться квадратичная функция (появление в уравнении B8 чего-то более экзотического, чем выражения вида $y = |kx + b|$ или $y = |x^2 + bx + c|$ маловероятно). В связи с этим, школьникам полезно вспомнить, как строится график квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$ и, соответственно, график функции $y = |x^2 + bx + c|$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 3|x| - x - 4| = a$ имеет нечётное число корней. Если таких значений более одного, в ответе укажите их сумму.

Решение. Построим график функции $y = |x^2 - 3|x| - x - 4|$. При $x > 0$ выражение, определяющее данную в условии функцию, имеет вид: $y = |x^2 - 4x - 4|$, а при $x < 0$ оно преобразуется к виду: $y = |x^2 + 2x - 4|$. На рисунке изображены эскизы графиков функции $y = |x^2 - 4x - 4|$ при $x > 0$ и $y = |x^2 + 2x - 4|$ при $x < 0$, объединение которых и является требуемым графиком.

По этому рисунку легко видеть, что прямая $y = a$ пересекает график функции $y = |x^2 - 3|x| - x - 4|$ в нечётном числе точек при следующих значениях a: $a = 8$, $a = 5$ и $a = 4$. Таким образом, сумма искомых значений a равна 17 (8 + 5 + 4).

Ответ. 17. ❑