УРОК В СЕЛЬСКОЙ ШКОЛЕ: ОРГАНИЗАЦИЯ, ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНИКИ, ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

О некоторых трудностях при изучении алгебры

Елена Ивлиева,
старший научный сотрудник лаборатории малочисленной школы ИСМО РАО

Математика, в частности алгебра, предмет, устрашающий учеников и их семьи, предмет, с которым связано больше всего неудач в учёбе и который влияет на отношение к учёбе, становится причиной нежелания учиться в школе.

Причин возникновения трудностей при изучении алгебры много. Рассмотрим некоторые из них, устранение которых возможно методическими средствами. Трудности изучения математики в основной школе заключаются в сущности самого предмета. Так, сущность **алгебры** — абстрагирование, отвлечение от конкретных значений чисел. В начальной школе учащиеся изучали математику (арифметику и первоначальные сведения из геометрии), имели дело с конкретными числами, некоторыми фигурами. В алгебре же учащиеся должны научиться выполнять действия с их условными обозначениями, за которыми скрывается не одно, а множество значений («*x*», как известно, обозначают любое действительное число). Так, в заданиях типа «найти значения буквенного выражения при заданных значениях входящих в него букв» эти значения букв или нескольких букв всегда даны. Возможно, на начальном этапе обучения следовало бы предлагать учащимся самостоятельно задавать числовые значения букв, входящих в данное алгебраическое выражение, и вычислять его числовое значение. Самостоятельное варьирование числовыми значениями букв, входящих в алгебраические выражения, было бы весьма полезным и позволило бы учащимся лучше понять, что значит подставить вместо букв, входящих в алгебраическое выражение, любое действительное число. Совсем не используются обратные задания, в которых надо прикинуть, какие значения могут принимать буквы, чтобы его числовое значение было равно заданному числу. Такие задания позволят учащимся понять различие между числовым значением буквы и выражения и могут способствовать лучшему пониманию и других тем курса математики.

Желательно учитывать то, что знания учителя, его ориентация в предмете значительно превосходят знания учащихся, и то, что понятно учителю, не всегда сразу понятно ученикам. Необходимо обращать внимание на то, что не все учащиеся понимают смысл многих заданий, того, что требуется найти, поэтому желательно подробно их разбирать, не считая, что и так всё ясно. Иногда ученики затрудняются ответить на вопрос: «Что значит — упростить выражение?» При этом упрощать выражения (выполнять указанные действия) им приходится довольно часто. Важно добиться понимания смысла и различения понятий: выражение, тождество, уравнение, неравенство, упростить, больше, меньше нуля, сравнить и др. Для этого следует чаще расшифровывать значение терминов, научиться давать им чёткие определения. Можно использовать задания с подсказками.

Учащиеся привыкают не обращать внимания на слова и отдельные указания, поэтому выполняют задания по учебнику, не отдавая отчёта в том, как оно сформулировано и что требуется. Задания, одинаковые по способу выполнения, могут быть сформулированы различно. Например, «вычислите», «найдите значение выражения», «выполните действия», «решите уравнение», «найдите корни уравнения». Эти же задания могут быть поставлены несколько иначе: «при каких значениях буквы значение выражения — натуральное (целое, отрицательное и т.п.) число», «найдите наибольшее (наименьшее) целое значение выражения». Значит, из всех полученных значений надо отобрать целые и затем наибольшее. Или — «решите уравнение и выберите наименьший (наибольший, положительный, отрицательный) корень». Это означает, что надо решить уравнение и из полученных решений выбрать требуемый по условию корень.

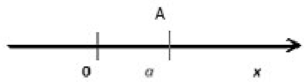
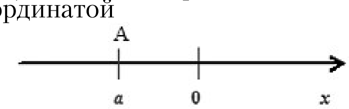
Часто учащиеся испытывают трудности при выполнении тождественных преобразований алгебраических выражений, которые связаны с тем, что «a» и «$-a$» одночлены, у которых коэффициенты 1 и -1 соответственно. Следует чаще напоминать об этом учащимся и предлагать задания упростить выражения. Например, $a + a - 3b$, $x - y + x - y$, $b + b - c$ и т.п., при этом обязательно надо просить учащихся комментировать свои действия.

Недостаточное владение терминологией предмета, отсутствие прочных умений читать, записывать и произносить математические термины приводит к многочисленным недочётам и ошибкам. Трудно идёт освоение языка алгебры. Например, знак минус в алгебре имеет значение знака действия вычитания ($3a - b$), знака отрицательного числа (-4) и знака числа ($-k$), противоположного данному числу (k). Учащиеся затрудняются понимать то, что числовое значение «$3a$» может быть численно меньше, чем «a», т.к. не понимают и не учитывают возможные значения буквы. Данные $3a$ и a воспринимаются как положительные числа, в то время как оно может быть и отрицательным. А числовое значение $-3a$ больше, чем значение $-a$, при $a < 0$. Числовое значение суммы «$x + y$» меньше, чем числовое значение разности «$x - y$». А также и то, что «$-a$» может быть положительным, а «a» — отрицательным, в случае, если $a < 0$. Непонимание этого приводит к ошибкам при выполнении действий с неравенствами, изображении ($3a$ и a, $-3a$ и $-a$ и т.п.) на числовой прямой.

При изучении алгебры в основной и старшей школе учащимся придётся переосмыслить ранее усвоенные термины и понятия. Например, при изучении темы «Рациональные числа» учащиеся должны понять, что «прибавить» — это не всегда значит в прямом смысле «увеличить». Можно «прибавить», а результат при этом уменьшится (если «прибавить» отрицательное число). Эти факты желательно показать на конкретных примерах: $5 + (-8) = -3$ или $-2 + (-3) = -5$. В примерах «сумма меньше первого слагаемого» можно использовать числовую прямую. В результате выполнения действия вычитания число может увеличиться. Например, $-5 - (-2) = -3$. Разность больше уменьшаемого. Этот результат можно увидеть на числовой прямой. Следует быть внимательным при объяснении, т.к. $-5 + 8 = 3$ или $-5 -8 = -13$. В этих примерах число -5 увеличилось при выполнении действия сложения и уменьшилось при вычитании.

Для запоминания, правильного написания, составления математической записи, чтения и использования сложными являются знаки неравенства ($<$, $>$, $\le$, $\ge$, $\ne$). Знак «$\ne$» вызывает трудности при решении заданий на нахождение области допустимых значений переменной. Если при изучении алгебраических выражений иногда используются задания на их чтение, то при изучении неравенств таких заданий недостаточно. Желательно не только учить читать неравенства или записывать их, но и давать по возможности геометрическую иллюстрацию.

Вообще знак неравенства (его написание, толкование, употребление) достаточно трудно усваивается при изучении математики. Можно предлагать учащимся следующие карточки:

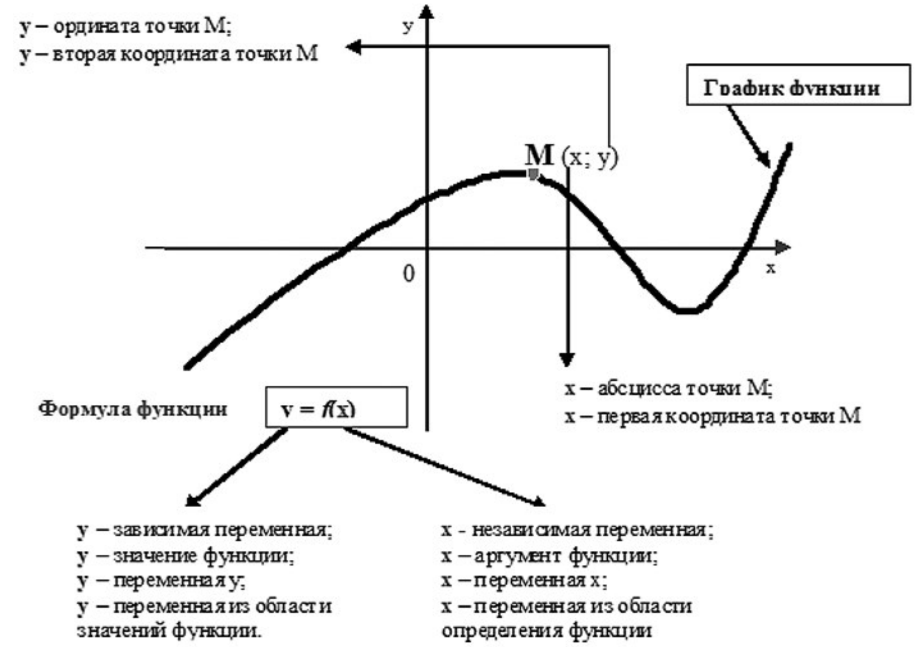
«Язык» алгебры	**«Язык» геометрии**
Утверждение «*a* число положительное»: $a > 0$ — условная запись с помощью неравенства, *a* — больше нуля, *a* число, имеющее знак плюс	Утверждение «*a* число положительное»: на числовой прямой *a* находится правее нуля, A(*a*) — точка с положительной координатой 
Утверждение «*a* число отрицательное»: $a < 0$ — условная запись с помощью неравенства, *a* — меньше нуля, *a* число, имеющее знак минус	Утверждение «*a* число отрицательное»: на числовой прямой *a* находится левее нуля, A(*a*) — точка с отрицательной координатой 

Особое значение при изучении алгебры имеет знание и понимание различных условий или ограничений, которые содержатся в определениях понятий, теоремах, условиях задач, и их влияние на результаты при решении задач, использовании определений, теорем. Например, в определениях линейной (k — любое действительное число), квадратичной ($a \neq 0$) и других функций, арифметического корня, степени с целым, дробным показателем. О том, как влияют накладываемые условия и ограничения на смысл вводимых понятий, как понимать эти условия и не забывать называть их при формулировании определений, следует терпеливо разъяснять учащимся, использовать примеры и добиваться от них чёткого понимания и умения объяснять сущность этих ограничений. Можно использовать подстановки чисел вместо данных букв, давать геометрическую иллюстрацию, раскрывающую влияние условия или наложенного ограничения на рассматриваемое математическое понятие.

Лучшему пониманию математических понятий способствует умение использовать и понимать как алгебраический, так и геометрический язык. Например, возьмём несколько терминов: абсцисса, вторая координата точки графика функции, аргумент, значение переменной x, независимая переменная, значение из области определения функции. На языке «алгебры» –– это аргумент, значение переменной x, независимая переменная, значение из области определения функции; а на языке «геометрии» — это абсцисса, вторая координата точки графика функции. Аналогично ордината, вторая координата точки графика функции, значение функции, зависимая переменная, значение переменной y, значение из области значений функции. Это можно продемонстрировать с помощью рисунка «Функция, её график и точка графика». На нём изображён график некоторой функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ — это **формула функции** и точка этого графика M(x; y) этой функции. Стрелками показано, как надо понимать выражения: переменная x, независимая переменная, аргумент, абсцисса, первая координата и др.

Лучшему усвоению способствуют цветовые выделения на рисунках и в записях. Используя разные цвета (красный, синий или другие), можно научить видеть на графике, в формуле, о какой переменной (*x* или *y*) идёт речь в задачах, научить различать эти переменные и правильно устанавливать, о какой из них идёт речь в задаче.

Функция, её график и точка графика



При работе с графиками функций учащиеся затрудняются в понимании и выполнении следующих заданий, какую переменную надо записать в ответ:

1) найдите значения x, при которых $y = 2$;

2) найдите значение y при $x = 0$.

На рисунке дана иллюстрация к заданию 1).

Значительные трудности учащиеся испытывают при записи ответов при нахождении числовых промежутков возрастания, убывания или знакопостоянства функции. В каком случае включать, а в каком не включать концы найденных промежутков при выписывании ответа. В первых двух случаях концы включаются в ответ (если функция определена в этих точках). Надо понять, что в конечных точках найденных промежутков монотонности функция и возрастает, и убывает. Значит, при выписывании промежутков и возрастания, и убывания следует повторять концы найденных промежутков в каждом ответе. В случае нахождения промежутков знакопостоянства концы найденных числовых промежутков могут быть включены или не включены. Нужно учитывать, какое дано неравенство: строгое, нестрогое. Например, $f(x) > 0$, т.е. установить, при каких значениях переменной x функция принимает положительные значения. В этом случае концы не включаются, т.к. данное неравенство строгое и функция должна принимать только положительные значения. В случае нестрого неравенства $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ концы числового промежутка надо будет включать, т.к. по данному условию функция должна принимать и положительные, и нулевые значения.

Умения выполнять вычисления необходимы учащимся на протяжении изучения всего курса математики. В случае недостаточного овладения этими умениями возникают трудности для дальнейшего изучения математики. Для восполнения пробелов, отработки вычислительной техники необходимо не только хорошо спланировать и систематически проводить работу с учащимися, но иметь разнообразные материалы. Предлагаем таблицы, которые можно использовать как демонстрационные или раздаточные. Их можно помещать в личный справочник учащегося, который постепенно создаётся ходе изучения соответствующих тем курса математики. С помощью этих таблиц учащиеся могут научиться пользоваться математическими фактами и запомнить их, видеть и самостоятельно устанавливать связи между числами для рационального выполнения вычислений.

Таблица 1.

Проценты. Десятичные дроби. Обыкновенные дроби

Проценты в виде десятичной дроби:	1% = 0,01	2% = 0,02	1,25% = 1,25	75% = 0,75
Проценты в виде обыкновенной дроби:	$1\% = \frac{1}{100}$	$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$	$1{,}25\% = 1\frac{25}{100} = 1\frac{1}{4}$	$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Десятичная дробь в виде процентов:	0,01 = 1%	0,02 =2%	1,25 = 1,25%	0,75 = 75%
Обыкновенная дробь в виде процентов:	$\frac{1}{100} = 1\%$	$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 2\%$	$1\frac{1}{4} = 1\frac{25}{100} = 1{,}25\%$	$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$

Замечание. Важно уметь читать равенства слева направо и наоборот. Желательно запомнить данные факты и использовать в вычислениях и задачах.

Таблица 2.

Связи между обыкновенными и десятичными дробями

Обыкновенная дробь	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
Десятичная дробь	0,5	–	0,25	0,5	0,75	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	–	–	0,125	0,25

Обыкновенная дробь	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{100}$
Десятичная дробь	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1,0	–	0,1	0,2	0,3	0,01

Замечание. Желательно запомнить данные факты. При выполнении вычислений можно будет свободно и быстро переходить от обыкновенной дроби к десятичной.

Таблица 3.

Равенства чисел

$\frac{1}{2}=0{,}5=\left(\frac{1}{2}\right)^1=(2)^{-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{8}=1:2=...=...$
$\frac{1}{4}=0{,}25=\left(\frac{1}{2}\right)^2=(2)^{-2}=(0{,}5)^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1-\frac{3}{4}=8\cdot\frac{1}{32}=1:4=...=...$
$\frac{1}{8}=0{,}125=\left(\frac{1}{2}\right)^3=(2)^{-3}=(0{,}5)^3=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=1-\frac{7}{8}=2\cdot\frac{1}{16}=1:8=...=...$

Замечание. Знание этих фактов позволит не только быстро выполнять вычисления, но и решать уравнения и неравенства.

Таблица 4.

Произведения и частные чисел

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

Таблица 5.

Простых чисел от 1 до 100

2	11	23	31	41	53	61	71	83	97
3	13	29	37	43	59	67	73	89	
5	17			47			79		
7	19								

Замечание. Использование таблицы № 4 позволит запомнить многие числа. Например, 30, 45, 60, 90 и другие. А умножение и деление может стать простым и лёгким для выполнения.

Таблица 6.

Квадраты чисел от 1 до 25

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$	$16^2=256$	$21^2=441$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$	$17^2=289$	$22^2=484$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$	$18^2=324$	$23^2=529$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$	$19^2=361$	$24^2=576$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$	$20^2=400$	$25^2=625$

Таблица 7.

Кубы чисел от 1 до 10

$1^3=1$	$3^3=27$	$5^3=125$	$7^3=343$	$9^3=729$
$2^3=8$	$4^3=64$	$6^3=216$	$8^3=512$	$10^3=1000$

Замечание. Факты, представленные в табл. № 6 и 7, необходимо знать наизусть.

Для отработки навыков устного счета учитель использует разнообразные дидактические материалы, карточки. Для 7–9-х классов предлагаем использовать задания, представленные в карточках 1–3. В них заложены ошибки, которые учащиеся должны найти. В этих карточках равенства с ошибками выделены только для учителя. Учащимся следует дать карточки без пометок (✔). Они должны найти все ошибки и затратить 3–4 минуты на выполнение всех заданий. Задания следует постепенно усложнять, предлагая действия с двузначными и даже трёхзначными натуральными числами. Затем можно составить задания для целых, рациональных чисел. Чтобы легко устно справиться с карточкой № 2, желательно знать некоторые произведения и частные чисел, которые представлены в таблице № 6 (см. выше). Например, $15 \times 4 = 60$, $90 : 6 = 15$ и т.п. Для карточки № 3 необходимо знание значений степеней с натуральным показателем с основанием 2, 3, 4, 5, а также квадраты чисел до 25. Подобные карточки можно создавать к темам «степень с целым показателем», «степень с дробным показателем».

Карточка № 1. Найдите в приведённых примерах все 12 допущенных ошибок. При этом на эту работу надо затратить не более 3–4 минут

13 + 2 = 15	22 – 7 = 15	18 + 4 = 23 ✓	3 + 19 = 23 ✓	15 + 9 = 25 ✓
13 – 4 = 9	15 – 8 = 7	18 + 8 = 24 ✓	16 – 4 = 12	12 + 9 = 21
9 + 15 = 24	7 + 16 = 24 ✓	23 + 6 = 29	8 + 17 = 24 ✓	17 – 8 = 8 ✓
24 – 13 = 11	14 – 8 = 6	12 – 9 = 3	14 + 13 = 27	18 – 9 = 9
11 + 4 = 15	17 + 4 = 21	5 + 16 = 24 ✓	27 – 4 = 23	16 + 4 = 20
15 + 5 = 10 ✓	21 + 5 = 26	24 – 5 = 29 ✓	13 + 5 = 18	25 – 7 = 18
13 – 7 = 6	24 – 7 = 16 ✓	14 – 9 = 5	18 + 7 = 25	18 – 7 = 12 ✓
16 + 6 = 22	17 + 7 = 24	5 + 17 = 22	19 + 6 = 25	6 + 18 = 24

Карточка № 2. Найдите в приведённых примерах все 12 допущенных ошибок (только для учителя они отмечены галочкой ✓). При этом на эту работу надо затратить не более 3–4 минут

15 · 9 = 145 ✓	18 · 3 = 53 ✓	19 · 9 = 191 ✓	13 · 13 = 169	21 · 21 = 441
15 · 4 = 60	18 · 8 = 134 ✓	19 · 5 = 95	11 · 11 = 121	18 · 18 = 324
15 · 7 = 115 ✓	18 · 5 = 90	19 · 8 = 162 ✓	12 · 12 = 144	19 · 19 = 351 ✓
15 · 3 = 45	18 · 4 = 62 ✓	19 · 3 = 57	25 · 25 = 625	24 · 24 = 576
15 · 8 = 120	18 · 2 = 36	19 · 4 = 76	15 · 15 = 225	22 · 22 = 484
15 · 5 = 75	18 · 6 = 128 ✓	19 · 7 = 133	17 · 17 = 298 ✓	20 · 20 = 400
15 · 2 = 30	18 · 9 = 162	19 · 2 = 39 ✓	14 · 14 = 196	10 · 10 = 110 ✓
15 · 6 = 90	18 · 7 = 126	19 · 6 = 114	16 · 16 = 256	23 · 23 = 529

Карточка № 3. Найдите в приведённых примерах все 12 допущенных ошибок (только для учителя они отмечены галочкой ✓). При этом на эту работу надо затратить не более 3–4 минут

$2^7 = 128$	$3^2 = 6$ ✓	$(0{,}5)^2 = 2{,}5$ ✓	1,3 · 13 = 16,9	2,1 · 21 = 44,1
$2^5 = 32$	$3^3 = 27$	$(0{,}5)^4 = 0{,}0625$	1,1 · 1,1 = 12,1 ✓	1,8 · 1,8 = 3,24
$2^3 = 6$ ✓	$3^4 = 81$	$(0{,}5)^3 = 1{,}25$ ✓	1,2 · 12 = 14,4	1,9 · 19 = 3,51 ✓
$2^9 = 512$	$3^5 = 243$	$(0{,}05)^2 = 0{,}0025$	2,5 · 25 = 62,5	2,4 · 2,4 = 5,76
$2^8 = 256$	$4^3 = 64$	$(1{,}5)^2 = 2{,}25$	1,5 · 1,5 = 2,25	2,2 · 2,2 = 4,84
$2^6 = 64$ ✓	$4^4 = 128$ ✓	$(1{,}6)^2 = 2{,}56$	1,7 · 17 = 2,98 ✓	2,0 · 20 = 40
$2^2 = 4$	$4^2 = 16$	$(1{,}7)^2 = 2{,}98$ ✓	1,4 · 1,4 = 1,96	1,0 · 10 = 100 ✓
$2^4 = 16$	$4^5 = 1026$ ✓	$(1{,}8)^2 = 3{,}24$	1,6 · 16 = 25,6	2,3 · 2,3 = 5,29

Можно использовать карточки, содержащие задания на отработку умений выполнять различные вычисления устно, содержащие два и более действий. Их можно использовать в 7–9-х классах. Каждое такое задание требует знания правил (правила выполнения действий над выражениями, содержащими (не содержащими) скобок), приёмов (использование формул сокращённого умножения, переместительного, сочетательного законов сложения) и др.

Карточка. Найдите значение выражения			*Ответы:*		
7 – 7 : 2	(2 - 5) · 6 – 4	($4^2 – 7^2$) : (11 – 4 – 11)	3,5	–22	–1
8 – 8 : 3	4 – 2 : (5 – 3)	($5^2 – 8^2$) : (13 · 4 – 13)	$5\frac{1}{3}$	3	–1
5 – 5 : 4	(3 – 6) · 7 – 5	0,6 : ($1{,}2^2 – 1{,}8^2$)	3,75	–26	–3
3 · 4 – 5	1,6 · 7 – 1,6 · 2	27,82 + 46,9 + 32,18 + 33,1	7	8	140
4 · 5 – 6	$111^2 – 11^2$	52,73 + 36,3 + 53,27 + 33,7	14	12200	176
5 · 6 – 7	0,8 : ($1{,}4^2 – 2{,}2^2$)	12,18 – 24,6 + 13,82 – 35,4	23	–3,6	–34

Одной из содержательных линий курса математики является тема: функции, их свойства и графики. Начиная с 7-го класса, учащиеся знакомятся с элементарными функциями, их свойствами и графиками. С большими трудностями сталкиваются учащиеся 9-го класса при изучении темы «Квадратичная функция, её график». Для лучшего её усвоения предлагаем материалы, содержащиеся в табл. 1 и 2. Сделана попытка систематизировать задачи по теме, сформулировать правила решения задач на использование формулы квадратичной функции и задач, связанных с использованием графика этой функции. Таблицы могут служить опорными таблицами для выполнения заданий по теме, подготовки к экзамену. Постановка и выделение основных типов задач позволят учащимся лучше увидеть различия в заданиях, отработать способы решения, обобщить изученный материал. Такие таблицы можно постепенно создавать с учащимися. Можно сначала создать их и затем использовать как раздаточный материал.

Таблица 1. Какие задачи можно решать, используя формулу квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$?

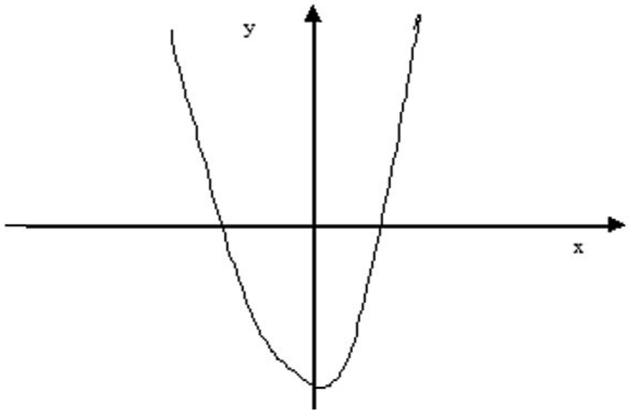
Задача 1. Найти область значений квадратичной функции.	**Правило 1.** Чтобы найти ***область значений квадратичной функции*** ($y = ax^2 + bx + c$), надо: 1) найти значение $x_b = -\frac{b}{2a}$ по коэффициентам a и b, 2) найти значение $x_b = -\frac{b}{2a} y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{2a}\right) + c$; 3) определить знак коэффициента a; 4) записать область значений квадратичной функции: а) если $a > 0$, то $-\left[y\left(-\frac{b}{2a}\right);+\infty\right)$; б) если $a < 0$, то $-\left(-\infty; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

Задача 2. Найти значение функции y при заданном значении переменной x.	**Правило 2.** Чтобы найти ***значение функции y*** при заданном значении переменной x, надо: 1) подставить данное значение x в выражение правой части формулы функции; 2) вычислить значение этого выражения; 3) записать полученное значение $\boldsymbol{y = y(x)}$.
Задача 3. Найти значение переменной x по заданному значению функции (y).	**Правило 3.** Чтобы найти **значение *x*** по заданному значению функции (y), надо: 1) подставить данное значение y в левую часть формулы функции; 2) решить полученное уравнение относительно переменной x; 3) записать полученные значения $\boldsymbol{x}$.
Задача 4. Найти нули квадратичной функции.	**Правило 4.** Чтобы найти ***нули квадратичной функции*** $y = ax^2 + bx + c$, надо: 1) составить и решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$; 2) выписать корни, значения которых (x_1 и x_2, или x_1) являются нулями функции.
Задача 5. Установить наличие нулей у квадратичной функции.	**Правило 5.** Чтобы установить ***наличие нулей*** у квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, надо: 1) найти $D = b^2 - 4ac$, 2) сравнить D с нулём 0: если $D > 0$, то два нуля, если $D = 0$, то один нуль.
Задача 6. Установить отсутствие нулей у квадратичной функции.	**Правило 6.** Чтобы установить ***отсутствие нулей*** у функции $y = ax^2 + bx + c$, надо: 1) найти $D = b^2 - 4ac$, 2) сравнить D с нулём 0; если $D < 0$, то нет нулей, т.е. они отсутствуют.
Задача 7. Найти наибольшее (наименьшее) значение квадратичной функции.	**Правило 7.** Чтобы найти ***наибольшее (наименьшее) значение*** квадратичной функции ($y = ax^2 + bx + c$), надо: 1) найти значение $x_b = \frac{b}{2a}$ по коэффициентам a и b; 2) найти значение $y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\left(-\frac{2}{2a}\right) + c$

	по формуле функции; 3) определить знак a; 4) по знаку определить наибольшее (или наименьшее) значение функции: если $a > 0$, то $y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right)$ наименьшее значение функции; если $a < 0$, то $y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right)$ наибольшее значение функции.
Задача 8. Найти промежутки знакопостоянства квадратичной функции ($y > 0$ или $y \geq 0$).	**Правило 8.** Чтобы найти промежутки знакопостоянства квадратичной функции, надо: 1) составить неравенство $y > 0$ ($ax^2 + bx + c > 0$) или $y \geq 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0$); 2) решить полученное неравенство; 3) записать ответ в виде числового промежутка или промежутков.
Задача 9. Найти промежутки знакопостоянства квадратичной функции ($y < 0$ или $y \leq 0$).	**Правило 9.** Чтобы найти промежутки оси 0X, на которых квадратичная функция принимает только отрицательные (неположительные) значения, надо: 1) составить неравенство $y > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) или $y \geq 0$ ($ax^2 + bx + c \leq 0$); 2) решить полученное неравенство; 3) записать ответ в виде числового промежутка или промежутков.
Задача 10. Найти координаты вершины квадратичной функции.	**Правило 10.** Чтобы найти ***координаты вершины B(x_b; y_b)*** квадратичной функции ($y = ax^2 + bx + c$), надо: 1) найти абсциссу: $x_b = -\frac{b}{2a}$; 2) найти ординату: $y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$; 3) записать координаты точки $B(x_b; y_b)$.
Задача 11. Построить график квадратичной функции.	**Правило 11.** Чтобы построить ***график*** квадратичной функции (параболу), надо:

	1) вычислить координаты вершины параболы $B(x_b; y_b)$: $x_b = -\frac{b}{2a}$, $y_b = y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$; 2) составить таблицу для 5 значений x (не менее), одно из которых значение x_b, два — левее значения x_b и два — правее; 3) вычислить по формуле соответствующие значения y, заполнив таблицу; 4) построить систему координат; 5) изобразить точки, координаты которых значения x и y из таблицы; 6) построить параболу, соединив точки плавной линией.
Задача 12. Построить схематический график квадратичной функции.	**Правило 12.** Чтобы построить ***схематический график квадратичной функции*** — параболу, надо: 1) определить направление ветвей параболы по знаку коэффициента a: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз; 2) найти нули квадратичной функции; 3) изобразить систему координат; 4) нанести нули на ось OX и соответствующим образом направить ветви.
Задача. Найти область определения функции (ООФ).	**Правило (общее).** Чтобы найти ***область определения функции,*** надо: 1) установить вид выражения, стоящего в правой части формулы; 2) в соответствии с видом выражения записать ООФ: а) множество всех действительных чисел $(-\infty; +\infty)$, если это целое выражение, б) множество значений x, среди которых нет значений, обращающих знаменатель в ноль, если это дробное выражение; в) множество значений x, при которых подкоренное выражение неотрицательно (≥ 0), если это выражение содержит знак корня второй степени.

Таблица 2. Какие задачи можно решать с помощью графика квадратичной функции — параболы?



Задача 1. Определить значение аргумента *x* для данной точки параболы.	**Правило 1.** Чтобы определить **значение *x*** для данной точки параболы, надо: 1) найти абсциссу точки, которая является значением аргумента *x*; 2) выделить на параболе данную точку; 3) опустить из неё перпендикуляр на ось ОХ; 4) прочитать число, соответствующее концу перпендикуляра.
Задача 2. Определить значение функции *y* для данной точки параболы.	**Правило 2.** Чтобы определить **значение *y*** для данной точки параболы, надо: 1) найти ординату точки, которая является значением функции *y*; 2) выделить на параболе данную точку; 3) опустить из неё перпендикуляр на ось ОУ; 4) прочитать число, соответствующее концу перпендикуляра.
Задача 3. Определить координаты точек пересечения параболы с осью ОХ (нули функции).	**Правило 3.** Чтобы найти ***координаты точек пересечения параболы с осью ОХ***, надо: 1) выделить ось ОХ; 2) установить, есть ли точки, в которых парабола пересекает ось ОХ; 3) если да, то найти абсциссы этих точек; 4) записать координаты точек (помнить, что ординаты этих точек равны нулю).

Задача 4. Определить координаты точки пересечения параболы с осью ОУ.	**Правило 4.** Чтобы определить ***координаты точки пересечения параболы с осью ОУ***, надо: 1) выделить ось ОУ; 2) установить, в какой точке парабола пересекает ось ОУ; 3) найти ординату этой точки; 4) записать координаты точки (помнить, что абсцисса этой точки равна нулю).
Задача 5. По графику параболы установить значение коэффициента ***с***.	**Правило 5.** Чтобы по графику параболы установить ***значение коэффициента с***, надо: 1) определить точку пересечения параболы с осью ОУ; 2) найти ординату этой точки; 3) записать, что коэффициент ***с*** равен значению найденной ординаты.
Задача 6. Решить квадратное неравенство с помощью схематического графика параболы.	**Правило 6.** Чтобы решить ***квадратное неравенство*** с помощью схематического графика параболы, надо: 1) построить схематический график параболы; 2) выделить ту часть графика, которая соответствует смыслу неравенства ($y > 0$ — выше оси ОХ, $y < 0$ — ниже оси ОХ); 3) определить промежутки оси ОХ, соответствующие выделенным значениям у; 4) записать найденные промежутки. В случае нестрого неравенства следует включать соответствующие концы

Учащимся, испытывающим трудности в решении математических задач, можно посоветовать:

• Чтобы задача стала понятней, постарайся зрительно её представить себе, нарисовать картинку, смоделировать ситуацию.

• Внимательно рассматривай наглядную информацию, которая прилагается к задаче (рисунок, таблица, график и т.п.).

• Прочитай задачу вслух и вслушайся. Это позволит подключить слуховые навыки (которые могут быть сильнее, чем зрительные).

• Научись понимать условие и вопрос задачи.

• Проси образец решения. Его изучение тоже полезно. Никогда не бросай начатое решение. Будь настойчив!

• Проси дать или придумай самостоятельно пример из жизни, где требуется такое же решение.

• Больше времени уделяй заучиванию математических правил, формул, фактов. Пробуй произносить их ритмически или петь, или даже учить под музыку. Хорошо, если правила, формулы, таблицы будут вывешены перед тобой на стене около письменного стола.

• Опирайся на здравый смысл при решении задачи или выполнении задания. Пытайся выяснить, можно ли удовлетворить данное условие.

• Научись проверять каждый шаг решения.

• Постарайся быть уверенным в себе. Такой человек легче преодолевает любые препятствия и проблемы, а также справляется с задачами, которые надо решить.

• Вдумайся в слова Д. Пойа (венгерского математика): «Задача, которую вы решаете, может быть скромной. Но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным, и если вы решаете её собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы».

Первостепенна в обучении роль учителя. Сколько людей, пристрастившихся к математике, могут подтвердить, что этим увлечением они обязаны хорошему учителю! Сколько людей, для которых математика является запретной областью, сохранили недобрую память о тех, кто внушил им отвращение к ней и обескуражил их! И в самом деле, для того чтобы быть хорошим учителем математики в средней школе, недостаточно быть специалистом, имеющим углублённые познания в преподаваемых предметах. Желательно быть тонким и сведущим педагогом. Педагогическая жилка столь же необходима, как и специальность математика. В процессе преподавания математики учитель должен иногда забывать законченное знание, которое он хотел бы дать или привить, и следовать детской мысли, узнавая таким образом то, чему обучаются его ученики. Изучение путей, следуя которым учащиеся активно создают свою математику, приведёт к основным началам педагогики, позволит сделать математику интересной и устранить многие трудности.