Взаимосвязь методов школьной и высшей математики

Ирина Асланян,
учитель высшей категории, кандидат педагогических наук

Довольно часто учащиеся старших классов интересуются, не будут ли в дальнейшем бесполезны методы и приёмы, усвоенные ими на уроках математики при решении тех или иных заданий, пригодятся ли полученные знания в будущем, например, при получении высшего образования. Вопросы вполне закономерны, так как на уроках в школе в большинстве случаев недостаточно заостряется внимание учащихся на тех приёмах, которые встретятся им при дальнейшем обучении. Во многих вопросах ЕГЭ есть задания из курсов вузовской тематики. Это парадокс, но, к сожалению, сейчас он имеет место.

К сожалению, общеизвестно, что чем продолжительнее стаж работы учителя, тем больше отдаляется от него вузовская программа, и он, ограниченный рамками учебников, вынужден сосредоточивать всё своё внимание только на школьном курсе. Поэтому учителю математики зачастую нелегко отобрать в массе приёмов и методов, предлагаемых школьными учебниками, те, которые окажутся необходимы для продолжения образования по окончании школы. Вот почему важно внимательно отнестись к отбору и выделению наиболее значимых для дальнейшего обучения методов.

Не будем сейчас говорить о тех определениях, теоремах, методах решения, которые являются базовыми для школьного курса математики. Речь пойдёт о тех методах, способах и приёмах, которые применяются при решении заданий как в курсе школьной математики, так и высшей. При этом в средней школе им уделяется мало внимания, в то время как в вузах без них просто не обойтись. Постараюсь провести сравнительную линию по применению таких методов и уровня их сложности в школе и вузе.

В курсе высшей математики при решении систем линейных уравнений по формулам Крамера необходимо вычислить несколько определителей, ознакомиться с которыми желательно ещё в средней школе. Например, в сборниках для поступающих в ВУЗы часто встречаются системы линейных уравнений с параметрами, при решении которых целесообразнее применить формулы Крамера. Практика показывает, что из ряда возможных приёмов решения указанных систем этот метод наиболее понятен школьникам. Задания на применение формул Крамера можно предложить ученикам также при решении в 9-м классе систем линейных уравнений без параметров.

Рассмотрим решение подобного примера.

1) *Решить систему линейных уравнений*:

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ 4x-2y=10. \end{cases}$$

Решение. Если представить систему линейных уравнений в общем виде $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ то определители вычисляются по формулам:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

Тогда для данной по условию системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-2\cdot2-4\cdot3=-4-12=-16,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot9-10\cdot3=-18-30=-48,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=2\cdot10-4\cdot9=20-36=-16.$$

По формулам $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta_y}$ и $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ получаем: $x = (-48):(-16) = 3$, $y = (-16):(-16) = 1$.

Ответ: (3; 1).

При решении систем по этим формулам необходимо знать: если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение; если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq$, то система не имеет решения; если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет множество решений. Рассмотрим пример с параметром.

2) *Исследовать и решить систему уравнений*:

$$\begin{cases} ax+3y=5, \\ 4x+(4+a)y=10. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & 4+a \end{vmatrix}=a(4+a)-12=$$

$$=a^2+4a-12=(a+6)(a-2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 4+a \end{vmatrix}=5(4+a)-30=$$

$$=10+5a-10=5(a-2);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=10a-20=10(a-2).$$

Найдём значения параметра a, при которых $\Delta=0$: $(a+6)(a-2)=0$, $a_1=-6$, $a_2=2$. $\Delta_x=0$, если $a=2$ и $\Delta_y=0$, если $a=2$. Так как при $a=2$ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, то данная система уравнений имеет множество решений. При $a=-6$ $\Delta=0$, а $\Delta_x\neq0$ и $\Delta_y\neq0$, поэтому система не имеет решений. При $a\neq2$ и $a\neq-6$ система будет иметь единственное решение, равное: $x=\dfrac{a+6}{5}$; $y=\dfrac{a+6}{10}$.

Ответ: $\left(\dfrac{a+6}{5};\ \dfrac{a+6}{10}\right)$ при $a\neq2$ и $a\neq-6$; нет решений при $a=-6$; множество решений при $a=2$.

В курсе высшей математики указанный метод также используется при решении систем линейных уравнений второго, третьего и более высоких порядков. Рассмотрим его применение на следующем примере.

3) *Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера*.

$$\begin{cases} x+2y+z=2, \\ 3x+2y+3z=6, \\ 2x-2y-z=7. \end{cases}$$

Решение. Определитель третьего порядка будем вычислять по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 -$$

$$- a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 12 - 4 + 6 + 6 = 12,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 12 + 42 - 14 + 12 +$$

$$+12 = 36,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 21 + 12 - 12 -$$

$$-21 + 6 = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 + 24 - 8 + 12 -$$

$$-42 = -12.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 3,\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 0,$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -1.$$

Ответ: (3; 0; –1).

В некоторых темах высшей математики («Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения») применяется метод неопределённых коэффициентов, основу которого можно разобрать на примере решения текстовой задачи в любом классе.

4) *Задача*.

Три коробки болтов, 5 коробок гаек и 8 коробок гвоздей весят вместе 54 кг, а 5 коробок болтов, 7 коробок гаек и 2 коробки гвоздей весят вместе 32 кг. Сколько кг весят вместе 3 коробки болтов, 7 коробок гаек и 25 коробок гвоздей?

Решение. Решение привычным путём составления уравнений приводит к системе из двух уравнений с тремя переменными, которая имеет множество решений. Применение указанного метода неопределённых коэффициентов даёт однозначный результат.

Пусть x кг, y кг и z кг весят соответственно 1 коробка болтов, 1 коробка гаек и 1 коробка гвоздей. Тогда по условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+5y+8z=54, \\ 5x+7y+2z=32. \end{cases}$$

Из этой системы следует найти значение выражения $(3x+7y+25z)$. Представим искомое выражение в виде линейной комбинации выражений из системы:

$(3x+7y+25z) = \alpha\,(3x+5y+8z) + \beta\,(5x+7y+2z)$.

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые относительно x, y и z. Получаем: $(3x + 7y + 25z) = (3\alpha+5\beta)x + (5\alpha+7\beta)y + (8\alpha+2\beta)z$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых переменных в правой и левой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha+5\beta=3, \\ 5\alpha+7\beta=7, \\ 8\alpha+2\beta=25. \end{cases}$$

Сложим первое уравнение со вторым и вычтем третье, чтобы избавиться от переменной α.

$$\begin{cases}10\beta=-15,\\5\alpha+7\beta=7,\\8\alpha+2\beta=25.\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\beta=-1{,}5,\\5\alpha=7+10{,}5,\\8\alpha=25+3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-1{,}5,\\\alpha=3{,}5.\end{cases}$$

Тогда искомое выражение равно: $(3x+7y+25z) = 3{,}5(3x+5y+8z) - 1{,}5(5x+7y+2z) = 3{,}5\cdot54 - 1{,}5\cdot32 = 189 - 48 = 141$.

Ответ: 141.

Применим метод неопределённых коэффициентов для разложения дроби в виде суммы простейших дробей. При решении примеров с таким заданием достаточно ограничиться следующими теоретическими сведениями.

Дроби вида $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^\kappa}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\kappa}$, где κ = 2, 3, ...; A, B, a, p, q — постоянные, причём $p^2 - 4q < 0$ (т.е. выражение $x^2 + px + q$ нельзя разложить на линейные множители), называются простейшими.

Дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется неправильной, если $m \geq n$ и правильной, если $m<n$. Любую правильную рациональную дробь можно единственным образом разложить в виде суммы простейших дробей четырёх указанных видов с помощью метода неопределённых коэффициентов. В неправильной дроби необходимо предварительно выделить целую часть, о чём речь пойдёт ниже. При разложении правильной дроби в виде суммы дробей нужно помнить, что степень κ, с которой выражение стоит в знаменателе, указывает количество простейших дробей при разложении.

5) ***Разложить дробь в виде суммы простейших дробей***

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}.$$

Решение. Представим предварительно знаменатель в виде произведения: $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-3)$. Тогда данная дробь примет вид:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}.$$

По методу неопределённых коэффициентов её можно представить следующим образом:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-3}.$$

Приведём дроби в правой части выражения к общему знаменателю и преобразуем числитель полученной дроби.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x^2-2x+1)(x-3)+B(x^2-x)\cdot(x-3)+C(x^2-3x)+Dx(x^2-2x+1)}{x(x-1)^2(x-3)}=$$

$$=\frac{A(x^3-5x^2+7x-3)+B(x^3-4x^2+3x)+C(x^2-3x)+D(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2(x-3)}.$$

Рассмотрим отдельно числитель полученной дроби и сгруппируем в нём слагаемые по степеням переменной x.

$$A(x^3-5x^2+7x-3)+B(x^3-4x^2+$$

$$+3x)+C(x^2-3x)+D(x^3-2x^2+x)=$$

$$=x^3(A+B+D)+x^2(-5A-4B+$$

$$+C-2D)+x(7A+3B-3C+D)-3A.$$

Сравнивая полученное выражение с числителем исходной дроби x^2-2x+3, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ -5A-4B+C-2D=1, \\ 7A+3B-3C+D=-2, \\ -3A=3. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $A=-1$, тогда, подставляя это значение в три первых уравнения, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} B+D=1, \\ -4B+C-2D=-4, \\ 3B-3C+D=5, \\ A=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1-D, \\ -4(1-D)+C-2D=-4, \\ 3(1-D)-3C+D=5, \\ A=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1-D, \\ C=-2D, \\ 3-3D+6D+D=5, \\ A=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} B=0,5, \\ C=-1, \\ D=0,5, \\ A=-1. \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{0,5}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{0,5}{x-3}.$$

Ответ:

$$-\frac{1}{x}+\frac{0,5}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{0,5}{x-3}.$$

Этот пример показывает, что данным методом можно воспользоваться во многих темах школьной программы по математике, причём в различных классах, что нужно обязательно учитывать.

Ещё один приём, которому в последние годы уделено мало внимания в школьных учебниках математики, — деление «уголком» многочлена на многочлен. Его можно применить при решении уравнений высших степеней, при выделении целой части неправильной дроби, при упрощении выражений, а в курсе высшей математики — при интегрировании дробно-рациональных функций, при нахождении пределов от неправильных дробей и т.д.

6) ***Выделить целую часть дроби***

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}.$$

Решение. Деление «уголком» выполняется в виде: $x^5+x^4-8\,\underline{|x^3-4x}$.

Подбираем такое выражение, при умножении которого на x^3 получается x^5, то есть x^2. Получим:

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-4x^3} & x^2 \\ \quad x^4+4x^3 & \end{array}$$

Теперь делим x^4 на x^3 и получаем x:

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-4x^3} & x^2+x \\ \quad -x^4+4x^3 & \\ \quad\ \ \underline{x^4-4x^2} & \\ \qquad 4x^3+4x^2 & \end{array}$$

При делении $4x^3$ на x^3 получим 4.

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ \quad -x^4+4x^3 & \\ \quad\ \ \underline{x^4-4x^2} & \\ \qquad -4x^3+4x^2 & \\ \qquad\ \ \underline{4x^3-16x} & \\ \qquad\ \ 4x^2+16x-8. & \end{array}$$

Дальше деление продолжать невозможно, так как степень остатка меньше степени делителя.

Окончательно получаем:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Ответ: $x^2+x+4+\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$

Рассмотрим теперь применение двух последних методов в курсе высшей математики при решении примеров из темы «Интегральное исчисление».

7) ***Найти интеграл*** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Решение. Воспользуемся результатом примера №6 и запишем данный интеграл в виде:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=$$

$$=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx.$$

Первообразные для трёх первых слагаемых под знаком интеграла — простейшие, поэтому остаётся найти интеграл от дроби. Для этого разложим её в виде суммы простейших дробей с помощью метода неопределённых коэффициентов.

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{x^3-4x}=$$

$$=\frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x^3-4x}=$$

$$=\frac{x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A}{x^3-4x}.$$

Сравнивая числители первой и последней дробей, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}A+B+C=4,\\2B-2C=16,\\-4A=-8.\end{cases}$$

Из последнего уравнения A=2. Тогда, подставляя это значение в первое уравнение и сокращая второе уравнение на 2, имеем систему:

$$\begin{cases}B+C=2,\\B-C=8,\\A=2.\end{cases}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения, получим ответ:

$$\begin{cases}2B=10,\\2C=-6,\\A=2.\end{cases}\text{ или }\begin{cases}B=5,\\C=-3,\\A=2.\end{cases}$$

Значит, наш интеграл примет вид:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=$$

$$=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-$$

$$-3\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

Ответ:

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

К числу часто встречающихся как в курсе школьной, так и высшей математики методов относится и приём умножения на сопряжённое выражение. Например, в школе с помощью умножения числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряжённое знаменателю, возможно избавление от иррациональности в знаменателе дроби. Рассмотрим два примера, иллюстрирующие применение этого метода.

8) ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби***

$$\frac{6}{3\sqrt{2}+4}.$$

Решение. При умножении числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряжённое знаменателю, мы получаем в знаменателе разность квадратов, благодаря чему избавляемся от квадратных корней:

$$\frac{6}{3\sqrt{2}+4}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}=$$

$$=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{18-16}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{2}=3(3\sqrt{2}-4).$$

Ответ: $3(3\sqrt{2}-4)$.

9) ***Доказать, что***

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}=2.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель каждой из дробей в левой части равенства на выражение, сопряжённое соответствующему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}-$$

$$-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}=2,$$

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}+1-1}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1}=2,$$

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}}=2,$$

$$\sqrt{\sqrt{3}+1}+1-\sqrt{\sqrt{3}+1}+1=2,$$

2=2, что и требовалось доказать.

Очень редко этот метод используется при решении иррациональных уравнений, хотя в некоторых примерах его применение приводит к наиболее рациональному решению.

10) ***Решить уравнение***

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x. \ (*)$$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряжённое левой части.

$$(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5})\cdot$$

$$\cdot(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})=$$

$$=(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})3x,$$

$$2x^2+3x+5-2x^2+3x-5=$$

$$=(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})3x,$$

$$6x=(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})3x,$$

разделим обе части на 3,

$$2x=(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})x,$$

$$2x-(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})x-0,$$

$$x(2-\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5})=0.$$

Из условия равенства нулю произведения двух множителей получим два уравнения:

$x=0$ или

$$2-\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=0.$$

Решим последнее уравнение:

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$$

Сложим это уравнение с уравнением (*):

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}+$$

$$+\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=$$

$$=3x+2,$$

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2,$$

$$4(2x^2+3x+5)=(3x+2)^2,$$

$$8x^2+12x+20=9x^2+12x+4,$$

$$x^2=16,\ x=\pm 4.$$

Выполнив проверку, получаем, что уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Ответ: 4.

Теперь рассмотрим применение этого же метода в курсе высшей математики. В теме «Пределы» с помощью умножения на сопряжённое выражение вычисляются пределы, содержащие сумму или разность квадратных корней.

11) *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби под знаком предела на выражение $\sqrt{x^2-x-1}+1$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2-x-1}-1)(\sqrt{x^2-x-1}+1)}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)\ln(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-1-1}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)\ln(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)\ln(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)\ln(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)\ln(1+x-2)}.$$

Так как $\ln(x-1)$ при $x\to 2$ является бесконечно малой функцией, то её можно заменить эквивалентной по формуле $\ln(1+x)\sim x$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(\sqrt{x^2-x-1}+1)}=$$

$$=\frac{2+1}{\sqrt{2^2-2-1}+1}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

В теме «Комплексные числа» действие умножения на сопряжённое число является основой деления двух комплексных чисел.

12) *Вычислить*

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}.$$

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю, затем раскроем скобки, приведём подобные слагаемые, учтём, что $i^2=-1$ и, наконец, умножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю.

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}=$$

$$=\frac{(1-3i)(3i-1)+(4i+1)(i-2)}{(i-2)(3i-1)}=$$

$$=\frac{3i-1-9i^2+3i+4i^2-8i+i-2}{3i^2-i-6i+2}=$$

$$=\frac{-5i^2-i-3}{3i^2-7i+2}=\frac{5-i-3}{-3-7i+2}=\frac{2-i}{-1-7i}=$$

$$=\frac{(2-i)(-1+7i)}{(-1-7i)(-1+7i)}=\frac{-2+14i+i-7i^2}{1-49i^2}=$$

$$=\frac{5+15i}{50}=0{,}1+0{,}3i.$$

Ответ: $0{,}1+0{,}3i$.

Разобранные примеры наглядно показывают, что при правильном подборе заданий и обдуманном применении методов и приёмов решения возможно максимально сократить разрыв между курсами школьной и высшей математики. При этом у учащихся сложится правильное восприятие математики как цельной науки, не разбитой на темы, разделы, части. Для формирования мировоззрения обучаемых это намного важнее, чем запоминание определённого количества формул без умения их применения.

Учитель имеет возможность до 25% корректировать курс школьной математики, поэтому при вдумчивом подборе материала сможет даже за ограниченное количество часов, отведённых на изучение курса алгебры в школе, подготовить учащихся к качественной сдаче ЕГЭ и поступлению в вузы.