Табличный метод решения задач на концентрацию вещества

Ирина Асланян,
учитель высшей категории, кандидат педагогических наук

В новой редакции примерных заданий для проведения ЕГЭ по математике текстовые задачи идут под номером B12 и относятся к обязательным, хотя в прошлогодних материалах такие задачи относились к повышенному уровню. Этот факт свидетельствует о неоднозначном отношении авторов материалов ЕГЭ к подобным заданиям. Проблема решения задач такого рода состоит в том, что в старших классах этому виду заданий уделяется немного времени, а решение аналогичных заданий из младших классов уже не отвечает уровню их сложности.

Особенно большие трудности испытывают учащиеся при решении задач на концентрацию веществ в смеси или сплаве. Такой вид задач можно предлагать ученикам лишь после начала изучения химии, то есть после 8-го класса. Как показывает практика, именно такие задания вызывают у учащихся наибольшие трудности.

Предлагаю материал, который в некоторой степени призван разрешить эту проблему. В своей работе я уже много лет отрабатываю табличный метод решения задач на смеси и сплавы в работе с выпускниками. Метод был хорошо воспринят, понят и одобрен учениками с различным уровнем математической подготовки, что свидетельствует о его универсальности.

Стандартная таблица для решения задач на сплавы и смеси выглядит следующим образом:

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**
1-е вещество	m_1	m_2	$m = m_1 + m_2$
2-е вещество	M_1	M_2	$M = M_1 + M_2$
% 1-го вещества	P_1	P_2	$P \quad P_1 + P_2$
Всего	$M_1^* = m_1 + M_1$	$M_2^* = m_2 + M_2$	$M^* = M_1^* + M_2^* = m + M$

Следует обратить особое внимание на строчку с процентами, чтобы учащиеся не допускали ошибки, складывая проценты одного вещества в разных сплавах.

Основная формула для решения подобных задач:

$p=\frac{m_{вещества}}{m_{сплава}}\cdot 100\%$ – концентрация вещества в сплаве.

В обозначениях, принятых в стандартной таблице, формула примет вид:

$$P=\frac{m}{M^*}\cdot 100\%.$$

В задачах на концентрацию уравнение составляется, как правило, по последнему столбцу, хотя встречаются различные варианты.

Рассмотрим различные виды задач со смесями и сплавами.

1. Чаще всего встречаются задачи, в которых известны процентные содержания одного и того же вещества как в двух исходных сплавах, так и в сплаве, полученном после их соединения.

Задача. Сколько литров 20%-го раствора кислоты надо добавить к 5 л 40%-го раствора кислоты, чтобы получить раствор с 23% содержанием кислоты?

Решение. По условию задачи получим первую таблицу.

	1-й раствор	**2-й раствор**	**Итого**
Кислота			
% кислоты	20	40	23
Всего		5	

Обозначим через x объём первого раствора и выразим через x все неизвестные по условию величины.

	1-й раствор	**2-й раствор**	**Итого**
Кислота	$0{,}2x$	2	$0{,}2x + 2$
% кислоты	20	40	23
Всего	x	5	$x + 5$

По данным последнего столбца с помощью указанной формулы получим уравнение с одной переменной, из которого и найдём x.

$\frac{0{,}2x+2}{x+5}=\frac{23}{100},\ 23x+115=20x+200,$

$3x=85,\ x=\frac{85}{3}=28\frac{1}{3}.$

Ответ: $28\frac{1}{3}$ л.

2. Одна из смесей содержит лишь один элемент. В таком случае процент вещества может быть равен 0 или 100, что не всегда понятно учащимся.

Задача. Морская вода содержит 5% по весу соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 80 кг морской, чтобы содержание соли в последней составило 2%?

Решение. Составим первоначальную таблицу, внеся в неё исходные данные.

	Морская вода	**Пресная вода**	**Итого**
Вода			
Соль		0	
% соли	5	0	2
Итого	80		

Из таблицы видно, что первый столбец полностью заполняется по общей массе и процентному содержанию соли. В качестве переменной выберем количество добавляемой пресной воды, поэтому таблица примет следующий вид.

	Морская вода	**Пресная вода**	**Итого**
Вода	76	x	$76 + x$
Соль	4	0	4
% соли	5	0	*2*
Итого	80	x	$80 + x$

По последнему столбцу составляем уравнение.

$$\frac{4}{80+x}100=2,\quad \frac{4}{80+x}=\frac{1}{50},$$

$$80+x=200,\quad x=120.$$

Ответ: 120 кг.

3. Вторая смесь (одно вещество, как правило, вода) вычитается из первой смеси (испаряется, выпаривается). Сложность таких задач в том, что слово «вода» может совсем не присутствовать в условии задачи, поэтому ученики должны представить процесс, описываемый в формулировке задания, чтобы понять, какие вещества занести в таблицу. К таким задачам относятся: сушка грибов, ягод, трав и т. п., потеря или увеличение массы хранящихся на базе овощей, фруктов за счёт соответственно пониженной или повышенной влажности воздуха, получение мёда из цветочного нектара и так далее.

Задача. Влажность свежескошенной травы 60%, а сена — 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

Решение. Составляя первую таблицу, учтём, что сено получается из свежей травы после испарения большей части воды и 1 тонну лучше выразить в килограммах. Кроме этого, в таблице можно не указывать массу вещества травы, поскольку эта величина не будет задействована при составлении уравнения.

	Трава	**Вода**	**Сено**
Вода			
% воды	60	100	15
Всего	1000		

Примем в качестве переменной количество испарившейся при сушке сена воды.

	Трава	**Вода**	**Сено**
Вода	600	x	$600-x$
% воды	60	100	15
Всего	1000	x	$1000-x$

Получаем уравнение:

$$\frac{600-x}{1000-x}100=15,\quad \frac{600-x}{1000-x}=\frac{3}{20},$$

$$12000-20x=3000-3x,\quad 17x=9000,$$

$$x=529\frac{7}{17}.$$

Значит, из 1 тонны травы получится 1000 – 529 = 470 кг сена.

Ответ: $470\frac{10}{17}$ кг.

4. Исходное условие задачи не содержит % веществ, но указаны части каждого вещества без указания масс как в соединяемых смесях, так и в полученной в итоге. Проблематичность этого вида задач состоит в том, что переменных необходимо ввести две, а уравнение получается одно. Задачи такого плана практически не встречаются в школьных учебниках, поэтому воспринимаются учениками достаточно сложно. Ещё одна особенность таких задач заключается в необходимости подсчёта частей веществ, приходящихся на каждый сплав в отдельности. Поясним последнее предложение на примере.

Задача. Два металла содержатся в каждом из двух взятых сплавов, причём в первом они находятся в отношении 1:2, во втором — 3:2. В каком отношении нужно взять части этих сплавов, чтобы получить новый сплав с отношением металлов 8:7?

Решение. В этой задаче необходимо сразу уяснить, что первый сплав состоит из 3-х частей металлов, а второй — из 5 частей. Следовательно, на первый металл в первом сплаве приходится $^1/_3$, во втором сплаве — $^3/_5$ части массы от всего сплава. Для второго металла эти показатели равны $^2/_3$ и $^2/_5$. Тогда для итогового сплава части металлов равны соответственно $^8/_{15}$ и $^7/_{15}$. С учётом этих данных составим таблицу, обозначив массу первого сплава через x, а второго — через y.

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**
1-й металл	$^1/_3x$	$^3/5y$	$^8/_{15}(x+y)$
2-й металл	$^2/_3x$	$^2/_5y$	$^7/_{15}(x+y)$
Всего	x	y	$x+y$

По первой строке получаем уравнение $\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}y=\frac{8}{15}(x+y)$.

Умножив обе части уравнения на 15, получим: $5x + 9y = 8x + 8y$ или $y = 3x$. Значит, необходимо взять одну часть первого сплава и три части второго.

Ответ: 1:3.

5. Процентное содержание вещества указывается только в итоговом сплаве, а в исходных сплавах — только массы, и от каждого из исходных сплавов берётся лишь его часть. Трудность решения такого вида задач в том, что необходимо догадаться вычислить процент содержания вещества по исходным данным.

Задача. Первый сплав серебра и меди содержит 70 г меди, а второй сплав — 210 г серебра и 90 г меди. Взяли 225 г первого сплава и кусок второго сплава, сплавили их и получили 300 г сплава, содержащего 82% серебра. Сколько граммов серебра содержалось в первом сплаве?

Решение. Ошибочное решение большинства учащихся начинается с того, что масса серебра в первом сплаве вычисляется как $225 - 70 = 155$. Необходимо сразу представить, что от каждого сплава берётся по куску, поэтому масса серебра в первом сплаве просто неизвестна. Следовательно, примем эту массу в качестве неизвестной x. Тогда масса первого сплава равна $x + 70$, а процент содержания серебра в нём равен $p=\frac{x}{70+x}100\%$. Для второго сплава масса равна $210 + 90 = 300$ г, поэтому содержание серебра в нём: $p=\frac{210}{300}100=70\%$.

Внесём эти данные в первую таблицу.

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**
Серебро			
Медь		70	82
% серебра	$\frac{x}{70+x}100$		
Всего	225		300

Из таблицы видно, что масса второго сплава равна $300 - 225 = 75$ г. Тогда количество серебра в этом сплаве равно 52,5 г (70%), а меди $75 - 52,5 = 22,5$ г. Аналогично, в итоговом славе серебра 246 г., а меди — 54 г. По первому столбцу вычислим количество серебра в сплаве. Для этого разделим 225 на 100 и умножим на $\frac{x}{70+x}100$. Получаем $\frac{225x}{70+x}$. Обратим внимание на то, что количество меди в первом сплаве можно не высчитывать, поскольку уравнение в этой задаче можно составить по первой строке таблицы. В вычислении количества меди во всех сплавах вообще не было необходимости, но этот факт выяснился лишь в процессе заполнения таблицы. Получаем вторую таблицу.

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**
Серебро	$\frac{225x}{70+x}$	52,5	246
Медь		22,5	54
% серебра	$\frac{x}{70+x}100$	70	82
Всего	225	75	300

Уравнение по первой строке имеет вид:

$$\frac{225x}{70+x}+52,5=246,$$

$$\frac{225x}{70+x}=193,5,$$

$225x = 13545 + 193,5x,$
$31,5x = 13545,$
$x = 430.$

Ответ: 430 г.

6. К числу наиболее сложных задач на концентрацию веществ относятся задачи, связанные с неоднократным переливанием смесей и вычислением концентрации в полученной смеси. В таких задачах необходимо хорошо развитое воображение, поскольку очень важно вначале просто представить все описанные в задании процессы. Кроме этого, после каждого переливания необходимо высчитывать концентрацию вещества, иначе после последнего переливания это невозможно будет сделать.

Задача. В колбе было 800 г восьмидесятипроцентного спирта. Провизор отлил из колбы 200 г этого спирта и добавил в неё 200 г воды. Определить концентрацию (в %) полученного спирта.

Решение. Вычислим вначале % спирта в оставшихся 600 г исходного раствора спирта. В 800 г первоначального раствора чистого спирта будет $\frac{800}{100}80=640$ г. В 200 г отлитого 80%-го спирта будет $\frac{200}{100}80=160$ г чистого спирта и 200–160=40 г воды. Значит, в 600 г раствора спирта останется 640 – 160 = 480 г спирта и 160 – 40 = 120 г воды.

Составим первоначальную таблицу.

	1-й раствор	**2-й раствор**	**Итого**
Спирт	480	0	
Вода	120	200	
% спирта	80	0	
Всего	600	200	

В итоге всё решение задачи сводится к прибавлению масс спирта, воды и раствора по строкам и вычисления % спирта по последнему столбцу. Выполним все вычисления во второй таблице.

	1-й раствор	**2-й раствор**	**Итого**
Спирт	480	0	480
Вода	120	200	320
% спирта	80	0	x
Всего	600	200	800

Из последнего столбца получим уравнение $x=\frac{480}{800}100.$

Отсюда $x = 60.$

Ответ: 60%.

7. Также очень сложны для понимания учеников задачи с несколькими смешиваниями одних и тех же сплавов, но различной массы или с различными сплавами. В этих заданиях таблица бывает довольно громоздкой, но в итоге решить такую задачу по таблице всё же легче, чем просто с помощью рассуждений. Таблица позволяет представить всю задачу целиком. Проблематичность решения с помощью рассуждений состоит в необходимости удерживать в памяти одновременно большое количество данных, что в большинстве случаев сложно для учащихся. Приведём несколько примеров подобного типа задач.

Задача. Если к сплаву олова и меди добавить 10 г олова, то его содержание в сплаве увеличится на 10%. Если же к первоначальному сплаву добавить 30 г меди, то содержание олова в сплаве уменьшится на 15%. Найти первоначальный вес сплава и концентрацию олова в нём.

Решение. По условию задачи составим первоначальную таблицу.

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**	**3-й сплав**	**Итого**
Олово		10		0	
Медь		0		30	
% олова		100	Больше на 10%	0	Меньше на 15%
Всего		10		30	

Теперь необходимо грамотно ввести переменные, причём по условию задачи видно, что их должно быть две.

	1-й сплав	**2-й сплав**	**Итого**	**3-й сплав**	**Итого**
Олово	x	10	$x + 10$	0	x
Медь	$y - x$	0	$y - x$	30	$y - x + 30$
% олова	$\frac{x}{y}100\%$	100	$\frac{x+10}{y+10}100\%$	0	$\frac{x}{y+30}100\%$
Всего	y	10	$y + 10$	30	$y + 30$

Столбец «Итого» получился сложением двух первых сплавов. Последний столбец получился сложением 1 и 3 сплавов. Необходимо ещё раз подчеркнуть, что только строка с процентами не суммируется.

Из условия известно, что процентное содержание олова в первом итоговом сплаве на 10% больше, чем в первоначальном, а во втором итоговом — на 15% меньше, чем в первом сплаве. Исходя из этих условий, составим систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{x+10}{y+10}100 - \frac{x}{y}100 = 10, \\ \frac{x}{y}100 - \frac{x}{y+30}100 = 15. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на 100 и приведём левые части к общему знаменателю.

$$\begin{cases} \frac{x+10}{y+10} - \frac{x}{y} = \frac{1}{10}, \\ \frac{x}{y} - \frac{x}{y+30} = \frac{3}{20}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{xy+10y-xy-10x}{y(y+10)} = \frac{1}{10}, \\ \frac{xy+30x-xy}{y(y+30)} = \frac{3}{20}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10y-10x}{y(y+10)} = \frac{1}{10}, \\ \frac{10x}{y(y+30)} = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

Применим свойства пропорции.

$$\begin{cases} 100y - 100x = y^2 + 10y, \\ y^2 + 30y = 200x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 90y = -100x, \\ y^2 + 30y = 200x. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым.

$3y^2 - 150y = 0,\ y = 0$ или $y = 50$.

Поскольку 0 не подходит по смыслу задачи, то значение х найдём только для $y = 50$.

$$\begin{cases} y = 50, \\ x = 20. \end{cases}$$

Значит, вес первоначального сплава равен 50 граммам, а концентрация олова $\frac{20}{50} = 0{,}4$.

Ответ: 50 г, 0,4.

Задача. Имеются два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Найдите, сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе? В ответе записать, сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе.

Решение. По условию задачи составим первоначальную таблицу, обозначив равные массы растворов через А.

	1-й р-р	**2-й р-р**	**Итого**	**3-й р-р**	**4-й р-р**	**Итого**
Кислота						
% кислоты			35			36
Всего	4	6		A	A	

Введём две переменные x и y, обозначив через них количество кислоты в 1-м и 2-м растворах соответственно.

	1-й р-р	**2-й р-р**	**Итого**	**3-й р-р**	**4-й р-р**	**Итого**
Кислота	x	y	$x + y$	$\frac{Ax}{4}$	$\frac{Ay}{6}$	$\frac{Ax}{4} + \frac{Ay}{6} = \frac{A(3x+2y)}{12}$
% кислоты	$\frac{x}{4}100\%$	$\frac{y}{6}100\%$	$\frac{x+y}{10}100 = 35$	$\frac{x}{4}100\%$	$\frac{y}{6}100\%$	$\frac{3x+2y}{24}100 = 36$
Всего	4	6	10	A	A	2A

Из четвёртого и седьмого столбцов выписываем получившиеся уравнения.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{10}100 = 35, \\ \frac{3x+2y}{24}100 = 36. \end{cases}$$

Разделим на 100 оба уравнения.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{10} = \frac{7}{20}, \\ \frac{3x+2y}{24} = \frac{9}{25}. \end{cases}$$

По свойству пропорции получим:

$$\begin{cases} 20x + 20y = 70, \\ 75x + 50y = 216. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 75x + 50y = 216. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на (-25), сложим его со вторым.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 25x = 41. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y = 1{,}86, \\ x = 1{,}64. \end{cases}$$

Ответ: 1,64.

Задача. Имеются два раствора серной кислоты в воде, первый — 40%-ный, второй 60%-ный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько было 40%-ного и 60%-ного растворов?

Решение. Внесём в первую таблицу условие задачи, заполнив полностью данные о третьем и четвёртом растворах.

	1-й р-р	**2-й р-р**	**3-й р-р**	**Итого**	**4-й р-р**	**Итого**
Кислота			0		4	
Вода			5		1	
% кислоты	40	60	0	20	80	70
Всего			5		5	

Обозначим переменными x и y массы первоначальных растворов и заполним по строкам таблицу.

	1-й р-р	**2-й р-р**	**3-й р-р**	**Итого**	**4-й р-р**	**Итого**
Кислота	$0{,}4x$	$0{,}6y$	0	$0{,}4x + 0{,}6y$	4	$0{,}4x + 0{,}6y + 4$
Вода	$0{,}6x$	$0{,}4y$	5	$0{,}6x + 0{,}4y + 5$	1	$0{,}6x + 0{,}4y + 6$
% кислоты	40	60	0	$\frac{0{,}4x+0{,}6y}{x+y+5}100$	80	$\frac{0{,}4x+0{,}6y+4}{x+y+5}100=70$
Всего	x	y	5	$x + y + 5$	5	$x + y + 5$

Из итоговых столбцов получим два готовых уравнения.

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}4x+0{,}6y}{x+y+5}100=20, \\ \dfrac{0{,}4x+0{,}6y+4}{x+y+5}100=70. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}4x+0{,}6y}{x+y+5}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{0{,}4x+0{,}6y+4}{x+y+5}=\dfrac{7}{10}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=x+y+5, \\ 4x+6y+40=7x+7y+35. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+y=5. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на (-2) и сложим с первым.

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ -5x=-5. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y=2, \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: 1 и 2 кг.

Подводя некоторые итоги разбора табличного метода решения задач на смеси и сплавы, следует особо подчеркнуть, что свободное решение таких заданий требует достаточно обширной и разнообразной практики по их решению. Поэтому статья может помочь лишь в той мере, в какой учитель (и, следовательно, его ученики) попытается применить на практике описанный выше метод решения такого вида задач.

Краснодарский край