# Задача о софизмах

Г.Е. Юбко

**Автор:** Юбко Галина Евгеньевна, учитель математики средней школы № 3 г. Спасск-Дальний Приморского края.

**Предмет:** Математика.

**Класс:** 7.

**Тема:** Преобразования многочленов.

**Профиль:** Общеобразовательный.

**Уровень:** Минимальный.

**Текст задачи.** Софи́зм — ложное умозаключение, которое при поверхностном рассмотрении кажется правильным. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Очень интересны математические софизмы древнегреческих философов-математиков Зенона, Прокла, Перрона. «Авторские» математические софизмы: парадокс Зенона — «Ахиллес никогда не догонит черепаху», софизм Прокла — «Две непараллельные на плоскости прямые не пересекаются», софизм Перрона — «Единица есть наибольшее натуральное число». Например, неравные числа равны или все числа равны между собой. Возьмём два неравных между собой произвольных числа a и b. Пусть их разность равна c, т.е. $a - b = c$. Умножив обе части этого равенства на $a - b$, получим $(a - b)^2 = c\,(a - b)$, а раскрыв скобки, придём к равенству $a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb$, из которого следует равенство $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$. Вынося общий множитель a слева и общий множитель b справа за скобки, получим

$$a\,(a - b - c) = b\,(a - b - c) \qquad (1)$$

Разделив последнее равенство на $(a - b - c)$, получаем, что $a = b$, другими словами, два неравных между собой произвольных числа a и b равны.

Какое правило нарушено сознательно?

*а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.*

*б) Найдите и соберите необходимую информацию.*

*в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.*

*г) Сделайте выводы.*

*д) Сравните ваши выводы с выводами известных людей.*

### Возможные информационные источники

*Книги:*

*Мадера А.Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы. М.: Просвещение, 2003.

*Обреимов В.И.* Математические софизмы. Спб.: Наука,1989.

*Web-сайты:*

*http://festival.1september.ru/articles/313456/.*

## Культурный образец

*http://ru.wikipedia.org/wiki/Софизм*

Софизм (от греч. sophisma, «мастерство, умение, хитрая выдумка, уловка») — умозаключение или рассуждение, обосновывающее какую-нибудь заведомую нелепость, абсурд или парадоксальное утверждение, противоречащее общепринятым представлениям. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Каким бы ни был софизм, он всегда содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Математический софизм — удивительное утверждение, в доказательстве которого кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки. История математики полна неожиданных и интересных софизмов, разрешение которых порой служило толчком к новым открытиям. Математические софизмы приучают внимательно и насторожённо продвигаться вперед, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записи чертежей, за законностью математических операций. Очень часто понимание ошибок в софизме ведёт к пониманию математики в целом, помогает развивать логику и навыки правильного мышления. Если нашёл ошибку в софизме, значит, ты её осознал, а осознание ошибки предупреждает от её повторения в дальнейших математических рассуждениях.

Пожалуй, особенно поучительна в этом отношении история аксиомы Евклида о параллельных прямых. Сформулировать эту аксиому можно так: через данную точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной (что одну прямую, параллельную данной, можно провести — это доказывается). Это утверждение на протяжении более чем двух тысяч лет пытались доказать, вывести из остальных аксиом геометрии, но все попытки не увенчались успехом. Полученные «доказательства» оказались ошибочными. И всё же, несмотря на ошибочность этих «доказательств», они принесли большую пользу развитию геометрии. Можно сказать, что они подготовили одно из величайших достижений в области геометрии и всей математики — создание неевклидовой геометрии. Честь разработки новой геометрии принадлежит нашему великому соотечественнику Н.И. Лобачевскому и венгерскому математику Яношу Бойяи. Н.И. Лобачевский и сам сначала пытался доказать аксиому параллельных, но скоро понял, что этого сделать нельзя. И путь, идя которым, Лобачевский убедился в этом, привёл его к созданию новой геометрии. Этот замечательный вклад в математику был одним из тех, которые прославили русскую науку.

Аристотель называл софизмами «мнимые доказательства», в которых обоснованность заключения кажущаяся и обязана чисто субъективному впечатлению, вызванному недостаточностью логического или семантического анализа. Убедительность, на первый взгляд, многих софизмов, их «логичность» обычно связаны с хорошо замаскированной ошибкой — семиотической: за счёт метафоричности речи, омонимии или полисемии слов, амфиболий и пр., нарушающих однозначность мысли и приводящих к смешению значений терминов, или же логической: подмена основной мысли (тезиса) доказательства, принятие ложных посылок за истинные, несоблюдение допустимых способов рассуждения (правил логического вывода), использование «неразрешённых» или даже «запрещённых» правил или действий, например деления на нуль в математических софизмах.

Разбор софизмов прежде всего развивает логическое мышление, т.е. прививает необходимые в жизни навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку в софизме — это значит осознать её, а осознание ошибки предупреждает повторение её в дальнейшем в других математических рассуждениях. Когда ребёнок раз притронется к горячему предмету, то впоследствии он постарается этого не делать. Он будет много осторожнее. Так и изучающий математику впоследствии проявит больше осторожности, чтобы не повторить осознанную ошибку.

Далее, что особенно важно, разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого математического материала, развивает наблюдательность, вдумчивость и критическое отношение к тому, что изучается. Когда изучающий математику разбирает софизм, он знает, что может попасть в западню, а поэтому старается обезвредить её. Чтобы не попасть в ловушку, приходится очень внимательно продвигаться вперёд и каждый шаг делать с большой осторожностью. Вопрос стоит так: кто кого подчинит себе, софизм ли разбирающего его или наоборот? Значит, математические софизмы заставляют внимательно и насторожённо продвигаться вперёд, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей, за допустимостью обобщений, за законностью выполняемых операций. Всё это нужно и полезно. Наконец, разбор софизмов увлекателен.

Теперь рассмотрим предложенный в задаче софизм.

Возьмём два неравных между собой произвольных числа $a$ и $b$. Пусть их разность равна $c$, т. е. $a - b = c$. Умножив обе части этого равенства на $a - b$, получим $(a - b)^2 = c\,(a - b)$, а раскрыв скобки, придем к равенству $a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb$, из которого следует равенство: $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$. Вынося общий множитель $a$ слева, и общий множитель $b$ справа за скобки, получим $a\,(a - b - c) = b\,(a - b - c)$. Разделив последнее равенство на $(a - b - c)$, получаем, что $a = b$, другими словами, два неравных между собой произвольных числа $a$ и $b$ равны.

Разбор софизма. Здесь ошибка совершена при переходе от равенства (1) к равенству $a = b$. Действительно, согласно условию разность двух произвольных чисел $a$ и $b$ равна $c$, т. е. $a - b = c$, откуда $a - b - c = 0$. Можно записать равенство (1) в виде $a - 0 = b - 0$. Переход от равенства (1) к равенству $a = b$ осуществляется путем деления обеих частей (1) на равное нулю число $a - b - c = 0$. Следовательно, здесь мы имеем деление нуля на нуль, которое не имеет смысла, поскольку равенство $a \times 0 = b \times 0$ выполняется при любых $a$ и $b$. Поэтому вывод, сделанный в софизме, что числа $a$ и $b$ равны, неверен.

Точно так же можно доказать, что «два умножить на два будет пять». Рассмотрим этот пример: $2 \times 2 = 4$;

4 : 4 = 5 : 5; вынесем за скобки слева 4, справа 5

4 (1 : 1) = 5 (1 : 1), разделим левую и правую части на (1:1), получим 4 = 5, откуда следует **2 × 2 = 5.**

Если софизм «не поддаётся», то надо обязательно обратиться за разъяснениями к учителю. Очень важно добиться отчётливого понимания ошибок, иначе софизмы будут бесполезны и, может быть, даже вредны.

### Методический комментарий

Цели применения математических софизмов на уроках математики могут быть самыми разнообразными:

- изучение исторического аспекта темы;
- создание проблемной ситуации при объяснении нового материала;
- проверка уровня усвоения изученного материала;
- для занимательного повторения и закрепления изученного материала.

Математические софизмы в зависимости от содержания и «прячущейся» в них ошибки можно применять с различными целями на уроках математики при изучении различных тем.

При разборе математического софизма выделяются основные ошибки, «прячущиеся» в нём:

1) деление на 0;

2) неправильные выводы из равенства дробей;

3) неправильное извлечение квадратного корня из квадрата выражения;

4) нарушения правил действия с именованными величинами;

5) путаница с понятиями «равенство» и «эквивалентность» в отношении множеств;

6) проведение преобразований над математическими объектами, не имеющими смысла;

7) неравносильный переход от одного неравенства к другому;

8) выводы и вычисления по неверно построенным чертежам;

9) ошибки, возникающие при операциях с бесконечными рядами и предельным переходом.

Самыми популярными являются ошибки 1–3.

Начиная с этого урока, ребята с нетерпением ждут новых математических софизмов.

Хотелось бы рекомендовать коллегам использовать математические софизмы более разнообразно в своей практике. Это сделает изучение математики более увлекательным. Огромную помощь окажет им замечательная книга А.Г. Мадеры и Д.А. Мадеры «Математические софизмы».