Стратегии[1] комбинаторики и теории вероятностей: методика обучения

В.В. Лебедев

Современная российская действительность предъявляет особые требования к комбинаторному мышлению подрастающего поколения, в том числе к их возможностям предвидеть, рассчитывать вероятность наступления того или иного события. Введение в школе основ комбинаторики и теории вероятностей в качестве одной из своих задач ставит развитие именно такого мышления.

В основе ниже рассматриваемых стратегий лежит идея подхода, применяемого современным менеджментом для выстраивания и налаживания эффективного производства, оптимального управления проектами, — теория ограничений Элияху Голдратт[2].

Основным понятием комбинаторики является понятие множества — неупорядоченного или упорядоченного. Эти понятия впервые встречаются учащимся в курсе математики и от того, насколько чётко они будут соотносить предъявленные им множества с одним из этих классов, зависит степень овладения и осознания ими понятий комбинаторики, умения применять их в соответствующих контекстах.

В комбинаторике множество рассматривается с точки зрения того, что можно с ним сделать, или как одно множество соотнести с другим. Исходя из этого понятие неупорядоченного множества можно описать как некий набор элементов, связанных между собой лишь отношением принадлежности данному множеству, т.е. по отношению друг к другу элементы этого множества обладают неограниченной (качественно) свободой взаиморасположения и взаимосвязей. Понятие упорядоченного множества можно описать как множество, на котором задан некоторый порядок, т.е. элементы его либо ограничены в свободе взаиморасположения (произведена их фиксация в множестве), либо на множестве задана какая-то структура, либо каждому элементу присвоена возможность оказывать воздействие на элементы другого множества, причём воздействия не одинаковые, но связанные (порядок через последовательность, структуру воздействия, действия).

[1] Стратегия — хорошо спланированная серия действий для достижения какой-либо цели. Словарь современного английского языка. 2000. С.1426.

[2] Детмер У. Теория ограничений Голдратт: Системный подход к непрерывному совершенствованию. М., 2007.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пусть дано неупорядоченное числовое множество А = {1; 2; 5; 7}.

Для того чтобы учащиеся могли представить, что элементы неупорядоченного множества не ограничены в свободе взаиморасположения, можно предложить следующее описание: множество карточек с написанными цифрами подбрасывается вверх, и в момент, пока они падают, мы имеем неупорядоченное множество. Как только карточки легли на пол, мы можем считать их положение зафиксированным, а множество — упорядоченным относительно этой фиксации.

Используя это множество, можно получить упорядоченные множества. Так, В = (1; 2; 5; 7) получено введением на А порядка — отношение «не меньше», С = (7; 5; 2; 1) — не больше, Г = (1; 5; 2; 7) и Е = (7; 1; 5; 2) — фиксацией элементов, т.е. ограничением свободы взаиморасположения.

Рассмотрим теперь нечисловые множества. Пусть дано множество L (L — «люди»). Это множество неупорядоченное, так как на его элементы не наложены никакие ограничения, на этом множестве нет никаких отношений, т.е. с точки зрения действенной направленности элементы L могут заниматься любой деятельностью, функционировать вне зависимости от остальных, между ними нет никакой структурной связи. Здесь следует оговорить, что мы абстрагируемся от социальных и биологических структур, которые связывают всех людей.

Возьмём для рассмотрения следующие множества, составленные из данного:

K — «редакционное бюро»;

D — «дежурные в группе»;

I — «игроки сборной».

Перед нами стоит задача разобраться, настолько ли «сильны» **ограничения**, наложенные на элементы множества L, что ими установлен действенный порядок элементов, установлена взаимосвязь между ними.

Множество K: каждый его элемент обладает строго определённым действием и все его элементы связаны между собой определённой структурой (структура редакционного бюро). Таким образом K — упорядоченное множество.

Множество D: его элементы несут одинаковую действенную нагрузку, и с точки зрения порядка они неразличимы, т.е. D — неупорядоченное множество. На этом множестве легко показать, как достаточно наложить на его элементы небольшое ограничение, и мы получим упорядоченное множество. Например, пусть в этом множестве один дежурный — старший, другой подметает пол, третий его моет, четвёртый моет парты и т.д. Элементы стали действенно различимы, и множество приобрело порядок.

Таким образом, учащимся достаточно дать ориентировку на неупорядоченное множество как множество, элементы которого действенно неразличимы, т.е. множество (нечисловое) как бы составлено из одного, но тиражируемого элемента. Тогда множество с действенно различимыми элементами они правильно и без ошибок относят к упорядоченным множествам.

Множество I нельзя без дополнительных ограничений отнести ни к упорядоченным, ни к неупорядоченным, так как неизвестно, о какой сборной идёт речь — это может быть сборная и по волейболу, и по шахматам, и по городкам, и по футболу.

Мы считаем, что для полноценного формирования понятий необходимо давать примеры множеств, которые нельзя сразу отнести к какому-либо из рассматриваемых классов. Например, про множество Р — «путёвки» нельзя сказать, что оно упорядоченное, но нельзя сказать, что оно и неупорядоченное. Вводя **ограничения** Р — «путёвки одинаковые» или Р — «путёвки различные», мы можем отнести его как к одному классу множеств, так и к другому.

После того как сформировано действие распознавания множеств на упорядоченность через определение наличия ограничений, можно переходить к введению понятий комбинаторики. Для того чтобы эти понятия учащиеся увидели в неразрывной связи и переходах от одного понятия к другому, их необходимо формировать одновременно, применяя при этом для наглядности графы.

Покажем некоторые фрагменты возможного введения понятий.

Даются три задачи, которые решаются с применением графов.

1. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из четырёх учащихся?

2. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из четырёх учащихся так, чтоб один из них был старшим дежурным?

3. Сколькими способами можно расставить четырёх дежурных на четырёх этажах?

Однотипность основного множества в задачах позволяет, не отвлекаясь на частности, проследить изменения в характере решений в зависимости от характеристик множеств, которыми мы оперируем (упорядоченность, число элементов). Кроме того, при анализе и решении таким образом подобранных задач получаем числовые зависимости, отражающие характеристические свойства понятий. Графы вышеуказанных задач рассмотрены на рисунке 1 на с. 50.

Как видно из представленных графов, в первой задаче речь идёт об изменении состава подмножества без его организации (неупорядоченное). Во второй задаче — об изменении состава подмножества с одновременной его организацией (упорядоченностью). В третьей задаче мы наглядно видим различные варианты организации (упорядочения) всего множества.

Таким образом, мы оперируем тремя основными понятиями комбинаторики: сочетанием, размещением, перестановкой. Учащимся можно предложить самим дать определения этих понятий после того, как будут выделены их существенные признаки.

Обобщая эти определения, можно, например, сказать, что:

сочетание — это любое (неупорядоченное) подмножество некоторого множества;

размещение — это любое упорядоченное подмножество некоторого множества;

перестановка — это результат любого упорядочивания всего данного множества (с учётом числа элементов и порядка в подмножествах).

Введённые таким образом понятия легко позволяют установить переход от одного понятия к другому; установить, какое из них является по отношению к какому общим, какое — частным.

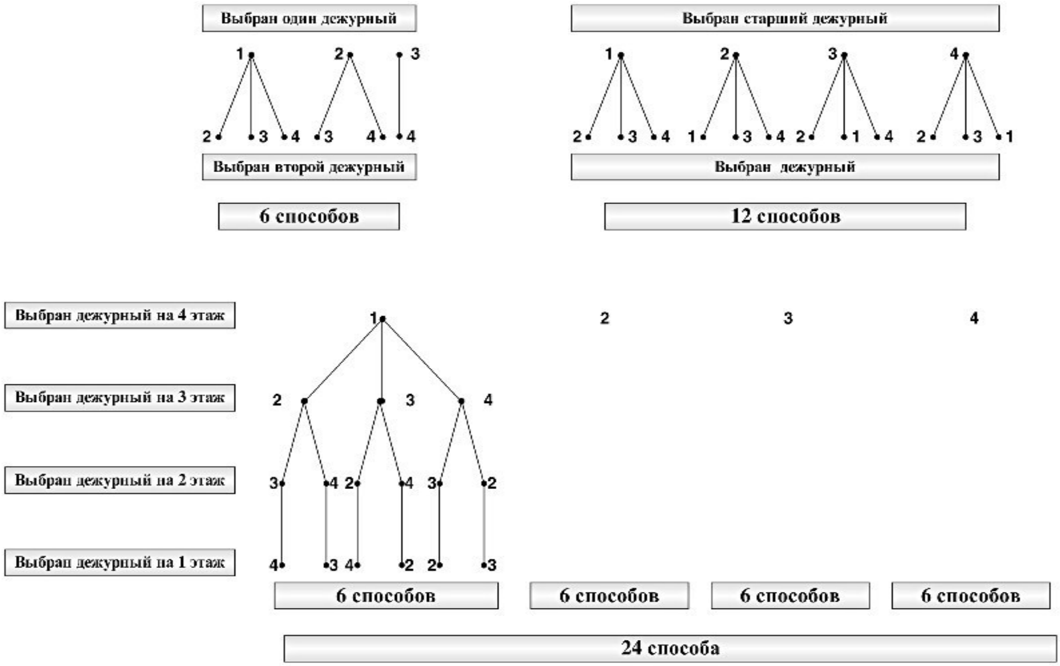

Рис. 1. Графы задач на распределение дежурных

Так, сочетание является обобщением для размещения и перестановки. Из него может быть получено размещение введением дополнительного ограничения на элементы подмножества — упорядочения; перестановка — расширением числа элементов подмножества до всего множества и их упорядочением, т.е. двумя ограничениями.

Если обозначения числа сочетаний C_n^k, размещений A_n^k и перестановок Pn будем считать за символы самих понятий, то возможно построение следующей графической схемы перехода от одного понятия к другому (схема их взаимосвязи):

$$C_n^k \xrightarrow{\text{упорядочивание}} A_n^k \xrightarrow{\quad k=n \quad} P_n$$

Кроме того, анализ полученных графов в рассмотренных задачах, а также полученной взаимосвязи (общее, частное) позволяет устанавливать количественные взаимосвязи между числом сочетаний, размещений и перестановок: прямо пропорциональные или обратно пропорциональные, что даёт возможность легко вывести соответствующие формулы вычисления числа сочетаний, размещений и перестановок из каких-либо заданных множеств.

После того как сформированы вышеперечисленные понятия и действия, а также сформировано умение работать с формулами, можно переходить к решению задач.

Решение задач по комбинаторике основано на использовании надпредметной деятельности — подведения под понятие.

Для анализа условия задачи мы предлагаем следующую деятельностно-смысловую схему (рис. 2).

Можно также создать соответствующий алгоритм, предназначенный для анализа условий задачи, но мы отказались от него вследствие его громоздкости.

Деятельностно-смысловая схема, с нашей точки зрения, характеризуется динамичностью, простотой чтения и быстротой запоминания в ходе работы с ней.

Поясним предложенную схему.

Первым шагом выделяется множество, о котором идёт речь в задаче, и определяется число его элементов. **Вторым шагом** выясняется, о чём идёт речь: о самом множестве или о его подмножестве, сколько в нём элементов. **Третьим шагом** определяется, упорядоченное это подмножество или нет. Затем относим задачу к сочетанию, размещению или перестановке.

Предложенная схема — это общий подход к решению задач по комбинаторике, которая может видоизменяться: уменьшаться, увеличиваться, применяться несколько раз при решении одной и той же задачи и т.д. Кроме того, если двигаться от висячих вершин к связанным вершинам графа (схемы) по соответствующим ветвям, мы получим определения соответствующих понятий (сочетание — неупорядоченное подмножество множества и т.д.)

Рассмотрим применение общей деятельностно-смысловой схемы к решению конкретных задач.

Задача 1. Из 10 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в одновременно проходящих олимпиадах по математике, черчению, физике и литературе. Сколькими способами это можно сделать, если все учащиеся хорошо знают эти предметы?

1. Множество — «учащиеся», n = 10.

2. Подмножество — «учащиеся, идущие на олимпиаду», k = 4.

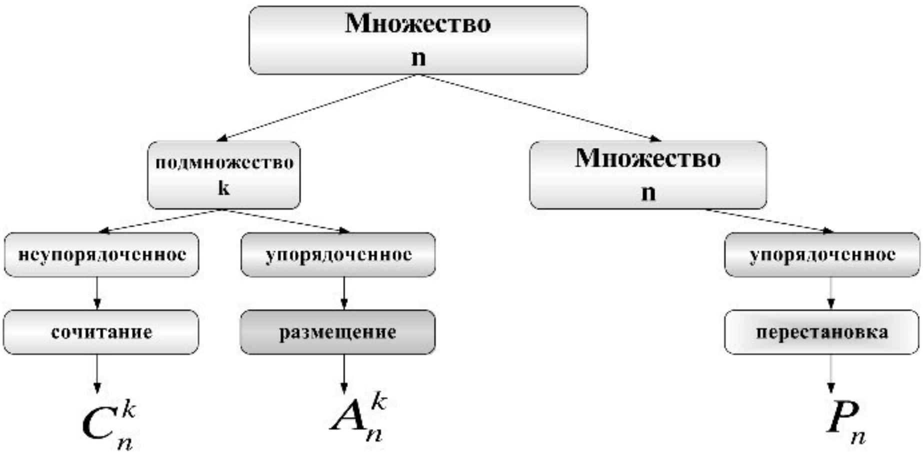

Рис. 2. Деятельностно-смысловая схема анализа задач по комбинаторике

3. Упорядоченное (порядок определяется функцией (деятельностью) учащегося в подмножестве).

4. Задача относится к размещению (по определению):

$$A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Задача 2. В здании детского лагеря живут трое вожатых и 60 детей. Сколькими способами можно выделить одного вожатого и 10 детей для уборки здания?

Так как мы имеем два множества, то:

А)	Б)
1. Множество — «вожатые», n = 3. 2. Подмножество — «вожатый», k = 1 3. Неупорядоченное (вожатый 1). 4. Сочетание C_3^1	1. Множество — «дети», n = 60. 2. Подмножество — «дети», k = 10 3. Неупорядоченное (так как имеют одинаковые функциональные значения). 4. Сочетание C_{60}^{10}

Взаимосвязь:

$$\overset{1}{C_{60}^{10}} \quad \overset{2}{C_{60}^{10}} \quad \overset{3}{C_{60}^{10}}$$

В Б) можно сделать размещения, если в условие задачи внести ограничения, что каждый из 10 детей должен заниматься определённой работой и работа проводится одновременно.

Рассмотрим задачи с «фиксацией элемента».

Задача 3. Сколькими способами из 12 разноцветных проводов можно выбрать три так, чтобы: а) один был зелёным; б) ни один не был красным?

Здесь, как видим, явная фиксация элементов, следовательно, для решения необходимо выявить, на что этой фиксацией будет наложено ограничение.

1. Множество — «цветные провода», n = 12.

2. Подмножество — «выбранные цветные провода», k = 3.

3. Неупорядоченное подмножество.

После общего анализа рассматриваем вводимые ограничения и определяем, на что они наложены:

а) один в подмножестве всегда зелёный — выбираем зелёный и фиксируем его в подмножестве. Таким образом,

n стало равно 11
k стало равно 2 $\longrightarrow C_{11}^{2}$

Ограничения наложены как на число элементов множества, так и на число элементов подмножества;

б) ни один не будет красным, следовательно, красный исключается из самого множества, его не должны выбирать.

Итак, n = 11
k = 3 $\longrightarrow C_{11}^{3}$

Ограничение наложено на число элементов множества.

Уже из общего анализа задачи можно сделать вывод, что ограничения могут накладываться на все три составные части условия комбинаторных задач: множество, подмножество, упорядоченность, причём в различных взаимосвязях.

В данной задаче ограничения коснулись элементов множества и подмножества.

Рассмотрим задачу, в которой ограничения накладываются на порядок в подмножестве.

Задача 4. На пять сотрудников выделено три путёвки. Сколькими способами их можно распределить между ними, если: а) путёвки одинаковы; б) путёвки различны?

Ограничение: а) присваивает путёвкам одну и ту же функцию: C_5^3.

Ограничение: б) делает их функционально различными: A_5^3.

Для формирования полноценного умения решать задачи по комбинаторике особое значение имеют задачи с внутренними скрытыми ограничениями, накладываемыми структурой самого подмножества.

Задача 5. Дано множество цифр {1; 3; 0; 4; 5}. Найти а) сколько пятизначных чисел из него можно составить; б) сколько среди них чётных.

а) Множество —
«цифры», n = 5
1. Подмножество —
«цифры», k = 5
2. Упорядоченное

$\longrightarrow P_5$

Ограничение: числа пятизначные, следовательно, 0 на первом месте исключается. Найдём число таких перестановок, у которых 0 на первом месте (задача с фиксацией).

Выбираем из множества 0 и фиксируем его в подмножестве

{0…}:
n стало равно 4
k стало равно 4

$\longrightarrow P_4$

Итак, 5-значных чисел $P_5 - P_4$

б) Условие чётности — это ограничение на число элементов в множестве и подмножестве с фиксацией чётного числа на конце, но с учётом п. а):

1. (… 0) P_4
2. (… 4) P_4
(0… 4) P_3
$2P_4 - P_3$

$\longrightarrow = P_4 - P_3 \longrightarrow 2P_4 - P_3$

Мы считаем, что введение в учебный процесс задач, условия которых позволяют двойственную трактовку возможных ограничений (задачи 2, 4), полезно для более глубокого понимания учащимися смысла комбинаторных понятий.

Можно рекомендовать учащимся из какой-либо данной задачи создать задачу, относящуюся к другим понятиям, введением соответствующих ограничений или же снятием каких-либо ограничений. Например, в задаче 1, сняв или изменив ограничение «хорошее знание предметов учащимися», мы получим возможность создать другой тип задачи.

Рассмотрим теперь возможные пути алгоритмизации процесса решения задач по теории вероятностей.

Необходимо отметить, что в зависимости от выделяемых на эту тему часов можно идти по трём направлениям.

1. Используя комбинаторику и классическое определение вероятности события.

2. Используя определение вероятности события и аксиомы теории вероятностей.

3. Используя и комбинаторику, и аксиомы (определения). Этот путь, с нашей точки зрения, оптимален для формирования деятельности, направленной на решение задач.

Рассмотрим первый путь.

По определению P(A) = l/m, где l — число случаев, благоприятных событию A, из числа m — всех случаев, возможных в данном опыте, причём число случаев конечно. При ориентации на эту формулу возможна такая процедура анализа и решения задач.

Алгоритм 1.

1. Определить (и обозначить A) событие, вероятность которого требуется найти.

2. Определить (и обозначить) все случаи, возможные в данном опыте. Убедиться, что они удовлетворяют условиям случаев.

3. Определить, какие среди них случаи благоприятны для A.

4. Найти вероятность события A.

Задача 1. В некотором непрозрачном устройстве перемешиваются два шара, красный и синий. При нажатии кнопки один шар вылетает из устройства и падает в него обратно. Определить вероятность появления синего шара хотя бы один раз при двух, с отсрочкой, нажатиях кнопки.

1. Событие, вероятность которого требуется найти: A — хотя бы один раз появится синий шар.

2. Возможны следующие случаи:

A_1 — синий шар появится только при первом нажатии;

A_2 — синий шар появится только при втором нажатии;

A_3 — синий шар появится при каждом нажатии;

A_4 — синий шар не появится ни при каком из нажатий.

Для событий A_1, A_2, A_3, A_4 выполняются все условия случаев:

1 — они несовместимы; 2 — равновозможные (по условию опыта); 3 — образуют полную группу (хотя бы одно из них обязательно произойдёт).

Таким образом, m = 4.

3. Благоприятными для A являются события {A_1; A_2; A_3}, т.е. l = 3

4. P(A) = 3/4

Задача 2. В коробке лежат 25 транзисторов, 4 из них отличаются номиналом. Какова вероятность того, что пять взятых наугад транзисторов окажутся одинаковыми?

1. A — (взятые транзисторы одинаковые).

2. Всего случаев

1. Множество — «транзисторы», n = 25
m 2. Подмножество — «выбранные транзисторы», k = 5
3. Неупорядоченное

$\longrightarrow C_{25}^{5}$

Краткая запись:

1. n = 25
m 2. k = 5
3. Неупорядоченное

$\longrightarrow C_{25}^{5}$

3. Благоприятные случаи (т.е. выбор одинаковых транзисторов — фиксация):

1. n = 21
l 2. k = 5
3. Неупорядоченное

$\longrightarrow C_{21}^{5}$

4. $P(A) = \dfrac{C_{21}^{5}}{C_{25}^{5}}$

Задача 3. В ящике 15 одинаковых на ощупь кубиков с различной окраской (6 красных и 9 зелёных). Наудачу извлекают 2 кубика. Какова вероятность того, что они разного цвета?

1. A — (извлечённые кубики разного цвета).

2.

1. $n = 15$
m 2. $k = 2$
3. Неупорядоченное

$\longrightarrow C_{15}^{2}$

3.

1. $n_к = 6$ 1. $n_з = 6$
l 2. $k_к = 1$ 2. $k_з = 1$
3. Неупорядоченное

$\longrightarrow C_6^1 \cdot C_9^1$

4. $P(A) = \dfrac{C_6^1 \cdot C_9^1}{C_{15}^2}$

Рассмотрим подходы к алгоритмизации решения задач по теории вероятностей по направлениям 2 и 3.

Для формирования деятельности, направленной на решение задач с применением аксиом, необходимо предварительно научить учащихся работать с событиями: т.е. находить сумму событий и произведение; представлять событие через составляющие его случаи; устанавливать характер взаимосвязи между событиями (совместные — несовместные, зависимые — независимые и т.д.). Кроме того, для целенаправленного освоения указанных действий необходимо, с учётом выделенных часов, определить типовые задачи, которые ученики должны будут решать. Типы задач могут быть классифицированы по событиям, вероятность которых требуется найти.

Перечислим некоторые из них.

I. Задачи, в которых требуется найти вероятность появления:

а) одного из нескольких событий; б) все возможные события; в) хотя бы одно из данных событий; г) только одно (два и т.д.) из данных событий и т.д.

II. Задачи с неопределённостью в условии.

Для задач первого типа можно создать алгоритмы а, б, в и т.д. или же некоторый обобщённый алгоритм. Как показывает опыт, лучше давать учащимся обобщённый алгоритм.

Алгоритм 2.

1. Определить (и обозначить А, В и т.д) событие, вероятность которого требуется найти.

2. Выделить среди возможных событий события, благоприятные для А (или события, через которые можно выразить события, благоприятные для А), или разбить А на благоприятные (составляющие его) события.

3. Выразить событие А через благоприятные события.

4. Определить взаимосвязь между благоприятными событиями (учитывая связывающие их операции).

5. Применить соответствующую аксиому (аксиомы).

6. Вычислить вероятности событий.

Рассмотрим применение алгоритма и его вариации к следующей задаче.

Задача 4. Из 10 независимо работающих станций четыре передают спортивную информацию. Одним приёмником прослушиваются три наугад выбранные станции. Найти вероятность того, что:

а) все они передают спортивную информацию; б) хотя бы одна передаёт спортивную информацию в) только две передают спортивную информацию.

а)

1. Событие, вероятность которого требуется найти: А — (все прослушанные станции передают спортивную информацию).

2. Благоприятные события (событию А):

A_1 — 1-я станция передаёт спортивную информацию;

A_2 — 2-я станция передаёт спортивную информацию;

A_3 — 3-я станция передаёт спортивную информацию;

3. $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

4. События A_1, A_2, A_3 зависимые.

5. $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$

6. $P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

Решение с помощью комбинаторики:

1. А.

2.

1. n = 10
m 2. k = 3
3. Неупорядоченное $\longrightarrow C_{10}^3$

3.

1. n = 4
l 2. k = 3
3. Неупорядоченное $\longrightarrow C_4^3$

4. $P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3}$

б)

1. В — (хотя бы одна из выбранных станций передаёт спортивную информацию).

Для решения этого типа задач рационально найти сначала В, а затем воспользоваться формулой P(B) = 1 – $P(\bar{B})$. Поэтому в первом шаге вводим событие, противоположное В: $\bar{B}$ — (все выбранные станции не передают спортивную информацию).

2. Благоприятные для $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$.

3. $\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.

4. $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ — зависимые события.

5. $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3/\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$

$P(\bar{B}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{30}$

6. $P(B)\ 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

С помощью комбинаторики.

$P(B)\ 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$.

в)

1. С — (только две станции передают нужную информацию).

2. A_1, A_2, A_3 — события, через которые можно выразить благоприятные события.

3. $C = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$

4. A_1, A_2, A_3 — независимые события.

5. $P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(\bar{A}_3/A_1 \cap \bar{A}_2) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2/\bar{A}_1) \cdot P(A_3/\bar{A}_1 \cap A_2)$

6. $P(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0{,}3$

С помощью комбинаторики.

$$P(C) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = 0{,}3.$$

Часть задач с неопределённостью в условии (которая раскрывается некоторой системой гипотез) относится к задачам, решаемым с помощью формулы полной вероятности. Для их решения можно предположить следующий алгоритм.

Алгоритм 3.

1. Определить (и обозначить) событие, вероятность которого требуется найти.

Если в условии есть неопределённость относительно выделенного события, то — шаг 2. Если нет, то — алгоритмы 1, 2.

2. Раскрыть неопределённость системой гипотез (H_1, H_2, H_3, … H_n).

3. Найти вероятности гипотез, провести контроль

$$\left(\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1\right).$$

4. Найти условные вероятности события A.

5. Применить формулу полной вероятности.

Задача 5. В одной из урн содержится 20 шаров, из них 4 жёлтых, в другой 10 шаров, из них 6 жёлтых. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что взятый шар жёлтый.

1. A — взятый шар жёлтый.

2. Неопределённость относительно события A — неизвестно, какого цвета эти два шара:

H_1 — оба шара не жёлтые;

H_2 — только один шар жёлтый;

H_3 — оба шара жёлтые.

3. Каждая гипотеза зависит от того, какие шары извлечены из урны. При нахождении вероятностей гипотез воспользуемся алгоритмом 2.

а) 1. H_1 — все шары не жёлтые.

2. $\bar{A}_1$ — из первой урны извлечён не жёлтый шар;

$\bar{A}_2$ — из первой урны извлечён не жёлтый шар;

3. $H_1 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$

4. $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ — независимые события.

5. $P(H_1) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = \dfrac{16}{20} \cdot \dfrac{4}{10} = 0{,}32$

б) $H_2 = (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2)$;
$P(H_2) = 0{,}56$

в) $H_3 = A_1 \cap A_2$; $P(H_3) = 0{,}12$

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$

4. $P(A/ H_1) = 0$; $P(A/ H_2) = 0{,}5$;
$P(A/ H_3) = 1$

5. $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/ H_1) + P(H_2) \cdot P(A/ H_2) + P(H_3) \cdot P(A/ H_3) = 0{,}4$

Ответ: Вероятность появления жёлтого шара равна 0,4.

Подводя итог, можно отметить, что, давая учащимся методы анализа и решения задач в алгоритмизированном виде, мы тем самым даём им деятельностный подход, который позволяет проникнуть в логическую глубь этих задач, понять характер взаимосвязей между событиями и явлениями, существующими не только в комбинаторике и теории вероятностей, но и в жизни.