

Графы

Л.И. Дружинина

Автор: Дружинина Людмила Ивановна, учитель математики средней школы № 45 г. Калининграда.

Предмет: Математика.

Класс: 7–9.

Тема: Теория вероятностей.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Средний.

Текст задачи: На рисунке «Схема дорог» изображена схема дорог между сёлами *М*, *А*, *Б*, *В* и *Г*. Здесь каждые две вершины соединены между собой ребром. Пусть в селе *М* находится почта и почтальон должен развезти письма в остальные четыре села. Существует много различных маршрутов поездки. Как из них выбрать наикратчайший?

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните свои выводы с предложенным образом.

Возможные информационные источники

Книги

Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика, 1985.

Малаховский В.С. Введение в математику: Учеб. издание. Калининград: Янтар. Сказ, 1998.

Детская энциклопедия. Т. 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика, 1972.

Математика. Школьная энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996.

Интернет-ресурсы

<http://www.krugosvet.ru>

<http://slovari.sosh.ru/slovo>.

<http://ru.wikipedia>.

<http://nauka.relis.ru>

<http://www.math.omsu.omskred.ru/info/learn/system/>

Культурные образцы

Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика, 1985.

Графы

Графом в математике называется конечная совокупность точек, называемых вершинами, некоторые из них соединены друг с другом линиями, называемыми рёбрами графа.

При взгляде на географическую карту сразу бросается в глаза сеть железных дорог. Это типичный граф: кружочки обозначают станции — вершины графа, а соединяющие их пути — рёбра.

Существует много различных маршрутов поездки. Как из них выбрать наикратчайший?

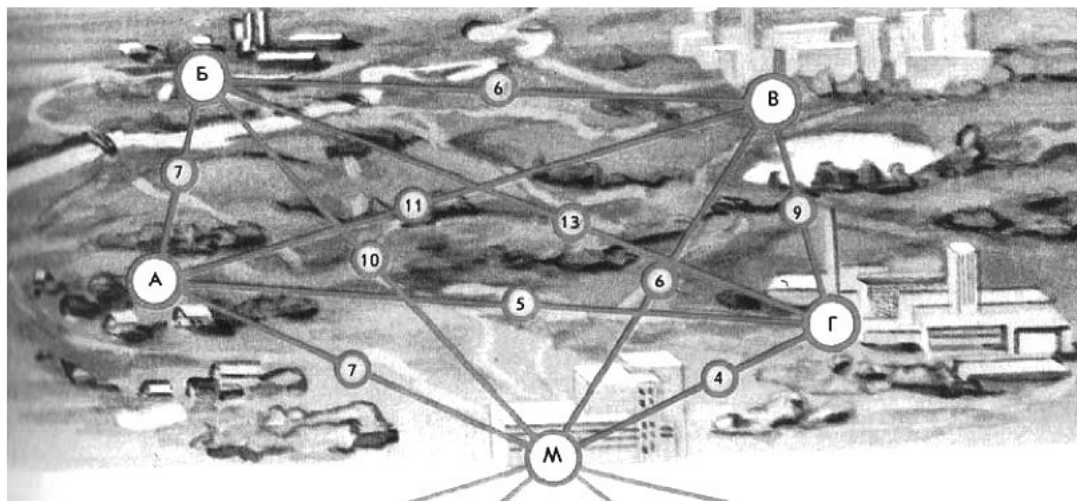


Рис. 1. Схема дорог

Граф на рисунке «Схема дорог» изображает схему дорог между селами М, А, Б, В и Г. Здесь каждые две вершины соединены между собой ребром. Такой граф называется полным. Числа на рисунке указывают расстояния между сёлами по этим дорогам. Пусть в селе М находится почта и почтальон должен развезти письма в остальные четыре села. Существует много различных маршрутов поездки. Как из них выбрать кратчайший? Проще всего проанализировать все варианты. Сделать это поможет новый граф (рисунок «Возможные маршруты»), на котором легко увидеть возможные маршруты. Вершина М вверху — начало маршрутов. Из неё можно начать путь четырьмя различными способами: в А, в Б, в В или в Г. После посещения одного из сёл остаётся три возможности продолжения маршрута, потом две, потом дорога в последнее село и вновь в М. Всего $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ спо-

соба. Все они представлены на этом графе.

Рассставим вдоль его рёбер цифры, обозначающие расстояния между сёлами, а в конце каждого маршрута напишем сумму этих расстояний по маршруту. Из полученных 24 чисел наименьшими являются два числа по 28 км, соответствующие маршрутам М-В-Б-А-Г-М и М-Г-А-Б-В-М. Заметим, что это один и тот же путь, но пройденный в разных направлениях. Подобные задачи возникают часто при нахождении наилучших вариантов развозки товаров по магазинам, материалов по стройкам.

В строительстве графы используются при планировании проведения работ. Граф, изображённый на рисунке «Сетевой график строительства», называется сетевым графиком строительства. В данном случае он составлен для строительства жилого дома. Вершины этого графа обозначают отдельные виды работ на строи-

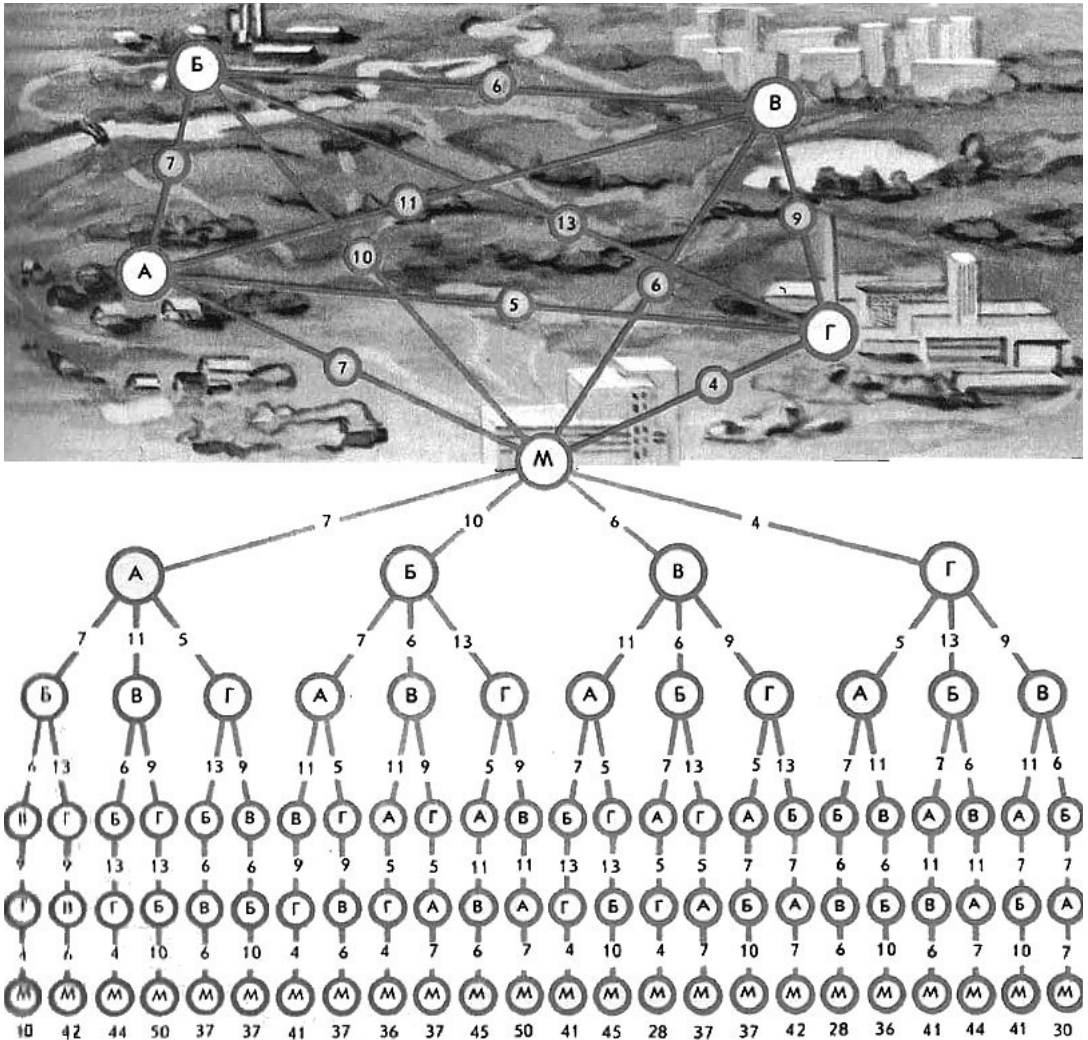


Рис. 2. Возможные маршруты

ке, кроме того, есть ещё две вершины: начало строительства и его окончание. Если на рёбрах графа нанесены стрелочки, указывающие направление рёбер, то такой граф называют направленным. Заметим, что и граф

на рисунке «Возможные маршруты» тоже можно было сделать направленным, указав направление сверху вниз на каждом из рёбер, что соответствовало бы направлению движения почтальона.

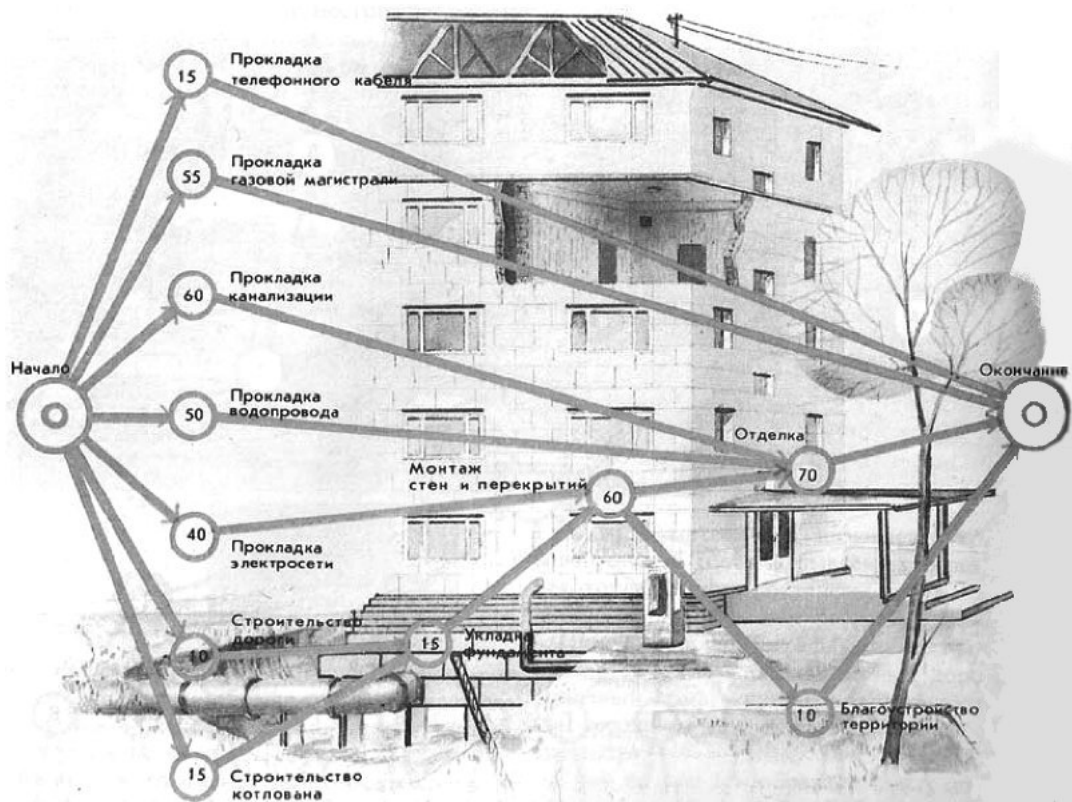


Рис. 3. Сетевой график строительства

Стрелка от работы А к работе В на графе, изображённом на рисунке «Сетевой график строительства», означает, что работа В не может начаться раньше, чем кончится работа А. Нельзя начинать монтаж стен, не закончив строить фундамент; чтобы приступить к отделке, нужно иметь на этажах воду, для сварочных работ при монтаже нужно иметь подвод электричества и т. д.

Около вершин графа указаны числа — продолжительность в днях соответствующей работы. Теперь мы можем узнать наименьшую возмож-

ную продолжительность строительства. Для этого из всех путей по графу в направлении стрелок нужно выбрать путь, у которого сумма чисел при вершинах наибольшая. Он называется критическим путём. В нашем случае получаем 170 дней. А если сократить время прокладки электросети с 40 до 10 дней, то и время строительства тоже сократится на 30 дней? Нет. В этом случае критический путь станет проходить не через эту вершину, а через вершины, соответствующие строительству котлована, укладке фундамента и т. д. И об-

щее время строительства составит 160 дней, т.е. срок сократится лишь на 10 дней.

Графы часто используют для решения логических проблем, связанных с перебором вариантов. Для примера рассмотрим такую задачу.

В ведре 8 л воды, и имеется две кастрюли ёмкостью 5 и 3 л. Требуется отлить в пятилитровую кастрюлю 4 л воды и оставить в ведре 4 л, т.е. разлить воду поровну в ведро и большую кастрюлю.

Ситуацию в каждый момент можно описать тремя числами (x, y, z) , где x — количество литров воды в ведре, y — в большой кастрюле, z — в меньшей. В начальный момент ситуация описывалась тройкой чисел $(8, 0, 0)$, от неё мы можем перейти в одну из двух ситуаций: $(3, 5, 0)$, если наполним водой большую кастрюлю, или $(5, 0, 3)$, если наполним меньшую кастрюлю.

В результате получаем два решения: одно в 7 ходов, другое в 8 ходов.

Подобным образом можно составить граф любой позиционной игры: шахмат, шашек, «крестиков-ноликов», где позиции станут вершинами, а направленные отрезки между ними будут означать, что одним ходом можно перейти от одной позиции к другой по направлению стрелки.

Однако для шахмат и шашек такой граф будет очень большим, поскольку различные позиции в этих играх исчисляются миллионами. А вот для игры в «крестики-нолики» доске 3×3 соответствующий граф нарисовать не так уж трудно, хотя и он будет содержать несколько десятков (но не миллионов) вершин.

Свойства графов не зависят от того, соединены вершины отрезками или кривыми линиями, что даёт возможность изучения их свойств с помощью одной из молодых наук — **топологии**.

Впервые основы теории графов появились в работе Л. Эйлера, где он описывал решения головоломок и математических развлекательных задач. Широкое развитие теория графов получила с 50-х гг. XX в. в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники.

<http://ru.wikipedia.org/wiki/>

В математической теории графов и информатике **граф** — это совокупность объектов со связями между ними.

Объекты представляются как **вершины**, или **узлы** графа, а связи — как **дуги**, или **рёбра**. Для разных областей применения виды графов могут различаться направленностью, ограничениями на количество связей и дополнительными данными о вершинах или рёбрах.

Многие структуры, представляющие практический интерес в математике и информатике, могут быть представлены графами. Например, строение Википедии можно смоделировать при помощи ориентированного графа (орграф), в котором вершины — это статьи, а дуги (ориентированные рёбра) — это связи, созданные гиперссылками.

<http://festival.1september.ru/articles/529693/>

Теория графов — наука сравнительно молодая. Первая работа по

теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру. Она появилась в 1736 году в публикациях Петербургской академии наук и начиналась с рассмотрения задачи о Кёнигсбергских мостах. Графы придали условиям наглядность, упростили решение и выявили сходство задач. Сейчас почти в любой отрасли науки и техники встречаешься с графами: в электротехнике при построении электрических схем, в химии — при изучении молекул и их цепочек, в экономике — при решении задач выбора оптимального пути для потоков грузового транспорта. Граф — это фигура, состоящая из точек и линий.

Теория графов — одна из немногих областей математики, дата рождения которых может быть указана. Первая работа о графах, принадлежащая швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707–1783), появилась в 1736 г. в публикациях Петербургской академии наук.

Заслуги Эйлера как крупнейшего учёного и организатора научных исследований получили высокую оценку ещё при его жизни. Помимо Петербургской и Берлинской академий, он состоял членом крупнейших научных учреждений: Парижской АН, Лондонского королевского общества и других.

Одна из отличительных сторон творчества Эйлера — его исключительная продуктивность. Только при жизни Эйлера было опубликовано около 550 его книг и статей (список трудов Эйлера содержит примерно 850 названий). За 1777 год, например, Эйлер, уже слепой, подготовил около 100 статей, т.е. почти по две статьи в неделю! За 17 лет вторичного пребывания в Петербурге Леонар-

дом Эйлером было подготовлено около 400 работ. В 1909 г. Швейцарское естественно-научное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Эйлера, которое завершено в 1975 г.; оно состоит из 72 томов. Большой интерес представляет и колоссальная научная переписка Эйлера (около трёх тысяч писем), до сих пор опубликованная лишь частично.

Необыкновенно широк был круг занятий Эйлера, охватывавших все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело и др. Около трёх пятых работ Эйлера относятся к математике, остальные — преимущественно к её приложениям. Свои результаты и результаты, полученные другими, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, написанных с поразительной ясностью и снабжённых ценными примерами. Таковы, например, «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» (тт. 1–2, 1736), «Введение в анализ» (тт. 1–2, 1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), «Теория движения твёрдого тела» (1765), «Универсальная арифметика» (тт. 1–2, 1768–1769), выдержавшая около 30 изданий на шести языках, «Интегральное исчисление» (тт. 1–3, 1768–1770; т. 4, 1794) и др. В XVIII в., а отчасти и в XIX в. огромную популярность приобрели общедоступные «Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе...» (ч. 1–3, 1768–1774), которые выдержали свыше 40 изданий на 10 языках. Большая часть содержа-

ния монографий Эйлера вошла затем в учебные руководства для высшей и частично средней школы. Невозможно перечислить все донныне употребляемые теоремы, методы и формулы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в литературе под его именем (например, метод ломаных Эйлера, подстановки Эйлера, постоянная Эйлера, уравнение Эйлера, функция Эйлера, формула Эйлера—Маклорена, формулы Эйлера—Фурье, Эйлеровы интегралы, Эйлеровы углы).

Методический комментарий

Цель — познакомить школьников среднего звена с историей возникновения теории графов и её применением в различных отраслях науки и техники. В ходе работы развиваются знания учащихся о способах решения логических проблем, связанных с пе-

ребором вариантов. В результате у учащихся формируется математическая культура и математическая речь, улучшаются умения и навыки работы с переборами величин. Они учатся самостоятельно и творчески работать с дополнительной математической литературой.

Обращается внимание на поиски наилучших вариантов решения путём перебора, что особенно ценно при поиске выхода из различных ситуаций из немногих областей математики. Исторические экскурсы позволяют в доступной форме раскрыть происхождение многих математических понятий и фактов, расширить математический кругозор учащихся.

Знакомство с теорией графов позволяет повысить интерес учащихся к её изучению, формирует положительное эмоциональное отношение к учебному предмету.