

Задача о совершенстве

Г.Е. Юбко

Автор: Юбко Галина Евгеньевна, учитель математики средней школы № 3 г. Спасск-Дальний Приморского края.

Предмет: Математика.

Класс: 6.

Тема: Делители и кратные. Простые и составные числа.

Профиль: Общеобразовательный.

Уровень: Общий.

Текст задачи. В «Маленьком принце», замечательной сказке французского писателя А. де Сент-Экзюпери, Лис спрашивает Маленького принца.

— А на той планете есть охотник?

— Нет.

— Как интересно! А куры есть?

— Нет.

— Нет в мире совершенства! — вздыхает Лис.

Можно поспорить с Лисом. Но пифагорейцы, жившие 2500 лет тому назад, тоже считали совершенство редким явлением и обозначали его совершенным числом. Примерами совершенных чисел являются 6 и 28.

Сколько таких чисел в миллионе и с чем эти числа были связаны у древних народов?

а) Выделите ключевые слова для информационного поиска.

б) Найдите и соберите необходимую информацию.

в) Обсудите и проанализируйте собранную информацию.

г) Сделайте выводы.

д) Сравните свои выводы с предложенным образцом.

Возможные информационные источники

Книги:

Малаховский В.С. Введение в математику. Учеб. издание. Калининград: Янтар. сказ, 1998.

Детская энциклопедия. Т. 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры. М.: Педагогика, 1972.

Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П. За страницами учебника математики. М.: Просвещение, 1996.

Математика. Школьная энциклопедия / Гл. ред. С.М. Никольский. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996.

Интернет-ресурсы:

<http://www.wikipedia.org/wiki>

<http://www.paskal.sources.ru>

<http://www.revolution/allbest/ru>

<http://www.bse/sci-lib/com/article103772.html>

<http://www.comcon/by/ru/ARTICAL>

Культурный образец

Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П. За страницами учебника математики. М.: Просвещение, 1996.

Математика. Школьная энциклопедия / Гл. ред. С.М. Никольский. —

М.: Большая Российская энциклопедия, 1996.

Пифагору (ок. 570 — ок. 500 г.г. до н.э.) приписывается высказывание: «Всё есть число». К числам он хотел свести весь мир и математику, в частности. Пифагорейцы, жившие две с половиной тысячи лет тому назад, считали совершенство редким явлением и обозначали его числами, удовлетворяющими довольно жёсткому условию.

Число называлось совершенным, если оно равнялось сумме всех своих собственных делителей, т. е. делителей, отличных от самого числа.

Совершенные числа весьма почитались в древнем мире. Например, египетская мера длины «локоть» содержала 28 «пальцев»; самым почётным местом на пирах у римлян было шестое; во многих обществах число членов равнялось 28. Даже сейчас, следуя древней традиции, некоторые академии по уставу состоят из 28 действительных членов.

Пифагорейцы нашли правило, облегчающее поиск совершенных чисел. У Евклида в «Началах» оно формулируется так: «Если от единицы откладывать сколько угодно последовательно пропорциональных чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделается первым числом и вся совокупность, умноженная на последнее число, произведёт что-то, то возникающее число будет совершенным». Иначе говоря,

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) \cdot 2^k - 1 = (2^k - 1) \cdot 2^{k-1}$$

является совершенным числом, если число $2^k - 1$ простое. Простые числа вида $M_k = 2^k - 1$ стали называться простыми числами Мерсенна, по имени французского монаха М. Мерсенна (1588–1648), много занимавшегося совершенными числами. В настоящее время числа вида $2^k - 1$ проверены на простоту для всех k до 50000. В результате обнаружено более 30 простых чисел Мерсенна.

Примерами совершенных чисел являются

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 2 + 3; \\ 28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14. \end{aligned}$$

Первые три совершенных числа нашёл сам Пифагор; это числа 6; 28 и 496, а последующие уже нашли по формуле. Проверим числа 496 и 8128:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248;$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$$

Позже в XVII–XVIII веках многие математики искали совершенные числа. Они использовали критерий совершенства, который как гипотезу выдвинул французский философ и математик Рене Декарт, а доказал Леонард Эйлер.

Леонард Эйлер — автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др., оказавших значительное влияние на развитие науки. В 1726 г. он был приглашён работать в Санкт-

Петербург, в 1727 г. переехал жить в Россию. В 1731–1741 и начиная с 1766 гг. был академиком Петербургской Академии Наук (в 1741–1766 гг. работал в Берлине, оставаясь почётным членом Петербургской академии). Именно он заметил: «Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой высокой степени совершенства, если бы древние не приложили столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесплодности...» Эйлер показал, что простыми числами Мерсенна исчерпываются все чётные совершенные числа.

Совершенные числа укладываются в следующую схему. Сложим все правильные делители некоторого числа, получим второе; найдём сумму всех его правильных делителей, получим третье число; найдём далее сумму всех правильных делителей третьего числа и т.д. Может оказаться, что на некотором шаге получится исходное число, т.е. цепочка замкнётся.

Простыми являются числа Мерсенна $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, $M_7 = 127$,

$M_{13} = 8181$, $M_{17} = 131071$. Им соответствуют совершенные числа 6; 28; 496; 8128; 33550336; 8589869056. Из приведённого примера видно, что до миллиона только 4 совершенных числа.

Методический комментарий

Цель: познакомить шестиклассников с историей возникновения совершенных чисел.

Задачи:

- обобщить знания учащихся о числах, делителях и кратных, признаках делимости чисел;
- закрепить навыки самостоятельной и творческой работы с дополнительной математической литературой, интернет-ресурсами.

Учащиеся определяют ключевые слова: «совершенные числа», «Пифагор», «древнегреческие математики». Внимание учеников обращают на исторические факты, формируется положительное эмоциональное отношение к учебному предмету, что развивает интеллект шестиклассников, расширяет их математический кругозор.