Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года по математике

Ященко Иван Валерьевич — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ», руководитель федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике

Рослова Лариса Олеговна — кандидат педагогических наук, заместитель руководителя федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике

Семенов Андрей Викторович — кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ», член федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике

Высоцкий Иван Ростиславович — ФГБНУ «ФИПИ», член федеральной комиссии по разработке КИМ для ГИА по математике, fipi@fipi.ru

Ключевые слова: КИМ ЕГЭ по математике, основные результаты ЕГЭ по математике в 2018 г., анализ результатов по группам с различным уровнем учебной подготовки, типичные ошибки.

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями федерального компонента государственного стандарта общего образования, и с 2015 г. проводится на двух уровнях: базовом и профильном. Варианты КИМ составлялись на основе спецификации и кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2018 г. ЕГЭ по математике.

В 2018 г. ЕГЭ по математике проводился на двух уровнях в четвертый раз. По-прежнему участники экзамена могли самостоятельно выбрать один или оба уровня в зависимости от своих образовательных запросов и перспектив продолжения образования.

Каждый вариант профильного экзамена содержал 12 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развернутым ответом. Задания предназначены для проверки предметных знаний и умений по основным разделам курса математики:числа и вычисления, алгебра и начала математического анализа, геометрия, теория вероятностей. Проверка логических навыков включена в большинство заданий, особенно проявляется в требованиях к решению заданий с развернутым ответом.

Варианты профильного ЕГЭ создавались с учетом анализа результатов ЕГЭ предыдущих лет. Варианты обеспечивают высокий уровень дифференциации участников экзамена в соответствии с уровнем освоения стандарта, а также с требованиями к уровню математической подготовки, необходимыми для продолжения образования по различным специальностям. Вместе с тем на уровне высоких результатов обеспечивается высокая дифференцирующая способность КИМ, позволяющая эффективно проводить отбор в вузы с высоким конкурсом.

Каждый вариант базового экзамена содержал 20 заданий с кратким ответом. Проверяя освоение требований стандарта, КИМ базового ЕГЭ имеют выраженную практическую направленность и включают в себя задания всех предметных областей школьного курса математики.

Изменения в структуре и содержании КИМ 2018 г. базового и профильного уровней относительно КИМ 2017 г. отсутствуют.

ЕГЭ по математике базового уровня

В основном периоде ЕГЭ 2018 г. по математике базового уровня сдавали более 567 тыс. человек. Это превосходит число сдававших ЕГЭ по математике базового уровня в 2017 и в 2016 гг.

На рис. 1 представлено распределение тестовых баллов участников ЕГЭ по математике базового уровня в 2018, 2017 и 2016 гг.

Диаграмма распределения (см. рис. 1) показывает, что по сравнению с двумя предыдущими годами в 2018 г. произошло улучшение результатов экзамена.

Снизился процент не сдавших экзамен, выросли средний балл и доля тех, кто получил максимальный тестовый балл – «5». Рост среднего балла произошел за счет уменьшения до 3% доли участников, не освоивших базовые математические навыки. Можно сделать вывод о том, что учителя стали больше обращать внимание на ликвидацию пробелов в базовых знаниях, важным ориентиром стали подготовка к решению практико-ориентированных заданий и отработка базовых математических навыков.

Продолжается рост числа участников экзамена, набравших максимальный балл. В 2018 г. процент таких участников составил 48,09 (т.е. вплотную приблизился к половине от общего числа участников). При сохранении имеющейся тенденции уже в следующем году можно ожидать, что больше половины сдающих ЕГЭ по математике базового уровня получит максимальный балл. Как уже было отмечено, число и доля выпускников, получивших тестовый балл «5» (17–20 первичных баллов), возросло в 2018 г. в сравнении с предыдущими годами.

Рост доли выпускников, получивших максимальный тестовый балл – «5», вероятно, связан со смещением акцентов в подготовке обучающихся, не планирующих поступление на специальности с профильной математикой: с переходом от обучения «всех всему» к ориентации на достижение каждым обучающимся выбранного уровня математической подготовки.

По итогам экзамена базового уровня наиболее высокие результаты получены при выполнении следующих заданий: практико-ориентированные задания на чтение диаграмм и

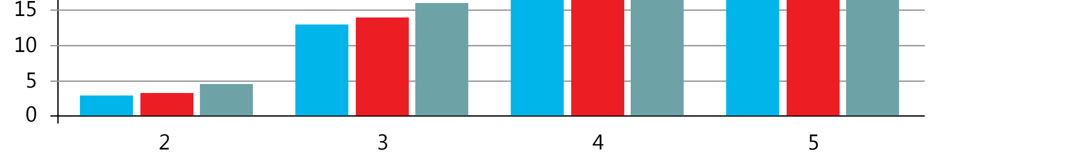


Рис. 1

графиков (задание 11), а также на работу с информацией, представленной в таблице (задание 12); расчеты по формуле (задание 4); сопоставление величин (задание 9); бытовые расчеты (задание 6). Эти задания выполняют не менее 90% участников экзамена.

Произошло видимое улучшение выполнения всех практико-ориентированных заданий, за исключением стереометрической задачи на вычисление объема тела (задание 13). Заметно лучше в 2018 г. стали решать важную практическую задачу на оптимальный выбор, который необходимо сделать на основе анализа предоставленной информации (задание 12). Отрадно, что с этой задачей справляются 65–70% участников из наиболее слабой группы.

В 2018 г. произошло заметное улучшение выполнения задания вычислительного характера (задание 1), здесь на результат, близкий к максимальному, вышли две группы наиболее подготовленных участников этого экзамена. Однако резерв для повышения результата есть – его надо искать в двух группах слабо подготовленных участников.

В группу заданий, с которыми участники экзамена справились несколько хуже, но также на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, но базирующиеся на знаниях и навыках, формируемых в курсе алгебры основной школы, так и задания, «перешедшие» из основной школы. К первым относится преобразование степенного и иррационального выражений (задания 2 и 5); ко вторым – решение квадратного уравнения (задание 7), вероятностной задачи (задание 10), планиметрической задачи на вычисление площади фигуры, составленной из прямоугольников (задание 8).

Следует отметить, что задание на вычисление вероятности наступления события в практической ситуации (задание 10) выполнено лучше, чем в предыдущие годы. Вероятно, дает о себе знать повышение математической и методической подготовки учителей по преподаванию вероятностно-статистической линии, введенной в курс математики российской школы не так давно по сравнению с традиционными разделами математики.

Традиционные темы курса старшей школы, связанные с изучением элементов математического анализа (задание 14 на чтение графика функции и производной функции), решением логарифмических неравенств (задание 17), оказались для участников экзамена значительно более сложными по сравнению с остальными. Выполняют соответствующие задания от половины до трех четвертей выпускников, сдававших экзамен базового уровня; заметим, что это те выпускники, которые в дальнейшем не ориентированы на использование математики.

Рост общей математической подготовки сдающих базовый экзамен отражает заметное улучшение показателей выполнения логических задач (задание 18). Причем следует отметить как положительный момент, что с ними справляются чуть менее половины оказавшихся в группе самых слабых участников экзамена. Также значительное число выпускников успешно выполняют задание на конструирование числа (задание 19), процент его выполнения в сравнении с прошлым годом увеличился. Содержательный анализ результатов экзамена показывает, что изучение математики на старшей ступени общего образования имеет свою мотивацию и определенное значение даже для тех учащихся, кто не планирует в своей профессиональной деятельности использовать математические знания. Также можно говорить и о том, что подготовка к базовому экзамену в большинстве случаев не сводится к «натаскиванию» на решение нескольких простых заданий.

По-прежнему низки результаты выполнения геометрических задач, причем как планиметрических (задания 8, 15), так и стереометрических (задания 13, 16); к сожалению, с этими заданиями справляются только наиболее подготовленные участники экзамена. Это свидетельствует о концептуальных недостатках в обучении геометрии, о необходимости пересмотра традиционных систем обучения и создания единой линии изучения геометрии с 1 по 11 класс на основе единых дидактических подходов к результатам обучения и содержания образования, с существенным акцентом на развитие геометрической интуиции, наглядных геометрических представлений, с учетом возрастных особенностей обучающихся.

По-прежнему факторами, вызывающими ошибки, остаются недостаточный уровень понимания условия, вычислительные ошибки, недостаточная развитость наглядных геометрических представлений.

Рассмотрим подробнее результаты выполнения заданий КИМ участниками с разным уровнем подготовки. Для этого выделим 4 группы с результатами, соответствующими отметкам «2», «3», «4» и «5» по пятибалльной шкале: группа 1 – от 0 до 6 баллов – не достигшие минимального балла; группа 2 – от 7 до 11 баллов; группа 3 – от 12 до 16 баллов; группа 4– от 17 до 20 баллов.

Распределение участников экзамена по группам представлено на рис. 2.

Группа 1 незначительна в процентном отношении, однако в нее вошли около 10 тыс. выпускников школ. Только около половины справились с заданием 6 на вычисления в бытовой ситуации и логическим заданием 18; примерно две трети – с заданием 9 на соответствие величин; три четверти – с заданием 11 на чтение диаграммы и заданием 12 на работу с таблицей. Выполнение остальных заданий распределилось по диапазонам следующим образом: от 21 до 33% – задания 1, 4; от 10 до 20% – задания 2, 3, 5, 7, 8, 14; менее 10% – задания 10, 13, 15, 16, 17, 19, 20. Общие тенденции по выполнению каждого задания и по темам курса математики проявляются и в этой группе.

В *группе 2* дифференциация при решении задач проявилась наиболее ярко. На уровне выше 80% здесь выполняются задания 9, 11, 12; в диапазоне от 50 до 75% выполняются задания 1, 3, 4, 6, 8 и 18; в диапазоне от 35 до 50% – задания 2, 5, 7, 10, 14; в диапазоне от 10 до 25% – задания 13, 15, 16, 17, 19, 20. Совершенно очевидно, что для участников из этой группы есть задания, не вызывающие больших сложностей: работа с величинами, диаграммами, таблицами. От половины до трех четвертей участников экзамена из этой группы справляются с такими базовыми элементами содержания основной школы, как вычисления, проценты, сюжетные задачи и геометрия практико-ориентированной тематики, работа с формулами, логика. При этом они плохо освоили материал старшей школы, а именно преобразование степеней и иррациональностей, свойства графика функции, а также далеко не все участники из этой группы научились решать квадратные уравнения, требующие предварительных преобразований, и вычислять вероятность события. Наибольшие затруднения вызывают в этой группе геометрические задачи, логарифмические неравенства, свойства чисел.

Участники из *группы 3* большую часть заданий выполняют в диапазоне от 80 до 90%. Помимо названных выше заданий 13, 17 и 20, сложных и для более подготовленных участников, определенные трудности вызвали задания 14 (график функции), 15 (планиметрия), 16 (стереометрия), 19 (свойства чисел).

Данные показывают, что примерно половина участников экзамена (они составили группу 4) получила результат, близкий к максимальному или максимально возможный: они набрали от 17 до 20 баллов. В этой группе результаты выполнения почти всех заданий близки к 100%. Исключение составляют задания 13 (стереометрия) и 17 (решение неравенства) – их выполнили около 80%, а также задание 20 – выполнили около половины из участников этой группы.

ЕГЭ по математике профильного уровня

Общее число участников основного периода ЕГЭ по математике профильного уровня в 2018 г. – более 391 тыс. человек, что сопоставимо с аналогичным показателем 2017 г.

На рис. 3 показаны распределения первичного балла в 2018 и 2017 гг.

Характер распределения первичного балла за два года заметным образом не изменился,

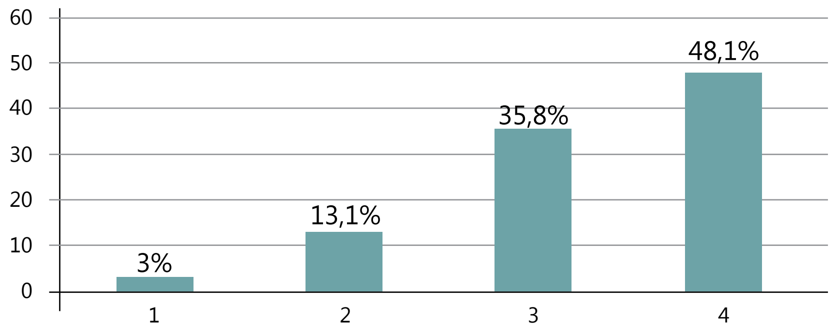


Рис. 2. Распределение групп баллов

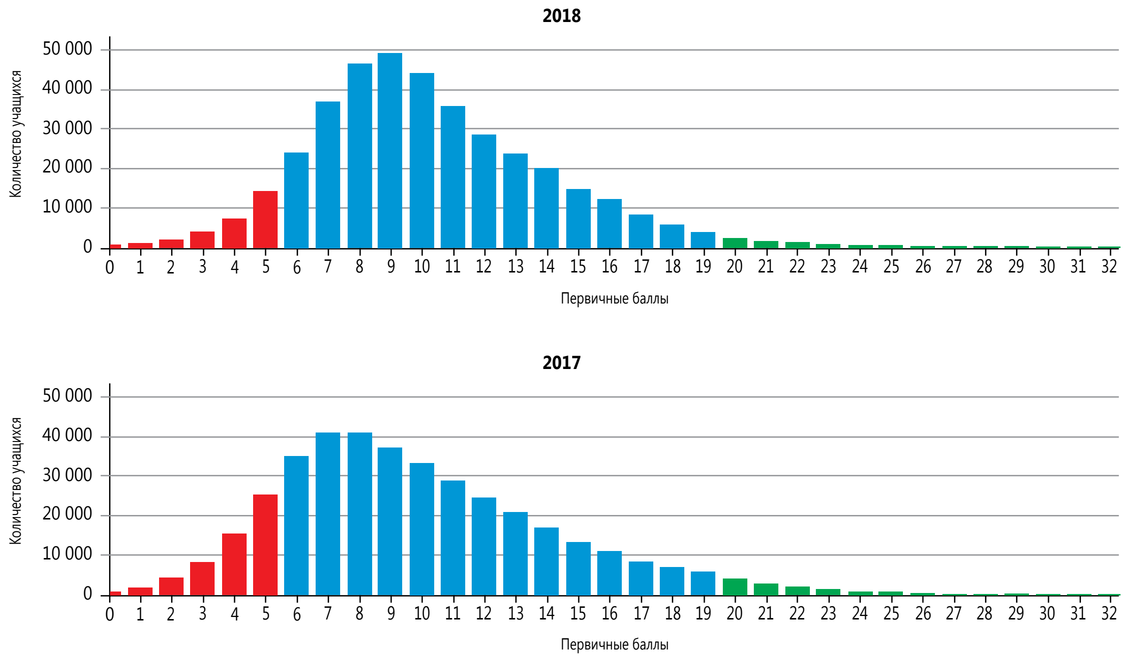


Рис. 3

что позволяет говорить о сопоставимости результатов ЕГЭ 2017 и 2018 гг. Аномалии как в распределении в целом, так и в выполнении отдельных заданий отсутствуют, что статистически опровергает опубликованную в сети Интернет недостоверную информацию о массовой публикации реальных заданий экзамена в Интернете задолго до экзамена.

Средний тестовый балл в 2018 г. вырос в сравнении с 2017 г. более чем на 2 тестовых балла. Это связано с уменьшением числа участников, получивших 0–20 тестовых баллов по 100-балльной шкале (далее – т.б.), и одновременным увеличением числа участников, набравших 41–60 т.б. и 61–100 т.б. Таким образом, в 2018 г. (в сравнении с предыдущими годами) продолжается рост математической подготовки большинства выпускников, выбравших профильный экзамен. При этом наибольший рост показало выполнение заданий с кратким ответом, задания с полным решением в целом выполнены несколько хуже, чем в 2017 г.

Как и в предыдущие годы, минимальный первичный балл, необходимый для сдачи экзамена, был равен 6 (27 т.б.). В 2018 г. минимальный балл не набрали 7,48% участников экзамена, в 2017 г. – 14,35%, то есть этот показатель улучшился практически вдвое.

Тенденция роста результатов относится к результатам ЕГЭ как в целом по стране, так и к большинству регионов. Растет понимание важности математического образования, поскольку оно необходимо для успешного обучения в вузах по инженерным, экономическим, естественнонаучным, математическим и иным специальностям, требующим высокого уровня освоения математики. Существенный вклад внесло повышение осознанности выбора экзамена: недостаточно подготовленные выпускники все меньше выбирают профильный экзамен, ограничиваясь сдачей ЕГЭ по математике базового уровня. Важно отметить, что в абсолютных цифрах число участников экзамена, набравших 61балл и более, выросло за год с 120,6 тыс. до 125,6 тыс., что означает увеличение числа подготовленных абитуриентов массовых технических вузов.

Как и в 2017 г., участники экзамена демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями. Это такие элементы содержания, как: проценты и доли, округление с избытком и недостатком, чтение графиков и диаграмм реальных зависимостей, простейшие геометрические умения, решение уравнений различных типов. Кроме этого, относительно 2017 г. выросла успешность выполнения заданий базового уровня сложности: практически все задания 1–8 выполнены с превышением 50% успешности. Несколько менее половины участников экзамена справились только с чтением графика производной (задание 7).

Из заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности самым успешно решаемым оказалось задание на действия со степенями: более 80% участников экзамена получили правильный ответ. Менее успешно выпускники провели работу с формулой и решением текстовой задачи: лишь две трети участников экзамена успешно справились с заданиями 10 и 11.

Заметной проблемой остается слабое овладение базовыми представлениями о геометрическом смысле производной (задание 7) и базовыми умениями исследования функции с помощью производной (задание 12), а также слабое владение фактами и методами планиметрии и стереометрии, умением решать геометрические задачи (задания 6 и 8). Это основные резервы для повышения качества подготовки абитуриентов массовых инженерно-технических и экономических вузов.

Среди заданий с полным решением наибольшее количество полных баллов, как и в 2017 г., получено по заданиям 13 и 15: решение тригонометрических уравнений и логарифмических неравенств. Выросла доля получивших полный балл за стереометрическое задание, что связано с некоторым ростом геометрической подготовки наиболее сильных участников, мотивированных на высокий результат.

Одной из причин снижения доли участников, набравших полный балл за задание 17 (экономическая задача), стало использование при подготовке к экзамену типовых заданий вместо систематического изучения курса и грамотного итогового повторения. Многие участники не прочитали полностью и внимательно условие задачи и допустили существенные ошибки, следуя «типовому алгоритму».

Рассмотрим выполнение экзаменационной работы участниками с разным уровнем математической подготовки.

Результаты группы с минимальной подготовкой (участники, не набравшие минимального балла) соотносятся (если сравнить результаты по схожим заданиям двух экзаменов) с результатами групп 1 и 2 базового экзамена (вряд ли эти участники смогли бы преодолеть минимальную границу при сдаче базового экзамена). Возникает вопрос: почему выпускники приняли решение сдавать экзамен профильного уровня, несмотря на то, что уровень их подготовки не позволяет им продолжить обучение в вузе, где математика является профилирующей дисциплиной?

Более 60% *участников профильного экзамена набрали от 6 до 11 первичных баллов* (27–61 т.б.). Это означает, что из первых 12 заданий базового и повышенного уровней с кратким ответом они выполнили не более 11 заданий. Так, они не смогли показать результат при выполнении даже одного из заданий повышенного уровня сложности с полным решением, в то время как именно выпускники из этой группы становятся абитуриентами массовых инженерных вузов.

С заданиями части 1 справляются 76–99% участников из этойгруппы, исключение составляют задания 7 (график производной) и 8 (стереометрия), с ними в этой группе справляются от трети до половины участников соответственно. Из заданий части 2 наибольший результат был получен при выполнении задания 9 (преобразование степенных выражений): справились около 90% участников, от 50 до 60% справились с заданиями 10 (вычисления по формуле) и 11 (текстовая задача), около 30% выполнили задание 12 (нахождение точки экстремума сложной функции). Именно над заданиями 7, 8, 10, 11 и 12 необходимо работать для улучшения математической подготовки абитуриентов инженерных вузов. Целесообразно уделить внимание и заданию 13 (решение тригонометрического уравнения), его выполнили 7% выпускников из этой группы. С заданиями 14–19 в этой группе справились менее 1,5% участников.

Существенно лучше результаты участников экзамена из *группы с хорошей подготовкой* (12–19 п.б. / 62–80 т.б.). Они выполняют задания 1–6, 9, 11 с результатом, близким к максимальному, задания 7, 8, 10, 12, 13 в диапазоне 75–90%; треть из этой группы справилась с решением логарифмического неравенства (задание 15); четверть – со стереометрической задачей (задание 14). С наиболее сложными заданиями 16–19 эти участники справились в диапазоне 1,6–7%, при этом самым сложным оказалось задание 18 (система с параметром), а более простым – планиметрическая задача.

Максимально возможные результаты *группы высокобалльников* очевидны. Как и в других группах, заметно небольшое снижение результатов по заданиям 7 и 8. Видимые различия начинаются с задания 14, с которым справились 81% участников этой группы, с заданием 15 – 87%, с заданием 16 – 53%, с заданием 17 – 49%, с заданием 18 – 31% и с заданием 19 – 26%.

Рекомендации по совершенствованию преподавания математики с учетом результатов ЕГЭ 2018 г.

Очевидна особая роль математического образования в реализации стоящих перед Россией задач, определяемых Стратегией научно-технологического развития Российской Федерации, Программой «Цифровая экономика Российской Федерации» и другими государственными документами. Также без качественного массового математического образования невозможен переход к цифровой экономике. Скорость и характер развития науки и технологий, задающие направления развития инновационной экономики, изменения, происходящие в жизни общества, отражаются на системе образования, в частности на его содержании, и на целевых установках школьников и их родителей. Требуются принципиально новые акценты в содержании и методологии школьного математического образования. Однако, чтобы корректно и точно расставлять эти акценты, необходима информация об актуальном состоянии математической подготовки выпускников общеобразовательных организаций. Требуемую обратную связь обеспечивает единый государственный экзамен по математике, предоставляющий данные о качестве обучения всей совокупности выпускников конкретного года, позволяющий проводить сравнение по годам с выявлением динамики результатов. Так, итоги ЕГЭ по математике 2018 г. базового уровня показывают следующее.

Из 20 заданий экзаменационной работы базового уровня 13 относятся к содержанию курса математики основной школы; это примерно те же задания, которые выносились на основной экзамен. К сожалению, не представляется возможным сравнить результаты выполнения данных заданий одних и тех же выпускников по ОГЭ и ЕГЭ, но можно предположить, что участники ЕГЭ их решают лучше, чем участники ОГЭ (на ЕГЭ с ними справляются 9 из 10 выпускников). Актуален вопрос: есть ли прогресс в математическом развитии участников ЕГЭ? произошло ли расширение математического кругозора? – ведь по программе среднего общего образования обучающиеся должны были познакомиться с новыми разделами математики и выйти на более высокий уровень понимания математики. Конечно, прирост есть, однако следует помнить, что доля заданий из программы старшей школы составляет менее половины от общего количества заданий экзаменационной работы и выполняются они на 20% хуже заданий из программы основной школы.

При этом результаты выполнения задания 20 (примеры приводятся ниже – задания 1–3), а справилась с ним примерно треть выпускников, писавших экзаменационную работу, показывают наличие определенного интереса к нестандартным задачам и потенциала в их решении. При всей нестандартности заданий из разных вариантов работы базового уровня все они требуют применения того или иного изученного математического метода: решения задач с помощью уравнений, неравенств, их систем, метода перебора и т.п. Следовательно, речь не идет только о естественном в условиях организованного обучения возрастном развитии познавательных процессов и мыслительных функций обучающихся, ведь в каждом задании необходимо продемонстрировать умение применить логику, переформулировать условие задачи, прибегнуть к моделированию. Можно с уверенностью говорить о том, что имеет место усвоение математического содержания и умения применять новые знания в нестандартных ситуациях, не встречавшихся в учебном процессе.

Обязательно следует отметить, что среди этих заданий есть такие, которые выполняются и в группе самых слабо подготовленныхучастников. Это задание, где достаточно применить перебор и проверку условия; выполнил его каждый третий участник экзамена из этой группы.

Задание 1

На кольцевой дороге расположено четыре бензоколонки: А, Б, В и Г. Расстояние между А и Б – 60 км, между А и В – 45 км, между В и Г – 40 км, между Г и А – 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги по кратчайшей дуге). Найдите расстояние (в километрах) между Б и В.

При этом и в группе хорошо подготовленныхучастников, сдающих математику на базовом уровне,есть проблемы с составлением и решением уравнений и неравенств. Ниже приводится две такие задачи: первую из них выполнили лишь треть участников указанной группы; вторую – менее половины участников, вошедших в эту группу.

Задание 2

В таблице три столбца и несколько строк. В каждую клетку таблицы вписали по натуральному числу так, что сумма всех чисел в первом столбце равна 119, во втором – 125, в третьем – 133, а сумма чисел в каждой строке больше 15, но меньше 18. Сколько всего строк в таблице?

Задание 3

Маша и Медведь съели 110 печений и банку варенья, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела варенье, а Медведь – печенье, но в какой-то момент они поменялись. Медведь и то и другое ест в 3 раза быстрее Маши. Сколько печений съел Медведь, если варенья они съели поровну?

К посильным интеллектуальным усилиям положительно относится почти каждый человек, именно с этим связана любовь к такого рода играм, как судоку, тетрис, танграм. Поэтому при работе с обучающимися, ориентированными на ЕГЭ базового уровня, можно рекомендовать в большей степени использовать в учебном процессе задания, аналогичные приведенным выше: можно считать это умственной гимнастикой, однако не надо забывать делать акцент на математической подоплеке интеллектуальных развлечений. Кроме того, именно при решении нестандартных задач могут возникать ситуации, требующие критического мышления, обсуждения различных решений; это поможет учителю обучать учащихся тому, как надо искать способы и вариации решения, применять уже изученные методы.

Нестандартные и необычные задачи могут стать фактором, повышающим мотивацию к изучению математики, активность и заинтересованность на уроке. Ведь для ученика, который сделал выбор своего жизненного пути не в пользу математики, расширение математических знаний имеет смысл только в двух направлениях: в контексте их прикладного использования в быту и социальной практике и в контексте интеллектуального развития. Надо признать, что программа старшей школы довольно далека от использования полученных знаний и умений на бытовом уровне. Акцент же на интеллектуальное развитие является вполне плодотворной идеей, которая имеет почву в рамках данного курса. Именно вторую установку необходимо внедрять.

Если говорить об обратной связи, которая обеспечивается ЕГЭ по математике профильного уровня, то прежде всего следует отметить, что на этот экзамен по-прежнему приходит определенная доля участников, для которых в большей степени предназначен экзамен базового уровня, причем и там у них возникли бы серьезные проблемы с преодолением минимальной границы. Их результаты вполне понятным образом влияют на общие результаты профильного экзамена. Следует лучше ориентировать обучающихся при выборе ими уровня экзамена по математике.

С частью 1 работы справляются более 85% участников профильного экзамена, исключение составляют два геометрических задания (планиметрия и стереометрия) и задание на чтение графика функции и ее производной. Именно последнее задание оказалось наиболее сложным в этой части работы, с ним справились менее половины участников экзамена.

Интересно сравнить результаты выпускников, которые выбрали базовый и профильный уровни экзамена, поскольку некоторые задания близки по тематике и сложности. Можно констатировать, что задания на вычисление вероятности события, на чтение графика температуры выборками участников базового и профильного экзамена выполняются практически на одном уровне, близком к 80 и 90% соответственно.

С заданиями на вычисления по формулам в базовом варианте выпускники справились в среднем на 20% лучше, но это за счет усложнения формулы или условия ее применения в профильном экзамене. Надо отметить, что далеко не все выпускники готовы к содержательной работе с формулами, и это следует обязательно учесть при планировании работы, в частности при подготовке к экзамену. Ниже приводятся задания базового и профильного уровней соответственно, результаты выполнения которых практически совпадают.

Задание 4

Ускорение тела (в м/с^2*) при равномерном движении по окружности можно вычислить по формуле* $a = \omega^2 R$*, где* ω *– угловая скорость* *вращения (в* с$^{-1}$*), а R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите α (в* м/с^2*), если R =0,5 м и ω = 12*с$^{-1}$.

Задание 5

Сила тока (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I = U/R$, где U — напряжение электросети (в В), R — сопротивление подключаемого электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220 В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

К особенности задания, негативным образом повлиявшей на результат его выполнения, в первом из заданиймможно отнести размерность: с$^{-1}$; во втором — определение *наименьшего* сопротивления.

При этом следует сделать еще одно полезное наблюдение, основанное на сопоставлении результатов ЕГЭ базового и профильного уровней: по уровню развития и по математической подготовке группа выпускников, наиболее успешных на ЕГЭ базового уровня, имеет хорошие шансы успешно сдать и экзамен профильного уровня, причем на баллы, достаточные для поступления в инженерно-технические вузы. Здесь имеет смысл убедиться, что выбор гуманитарного направления своей будущей профессиональной карьеры сделан ими осознанно, возможно, кому-то из них следует подумать, например, о деятельности в инженерно-технической сфере.

Задания с кратким ответом из части 2 профильного варианта расположены в порядке возрастания их сложности: если с первым из них (преобразование степеней) справились 9 из 10 участников, со вторым (работа с формулами) и третьим (текстовая задача) — примерно две трети, то с последним (вычисление экстремума сложной функции) — немногим менее половины.

Среди заданий с полным решением наибольшее количество полных баллов (как и в 2017 г.) получено по заданиям 13 (решение тригонометрического уравнения) и 15 (решение логарифмического неравенства). При этом следует отметить наличие существенного разрыва в результатах по группам участников; это свидетельствует о том, что для выполнения данных заданий (отнесенных к заданиям повышенного уровня сложности) необходим серьезный уровень математической подготовки. Повлиять на результаты выполнения данных заданий возможно только работая по трем направлениям: через повышение качества математической подготовки за основную школу, через усиление внимания к соответствующим разделам курса математики старшей школы, а также через выявление учащихся, потенциально способных справляться с такого рода заданиями, и выстраивания с каждым из них на этапе подготовки к экзамену грамотной диагностической работы, направленной на выявление конкретных проблемных зон, что позволит вести адресную работу.

Отметим еще два момента. Положительный момент: увеличилась доля получивших полный балл за задание 16 (стереометрия), что может быть связано с некоторыми подвижками в общей геометрической подготовке участников данного экзамена, связанного с возвращающимся вниманием к этому разделу школьной математики. Отметим также негативную тенденцию: произошло снижение процента участников, набравших полный балл за задание 17 (экономическая задача). На данный результат могло повлиять натаскивание, так как эта задача не поддерживается самостоятельной линией в программе курса и отрабатывается лишь при подготовке к экзамену.

Мы рассмотрели обратную связь, которую дает ЕГЭ по математике, реализуемую на самом высоком — федеральном уровне; она позволяет делать выводы о состоянии математической подготовки всей совокупности выпускников системы общего образования и принимать решения, необходимые для ее совершенствования в ближайшие годы. Также на этой основе каждый учитель может совершенствовать свою методическую систему обучения, вносить коррективы в отдельные аспекты обучения.

Доказано, что обратная связь эффективна, если ученик получает сообщение о верно выполненных заданиях, а не только об ошибках, если он получает не просто маркеры, свидетельствующие о положительном результате, не просто похвалу за решенную задачу, а и некоторый содержательный комментарий. Этот комментарий может включать в себя такую оценку, как «рациональное решение», «красивое решение», «интересная идея», «грамотная запись». Может быть отмечена актуальность проверки результата, удачное прохождение «ловушек» и «опасных» мест и т.п.

Обратная связь эффективна и в случае, если она конкретна, то есть связана с известными ученику результатами и действиями, подлежащими усвоению. Важное значение имеет информированность ученика относительно того, чему он должен научиться, какие задания должен научиться решать, а какие может научиться решать для того, чтобы получить желаемое количество баллов на экзамене. Если ученик фиксирует и отслеживает сам, умеет ли он выполнять требуемое задание или нет, то минимизируется время на выполнение заданий, при этом работа становится более эффективной и рациональной. Отсюда необходимость в открытости предъявляемых требований к результатам обучения, а на этапе подготовки к экзамену – в ориентации на конечный запланированный результат.

Эффективность возрастает в случае самооценивания, поскольку ученик самостоятельно получает информацию о своих результатах, сам ее анализирует, делает выводы о своем прогрессе, корректирует цели в случае необходимости. Но для осуществления самооценивания необходимы критерии оценивания работы, которые должны быть у ученика не просто до начала выполнения конкретной работы, но желательно и в самом начале изучения темы. К сожалению, в практике более частотной является ситуация, когда работа выдается ученику без критериев ее выполнения.

Необходимо отметить, что создание ЕГЭ по математике базового уровня и появление в ОГЭ акцента на использование математических знаний в реальных ситуациях были неверно истолкованы некоторыми учителями в качестве генеральной идеи обучения, что привело к поверхностному освоению обучающимися программы старшей школы. В частности, это зафиксировано и результатами экзамена: результаты выполнения заданий по темам курса старшей школы ниже результатов выполнения заданий из «реальной математики».

Известно, что выпускники, сдающие ЕГЭ базового уровня, имеют различные уровни математической подготовки: среди них есть как те, кому математика дается с большим трудом, так и те, кто вполне мог бы с успехом продолжить изучение математики на высоком уровне. Вопрос о том, каким для каждой из этих категорий выпускников должно быть обучение в старшей школе при условии, что они уже сделали свой выбор не в пользу математики, сохраняет свою актуальность.

Известно, что результаты выше у тех обучающихся, кто ставит перед собой возможно сложные, но достижимые цели. Мотивировать ученика, планирующего продолжить изучение математики в вузе и ориентированного поэтому на профильный экзамен, не так сложно: он способен осознать, что ему понадобится для успешного прохождения экзамена, может оценить полезность глубоких знаний и твердых навыков для дальнейшего успешного обучения в вузе. При этом он также оценит индивидуализированный, ориентированный на его цели подход учителя, помощь в обучении.

Но как мотивировать того, кто уже принял решение не в пользу математики? Речь может идти только о расширении кругозора, общекультурном контексте, интересе, а также об овладении новыми способами и приемами учения, которые можно перенести на профильные для себя предметы. Таким образом, речь идет о формировании средствами математики ключевых компетенций, которые востребованы в современном обществе.

К саморегуляции относятся также вопросы, связанные с осознанностью знания и незнания. Объяснение учителя сродни лекционной форме предъявления новых знаний. В связи с этим вновь подчеркнем важность обратной связи. Учитель должен получать сигналы от обучающихся: «Я понимаю, могу объяснить», «Я не уверен, правильно ли я понимаю», «Я не понимаю». Учитель может прервать свое объяснение вопросом к тем, кто еще не понял, предложением высказать свои сомнения тем, кто не уверен в понимании, предоставлением слова тем, кто все понял.

Полезно также приучать обучающихся к тому, чтобы по итогам изучения каждой темы, на этапе подготовки к тематическому контролю ученик задавался вопросом, все ли знания и навыки из списка обязательных он усвоил, с какими более сложными заданиями может справиться полностью самостоятельно, а с какими – при условии получения определенной помощи.

И еще об одном факторе, на который следует обратить внимание, нельзя не упомянуть.

Это повторяющееся тестирование. Уже имеющийся опыт российской школы и более продолжительный зарубежный опыт не позволяют говорить о нем как об эффективном факторе. Положительные эффекты возникают только в тех случаях, когда учитель учитывает результаты тестирования для корректировки процесса обучения, приспосабливает методы обучения к возможностям конкретного ученика, учитывая его сильные и слабые стороны, или при условии содержательной обратной связи, с которой ученик может работать самостоятельно, то есть имеет возможность учиться на тестах, но только не в ситуации формального контроля.

Следует учитывать, что подготовка к выполнению конкретной экзаменационной работы в умеренной степени воздействует на успешность ее выполнения. При этом организация тематического тестирования, использование в подготовительных тестах (диагностических работах и проч.) заданий в более сложных форматах, нежели будут использованы на экзамене, результативнее прохождения пробного экзамена. Важно подчеркнуть, что решение многочисленных однотипных вариантов экзаменационной работы является наименее эффективной стратегий подготовки.

Остановимся подробнее на некоторых приемах обучения, доказавших свою эффективность.

При решении задач эффективным приемом является использование *примеров и образцов*. Скажем, ученик получает задачу и готовое решение, которое он должен разобрать самостоятельно. Решение может быть дополнено советами, комментариями трудных или «опасных» моментов, другими способами решения и т.п. Когнитивная нагрузка в данном случае получает управляющий импульс и осуществляется в заданном направлении. Важным условием является выход на стратегию, которую можно будет применить в дальнейшем при решении широкого круга задач. Следующим этапом может стать работа не с готовым решением, а с заданным алгоритмом решения, который ученик должен самостоятельно применить к данной ему задаче. После этого можно провести решение полностью самостоятельно. Покажем это (без потери общности) на двух простых задачах.

Задание 6

Номера железнодорожных билетов состоят из 7 цифр. Сколько номеров будут содержать только нечётные цифры?

Решение: Всего нечётных цифр – 5 (1, 3, 5, 7 и 9). Всего номеров, составленных из этих цифр, – $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$. Ответ: 5^7.

Комментарий: Произведение можно не записывать, а сразу записать в виде степени. Следует всегда обращать внимание на то, могут ли цифры в числе повторяться, а это зависит от условия или контекста задачи. Кроме того, если по условию используются четные цифры, то необходимо помнить, что 0 – четная цифра, однако он не может стоять на первом месте.

Задание для самостоятельного решения. Сколько семизначных чисел составлены только из чётных цифр?

Задание 7

Каждый из двух друзей одновременно показывает на руке случайное количество пальцев от 1 до 5. С какой вероятностью в сумме получится число 8?

Решение: Общее число исходов равно: $5 \cdot 5 = 25$. Благоприятными событию «получится в сумме число 8» будут исходы: $3 + 5$, $5 + 3$, $4 + 4$. Вероятность события равна: $3/25 = 0{,}12$. Ответ: 0,12.

Комментарий: Следует различать две комбинации, когда один из друзей показывает 3 пальца, а другой –5 пальцев. Ответ можно записать как обыкновенной дробью, так и десятичной.

Задание для самостоятельного решения. Каждый из двух друзей показывает на руке случайное количество пальцев от 1 до 5. С какой вероятностью в сумме получится число 7?

Описанный прием может использоваться применительно к отдельному заданию, однако из таких заданий – с решениями и комментариями – можно составить тематическую проверочную работу, которую можно использовать и в рамках подготовки к экзамену. Решения могут быть написаны учителем самостоятельно, могут быть взяты из публикуемых сборников для подготовки к ЕГЭ, а также из материалов журнала «Математика».

Весьма эффективно использование при решении задач *подсказок*, то есть некоторой дополнительной информации, которая дается ученику после (что важно!) того, как он начал работать над задачей. Чем определеннее подсказка, тем больше из нее можно извлечь. Фразы: «Хорошо подумай», «Внимательно прочти условие задачи», «Подумай о других способах решения» подсказками не являются, поскольку они никак не направляют ход мысли и не помогают найти решение.

Задание 8

Решите уравнение .

$$\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$$

Подсказка: Можно применить формулу синуса суммы двух углов.

Подсказкой может быть похожая задача, которая решалась недавно, указание на конкретный метод. Всегда полезно использовать результаты, методы уже решенных задач, а также опыт, приобретенный при решении. Это широко используется в школьном курсе геометрии, где многие важные геометрические факты, которыми целесообразно пользоваться при решении других задач, даны не в виде утверждений (теорем), а в виде задач. Кроме того, это возможность использования еще одного метода – *аналогии*.

При решении тригонометрических уравнений подсказкой может быть определенная формула, а при решении логарифмического уравнения – свойство логарифма. Полезно учить пользоватьсяподсказками, искать их самостоятельно, а также учить давать подсказки.

При обучении решению сложных или трудоемких в плане вычислений и преобразований задач полезно использовать групповые формы работы, а в качестве приема – *мозговой штурм*. Основные принципы мозгового штурма: на первом этапе – предложение как можно большего количества решений, без оценки их применимости, рациональности и проч., на втором – анализ и вывод о целесообразности предложенного, выбор наиболее ценных идей и предложений. Ценность приема – в стимулировании поисковой активности на первом этапе и критичности мышления на втором. Хорошо применим данный прием при поиске различных способов решения геометрических задач и тригонометрических уравнений.

При решении текстовых задач важным приемом, необходимым для усвоения, является *переформулирование* условия, отношений, связывающих входящие в задачу величин. Ниже приводится пример такой задачи из варианта профильного экзамена.

Задание 9

Заказ на изготовление 323 деталей первый рабочий выполняет на 2 ч быстрее, чем второй. Сколько деталей изготавливает первый рабочий, если известно, что он изготавливает на 2 детали больше второго?

Данную задачу экзаменуемые решили существенно хуже, чем аналогичную задачу с более привычной и хорошо отработанной фабулой, связанной с движением двух велосипедистов.

Умение переформулировать условие важно и при решении нестандартных задач, то есть таких, метод решения которых ученику не известен, не изучался и не отрабатывался на уроках.

Задание 10

Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 15, 12 и 24. Найдите площадь четвёртого прямоугольника.

15	12
?	24

В данной задаче, чтобы найти решение, достаточно сформулировать то, что вполне можно увидеть из рисунка (то есть условия, представленного графически): площадь четвертого прямоугольника во столько раз больше первого, во сколько площадь третьего прямоугольника больше второго.

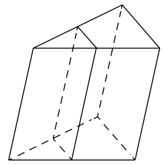
Еще более актуально это умение при решении практико-ориентированных задач, представляющих собой некоторую ситуацию из реальной жизни, которую необходимо преобразовать и описать на языке математики (то есть самостоятельно сформулировать задачу). В самом простом случае основа задачи будет следующая: за лестницей, которую прислонили к стене дома, надо распознать прямоугольный треугольник, гипотенузой которого и будет данная лестница.

Результаты экзамена, представленные по группам, позволяют говорить о сложности заданий для экзаменуемых с тем или иным уровнем математической подготовки. Скажем, решение текстовой задачи (задание 11 профильного экзамена), приведенной выше, представляет трудность примерно для половины участников экзамена, в группе самых слабых его участников с ней не справился и каждый десятый, а в группе самых сильных мы имеем практически 100%-й результат. Поэтому так важно при обучении и подготовке к экзамену понимать те трудности, с которыми столкнутся обучающиеся, и работать дифференцированно, то есть с каждой группой учащихся отдельно. Задания по сложности должны быть адекватными для конкретной группы, то есть у учеников должен быть шанс и когнитивный ресурс выполнить задание, прибегнув к помощи учителя, одноклассников, справочников и прочих источников дополнительной информации. Что касается экзаменационных заданий, то лишена всякого смысла практика, когда ученику, который слабо справляется с заданиями части 1 экзамена профильного уровня, выдаются последние задания из части 2. Нужна грамотная диагностика уровня подготовки каждого ученика и обеспечение его именно теми заданиями, с которыми он, исходя из этого уровня, может справиться.

Важно также знать, что бесконечное решение задач, которые ученик уже давно научился решать, также никак не повлияет на качество его математической подготовки. Более того, натаскивание сыграет с ним злую шутку на экзамене – не позволит заметить незначительные изменения в условии задачи и скорректировать решение соответствующим образом. Именно это ярко отразилось на результатах выполнения задания 17 профильного варианта (экономическая задача) и является существенным фактором снижения процента участников, набравших полный балл за задание: увидев на известной позиции знакомую, как им показалось, задачу, многие участники не прочитали полностью и внимательно ее условие и допустили существенные ошибки, следуя «типовому алгоритму».

Сложность задания относительна, следовательно, можно попытаться на нее влиять. Например, абстрактность задачи можно снизить, если использовать наглядные представления. Правда, именно с этим у большинства выпускников возникают проблемы. Результаты выполнения заданий как базового, так и профильного варианта экзамена говорят о недостатках в формировании пространственного мышления учащихся. Прежде всего это негативно отражается на решении стереометрических задач. Приведем пример задания из профильного варианта экзамена, которое выполнили чуть больше половины участников экзамена, писавших этот вариант, несмотря на то, что оно является практически устным.

Задание 11

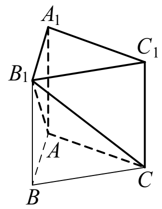


Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 15.

У не справившихся с заданием нет «чувства пространства», они не воспринимают зримые закономерности окружающего мира. А ведь именно среди них находятся те, кто уже пошел учиться в инженерные вузы и будет строителем, конструктором и т.д.

Данный недостаток проявился и в аналогичной задаче, где необходимо было применить свойство аддитивности объема. Наверное, теоретически обучающиеся понимают, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей. Но почему же они не могут применить это свойство при решении задач?

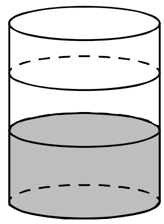
Задание 12



Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, C_1, A_1, B_1.

Данный недостаток проявляется не только у тех выпускников, кто сдавал профильный экзамен, аналогичное задание из базового экзамена выполнено примерно с тем же результатом, что делает эту проблему общей для всех обучающихся независимо от выбора ими экзамена и дальнейшей стратегии обучения.

Задание 13



В бак, имеющий форму цилиндра, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,6 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.

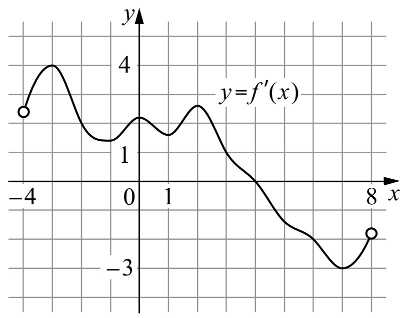
Понятно, что массово проблема проявилась с уходом из общего образования такого учебного предмета, как черчение, равно как и то, что вряд ли стоит ожидать его возвращения – профессия конструктора перестала быть столь массово востребованной с приходом компьютерных технологий. И легла эта проблема на плечи учителей математики. Однако решение ее известно: непрерывное развитие геометрических представлений и геометрического воображения обучающихся с 1 по 11 класс; наглядная геометрия в 1–6 классах; больше внимания геометрическому моделированию и конструированию (из плоских и пространственных фигур), геометрическим чертежам, построениям, изображениям от руки и с помощью различных чертежных инструментов, на нелинованной и клетчатой бумаге. Это отнюдь не означает, что всю геометрию надо свести к наглядности и к работе руками. Определения и доказательства, логика и аксиоматика важны для современного человека и для изучения геометрии не менее, но надо понимать, что в развитии человека всему отводится свое время, а несформированное наглядно-образное мышление, которое должно быть основой и этапом на пути формирования логического мышления, просто мешает его формированию.

Если вернуться к этапу обучения в старшей школе, то целесообразно использовать любые приемы и средства, которые способствовали бы визуализации предлагаемых обучающимся задач. Это не только построение чертежей по условию задачи (что непросто сделать при проблемах с пространственным воображением), это прежде всего различные предметные модели (полезно для каждой решаемой задачи иметь соответствующую ей модель-подсказку, чтобы использовать ее для визуализации условия, поиска и проверки решения), компьютерные программы, позволяющие выполнять стереометрические чертежи. Полезно выделить эту работу в отдельный тематический практикум, на котором обучающиеся тренировались бы в изображении и моделировании пространственных тел, построении чертежей по условию задачи (в различных ракурсах, выбирая наиболее удобный для поиска решения), можно также организовать данную работу в рамках проекта.

Недостаток графических, геометрических представлений отражается и на результатах выполнения заданий из других разделов курса математики, в частности из математического анализа. Не более половины участников экзамена могут по графику производной найти точку экстремума (профильный экзамен) и по графику функции дать характеристику ее производной (базовый экзамен). Для этого необходимо также умение переформулировать условие с формального языка на графический и наоборот. Справиться с проблемой поможет усиленная работа с графиками, в том числе использование соответствующих компьютерных программ.

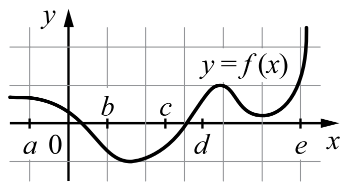
Задание 14

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. *Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку* $[1; 6]$.



Задание 15

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Числа a, b, c, d и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.



Интервалы	Характеристики
А) $(a; b)$	1) значение функции положительно в каждой точке интервала
Б) $(b; c)$	2) значение производной функции отрицательно в каждой точке интервала
В) $(c; d)$	3) значение производной функции положительно в каждой точке интервала
Г) $(d; e)$	4) значение функции отрицательно в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Отметим, что экзаменуемые испытывают точно такие же трудности при выполнении, казалось бы, формальной операции нахождения точки максимума, выполняемой по алгоритму.

Задание 16

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln (x + 9)^5 - 5x$ *на отрезке* $[-8{,}5; 0]$.

Дело в том, что графические представления в данном случае тесно связаны с понятийной стороной вопроса о поведении функции и ее производной, именно поэтому целесообразно не натаскивать учащихся на каждое из данных заданий, а формировать общее понимание понятия производной функции, не забывать о содержательной стороне, переходя к алгоритмической, тем более что задачи на понимание смыслаи применение производной функции к решению ряда ежегодно включаются в задания ЕГЭ по математике. Надо понимать, что представление о производной и ее применении к исследованию функций можно получить, основываясь преимущественно на наглядных представлениях о скорости, об изменении величины и о касательной к гладкой линии.

И в завершение необходимо отметить, что еще одним важным фактором является психологический климат в учебном коллективе: дружеские отношения среди одноклассников, спокойная рабочая атмосфера на уроке, методичная, прозрачная и последовательная подготовка к экзамену, доверительные отношения учителя с учениками, вера в достижение более высоких результатов и эмоциональная поддержка.

Для информации отметим, что учителями математики в связи с ЕГЭ уже накоплен значительный положительный опыт, который целесообразно активно использовать. Материалы, содержащие описание учительских практик, педагогического и методического опыта, можно найти в сети Интернет, в том числе на портале «Школьная математика» (http://школьнаяматематика.рф) в разделе «Опыт учителей» или на сайте журнала «Математика» на портале Всероссийской ассоциации учителей математики (http://raum.math.ru/node/179). Рекомендуем, в частности, обратить внимание на циклы статей С. Шестакова, коллективные статьи А. Евсеевой, М. Зотовой и О. Григоровой, публикации В. Любимовой.