Мини-исследования как элемент воспитания в системе профильного обучения

Александр Александрович Никитин,
директор учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одарённости детей», доктор физико-математических наук, академик РАО, профессор

Александр Сергеевич Марковичев,
профессор кафедры высшей математики Новосибирского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Юрий Викторович Михеев,
учёный секретарь учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одарённости детей», кандидат педагогических наук

Михаил Георгиевич Пащенко,
заместитель директора учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одарённости детей», кандидат физико-математических наук, доцент

СТАТЬЯ ПОСВЯЩЕНА ВАЖНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПО РАЗВИТИЮ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ И ВЫРАБОТКЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ НАВЫКОВ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ ЗА СЧЕТ ВКЛЮЧЕНИЯ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС ПРОБЛЕМНЫХ ЗАДАЧ В ВИДЕ МИНИ-ИССЛЕДОВАНИЙ. РАССМАТРИВАЮТСЯ ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ МИНИ-ИССЛЕДОВАНИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И ПО УРОВНЯМ СЛОЖНОСТИ, ПРИВОДИТСЯ ЗНАЧИТЕЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ПРИМЕРОВ МИНИ-ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ПРАКТИКЕ.

• Мини-исследование • Направления применения мини-исследований • Проблемные задачи •

Известно, что в профессиональной исследовательской деятельности возникающие задачи решаются далеко не сразу. Прежде, чем появляется окончательный итог, приходится экспериментировать, делать те или иные попытки в различных направлениях, терпеть неудачи. И так до тех пор, пока не возникнет окончательное решение. Как правило, решение проблемы представляет собой многоступенчатое рассуждение, состоящее из нескольких элементов, и не ограничивается применением какого-то одного соображения или единственного инструментария. Развитие и совершенствование технологий исследовательского подхода в изучении школьных предметов создаёт объективные предпосылки для подготовки высококвалифицированных специалистов. Достигается это далеко не сразу, при непременном условии систематического включения в учебный процесс элементов творческой деятельности.

В результате многолетнего опыта преподавания математики в физико-математической школе и Специализированном учебно-научном центре Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) установлено, что одним из важных элементов воспитания творческих способностей являются особые задачи, которые можно охарактеризовать как мини-исследования. При этом можно выделить два основных направления по применению мини-исследований в учебном процессе.

Первым, наиболее массовым, направлением является формирование мини-исследований в виде задач, которые в значительной степени связаны с текущим изучаемым материалом по тематике, но для своего решения требуют рассмотрения различных возможностей и вариантов, поиска нескольких этапов логических рассуждений, основанных не только на текущем, но и на ранее изученном материале. В результате работа учащегося над мини-исследованием превращается в цельный процесс поиска решения поставленной задачи, приближённый к реальной исследовательской деятельности.

Для преподавателя поиск задач для мини-исследований также становится интересным творческим процессом. Дело в том, что в школьных учебниках по математике содержится относительно небольшое количество задач, подходящих для мини-исследований. Поэтому преподавателю для формирования новых проблемных задач приходится использовать различные источники, создавать задачи по аналогии с имеющимися, приспосабливать для мини-исследований часть теоретического материала, уметь представлять решения в виде последовательности относительно простых и доступных для учащихся этапов и т.д.

В связи с этим можно выделить несколько направлений, по которым целесообразно формировать задачи для мини-исследований.

1. Повторное решение с изменением параметров и начальных условий задачи (действия по аналогии).

2. Проведение рассуждений в измененной ситуации по схеме, аналогичной рассмотренной.

3. Самостоятельное получение некоторых теоретических результатов на основе предлагаемой схемы.

4. Построение схемы доказательств по аналогии с известными схемами (самостоятельный выбор одной из схем).

5. Обобщение задачи (исследование класса задач).

6. Выявление задач с интересными и неожиданными результатами (в частности, установление границ применимости теоретических результатов, построение контрпримеров и т.д.).

7. Эквивалентная замена задачи в виде серии более узких задач (перебор случаев).

8. Эквивалентная замена задачи в форме частного случая более широкой задачи (специализация задачи).

Приведём примеры мини-исследований по отдельным темам, которые естественным образом можно включать в учебный процесс при профильном обучении на третьей ступени среднего (полного) общего образования.

Тригонометрия

Мини-исследование 1

Предлагается рассмотреть окружность единичного радиуса, несколько вписанных в неё правильных многоугольников, с помощью вычислительных средств вычислить их площади и установить, насколько отличается площадь круга:

– от площади вписанного в круг правильного шестиугольника;

– от площади вписанного в круг правильного восьмиугольника;

– от площади вписанного в круг правильного двенадцатиугольника.

Мини-исследование 2

Основная часть тригонометрических формул верна при всех значениях переменных.

Исключение составляют формулы, содержащие тангенс и котангенс. Предлагается выяснить, при каких условиях определены следующие формулы:

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x,$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y},$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x,$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}.$$

Мини-исследование 3

По аналогии с приведённым в учебнике выводом формулы для суммы косинусов найти суммы:

а) $\sin x+\sin 2x+....+\sin nx$;

б) $\sin x+\sin(x+d)+\sin(x+2d)+...$

$...+\sin(x+nd)$;

в) $\cos x+\cos(x+d)+\cos(x+2d)+...$

$...+\cos(x+nd)$.

Периодические функции

Мини-исследование 4

Для того, чтобы установить периодичность некоторой всюду определённой функции $f(x)$, достаточно найти такое число $T\neq 0$, что $f(x+T)=f(x)$ при любом действительном значении x.

Предлагается на примерах функций

$$f(x)=x\ ;\ f(x)=x^2;\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

найти несколько способов доказательства того, что некоторая функция не является периодической.

Мини-исследование 5

В качестве исследования предлагается решить две задачи.

Задача 1. Известно, что график функции $f(x)$ симметричен относительно прямых $x=a$ и $x=b$, причем $a\neq b$. Доказать, что эта функция периодическая.

Задача 2. Известно, что график функции $f(x)$ симметричен относительно точек $A(m;0)$ и $B(n;0)$, причём $m\neq n$. Доказать, что эта функция периодическая.

Предел последовательности

Мини-исследование 6

Попробуйте найти формулу *n*-го члена последовательности Фибоначчи, действуя по следующей схеме.

1. Пусть две последовательности (a_n) и (b_n) задаются теми же рекуррентными соотношениями, что и последовательность чисел Фибоначчи:

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n;\ b_{n+2}=b_{n+1}+b_n.\ (*)$$

Показать, что тогда и сумма этих последовательностей (a_n+b_n) задаётся тем же рекуррентным соотношением (*).

2. Найдите две геометрические прогрессии со знаменателями q_1 и q_2, начинающиеся с 1 и удовлетворяющие рекуррентному соотношению (*).

3. Получите последовательность чисел Фибоначчи как сумму двух прогрессий (αq^{n-1}) и (βq^{n-1}), определив α и β из условий: $f_1=1=\alpha+\beta$, $f_2=1=\alpha q_1+\beta q_2$.

Мини-исследование 7

Исследуйте, каким может быть частное двух бесконечно малых. Приведите несколько примеров, когда частное бесконечно малых является:

а) бесконечно малым; б) постоянно; в) неограниченно.

Мини-исследование 8

Пусть члены последовательности (a_n)

положительны, и выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$.

1. Докажите, что последовательность (a_n) является бесконечно малой.

2. Установите, что последовательности с общим членом $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$, $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ являются бесконечно малыми.

Мини-исследование 9

Дан треугольник *ABC*. Пусть A_1 – середина BC, B_1 – середина AC, C_1 – середина AB. Построим треугольник $A_1B_1C_1$ из средних линий треугольника ABC. Аналогично построим треугольник $A_2B_2C_2$ из средних линий для $A_1B_1C_1$, треугольник $A_3B_3C_3$ из средних линий для $A_2B_2C_2$ и т. д.

1. Докажите, что каждая из последовательностей точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$, $C_1, C_2, C_3, \ldots$ имеет предел.

2. Докажите, что каждая из предельных точек делит соответственно медианы A_1, B_2, C_3 в отношении 2:1, считая от вершин треугольника ABC.

3. Докажите, что эти предельные точки совпадают.

Отметим, что приведённое рассуждение является одним из доказательств следующего известного утверждения: «Медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин треугольника».

Мини-исследование 10

Попробуйте изучить алгоритм извлечения кубического корня из положительного числа *a*, основанный на рекуррентной формуле для приближений:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

Для этого:

а) установите, что $x_{n+1} \ge \sqrt[3]{a}$ и $\dfrac{a}{x_n^2} \le \sqrt[3]{a}$, воспользовавшись неравенством среднего арифметического и среднего геометрического для трёх положительных чисел $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{1}{3}(x+y+z)$;

б) установите, что $x_{n+1} \le x_n$;

в) установите, что существующий по теореме Вейерштрасса предел *p* последовательности (x_n) является корнем уравнения $p^3 = a$.

Предел функции и непрерывность

Мини-исследование 11

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *и* $B \ne 0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

В учебнике приведено доказательство этой теоремы, использующее первое определение предела функции в точке («на языке последовательностей») и сводящее утверждение теоремы к известному факту из теории пределов последовательностей. Предлагается провести доказательство теоремы 3, основанное на втором определении предела функции («на языке ε - δ »), и, тем самым, независимое от теории пределов последовательностей.

Мини-исследование 12

Предлагается ввести понятие бесконечно малой в точке a функции $\alpha(x)$ и аналогично тому, как это происходило для последовательностей, доказать несколько основных свойств бесконечно малых в точке функций:

а) если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке a, то сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая в той же точке;

б) если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке a, функция $f(x)$ ограничена в точке a, то произведение $\alpha(x)\cdot f(x)$ – бесконечно малая в точке a;

в) если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке a, то $\alpha(x)$ – ограниченная в точке a функция, г) произведение бесконечно малых в данной точке функций является бесконечно малой в этой точке функций.

Мини-исследование 13

Для того чтобы хорошо представлять себе понятие непрерывности функции в точке, полезно разобраться в том, что означают слова «функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a». Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то ее принято называть *разрывной в точке* a, а саму точку a – *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В примере с функцией $\operatorname{sgn}^2 x$, точка 0 является точкой разрыва, однако кажется немного «ненастоящей», так как если переопределить исходную функцию, положив ее значение в нуле равным 1, то получим непрерывную в 0 функцию, тождественно равную 1 на всей числовой прямой. Такой разрыв естественно назвать *устранимым*.

Функцию $\operatorname{sgn} x$ можно представлять себе как бы «склеенной» из нескольких функций: для $x<0$ – это функция, тождественно равная -1, предел которой в точке $a=0$ существует и равен -1; для $x>0$ – это функция, тождественно равная 1, предел которой в точке 0 существует и равен 1; и, наконец, при $x=0$ – это нуль.

Каждую из точек разрыва, как в данных примерах, называют *точкой разрыва первого рода*.

Легко указать принципиально отличные от предыдущих примеры точек разрыва. Рассмотрим хорошо знакомую нам функцию $f(x)=\frac{1}{x}$, разрывную в нуле хотя бы потому, что она в нуле не определена. Ее тоже можно представить себе как бы «склеенной» из двух функций: для $x<0$ – это функция, равная $\frac{1}{x}$, предел которой в точке 0 не существует; для $x>0$ – это функция, равная $\frac{1}{x}$, предел которой в точке 0 также не существует. Таким образом, 0 является такой точкой разрыва, что ни при стремлении x к нулю «слева», ни при стремлении x к нулю «справа», предела не существует. Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определенную формулой $f(x)=\frac{1}{2}\frac{x+|x|}{x^2}$, которая при $x<0$ тождественно равна 0, а при $x>0$ равна $\frac{1}{x}$. Ее предел слева в точке 0 равен 0, а предела справа в нуле не существует. Каждую из точек разрыва, как в последних примерах, называют *точкой разрыва второго рода*.

1. Дайте определение точек разрыва первого и второго рода, и приведите несколько новых примеров.

2. Докажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } \ x=0;\\ \sin\frac{1}{x}, \text{ если } x\neq 0\end{cases}$$

разрывна в нуле. Разрыв какого рода представляет точка $x=0$?

3. Докажите, что функция $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ имеет в нуле устранимый разрыв первого рода.

Мини-исследование 14

Чтобы доказать достаточное условие непрерывности для монотонной функции, мы применили определение непрерывности «на языке ε - δ ». Предлагается доказать теорему 13, используя определение непрерывности «на языке последовательностей»: функция $f(x)$ называется непрерывной в предельной точке a из области определения D, если для всякой последовательности (x_n) такой, что $x_n\in D$ и $x_n\to a$, последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(a)$ (при $n\to\infty$).

Для этого возьмём произвольную точку $c\in(a;b)$ и, обозначив через d наименьшее расстояние от c до концов промежутка $[a;b]$, рассмотрим последовательности $a_n=c-\frac{d}{n}$ и $b_n=c+\frac{d}{n}$. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ является строго возрастающей.

1. Покажите, что последовательности $(f(a_n))$ и $(f(b_n))$ имеют пределы.

2. Обозначив эти пределы через L_1 и L_2, объясните, почему $L_1\le L_2$.

3. Объясните, почему для любого $x<c$ выполняется неравенство $f(x)<L_1$, а для любого $x>c$ выполняется неравенство $f(x)>L_2$.

4. Приведите к противоречию предположение $L_1<L_2$.

5. Почему $L_1=L_2=f(c)$?

6. Возьмите любое положительное число ε и покажите, что для любого достаточно большого номера K выполняются неравенства.

$$f(c)-\varepsilon<f(a_K)<f(c)<f(b_K)<f(c)+\varepsilon$$

7. Возьмите любую такую последовательность (x_n), что $x_n\to c$, $x_n\in[a;b]$, и покажите, что найдётся такое число M, что для всех $n>M$ будут выполнены неравенства $a_K<x_n<b_K$.

8. Придите к выводу, что для любого положительного числа ε найдётся такое число M, что для всех $n>M$ будут выполнены неравенства

$$f(c)-\varepsilon<f(x_n)<f(c)+\varepsilon.$$

9. Выясните, какие изменения нужно внести в рассуждения, когда точка c совпадает с одним из концов промежутка $[a;b]$.

10. Как изменить полученное доказательство непрерывности монотонной функции, множество значений которой является промежутком, для случая строго убывающей функции?

11. Докажите, что у произвольной монотонной функции точки разрыва могут быть только точками разрыва первого рода.

Дифференцируемость

Мини-исследование 15

Как известно, из каждой точки, лежащей вне окружности, к ней можно провести две касательных. Выяснить, существует ли такая замкнутая плоская фигура, что из любой точки, лежащей вне этой фигуры, к ней можно было бы провести три или более касательных. Какого максимального количества касательных можно достичь?

Подсказка: Ромашка.

Мини-исследование 16

Выяснить, имеются ли точки, в которых дифференцируема функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{ если } x \text{ - рационально и равно } \dfrac{p}{q}\ (\text{дробь несократима}),\\ 0, \text{ если } x \text{ - иррационально?}\end{cases}$$

Мини-исследование 17

Что можно сказать о дифференцируемости функции $h(x)=f(g(x)$ в данной точке $x=a$, если:

а) функция *f(x)* имеет производную в точке *b=g(a),* а функция *g(x)* не имеет производной в точке *x = a*;

б) функция *f(x)* не имеет производной в точке *b=g(a),* а функция *g(x)* имеет производную в точке *x = a*;

в) функция *f(x)* не имеет производной в точке *b=g(a)* и функция *g(x)* не имеет производной в точке *x = a*?

Указание: Рассмотреть при *a* = 0 примеры

а) $f(x)=x^2,\ g(x)=|x|$,

б) $f(x)=|x|,\ g(x)=x^2$,

в) $f(x)=2x+|x|,\ g(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}|x|$.

Введение в стереометрию

Мини-исследование18

Если возьмём трапецию *ABCD* с прямыми углами при вершинах боковой стороны *AB* и определим пространственную фигуру как множество всех точек пространства, получающихся из точек трапеции *ABCD* поворотом вокруг прямой *AB*, то получается часть конуса. Образующуюся фигуру называют также *усечённым конусом*.

Попробуйте провести исследование и выяснить на основе приведённых примеров пространственных фигур, какие фигуры могут получаться при вращении вокруг прямой некоторых известных плоских фигур:

а) вращается остроугольный треугольник вокруг стороны;

б) вращается прямоугольный треугольник вокруг средней линии, параллельной одному из катетов;

в) вращается остроугольный треугольник вокруг одной из его средних линий;

г) вращается прямоугольник вокруг одной из его диагоналей;

д) вращается тупоугольный треугольник вокруг средней линии, которая параллельна его меньшей стороне.

Мини-исследование 19

Обычно при построении математической теории стараются вводить как можно меньше аксиом. Однако последовательное построение теории на основе минимального числа аксиом может оказаться сложным. Поэтому иногда в процессе обучения для удобства в качестве аксиом выбирают большее число утверждений, чем это нужно на самом деле, лишь бы они не противоречили друг другу. В данном учебнике рассматривается избыточная система аксиом геометрии, которая равносильна системе аксиом Гильберта. В частности, как аксиома сформулировано утверждение:

каждая плоскость p делит множество не принадлежащих ей точек пространства на две части, называемых полупространствами с границей p. Отрезок с концами в одном полупространстве не пересекает плоскость p, а отрезок с концами в разных полупространствах, пересекает плоскость p.

Предлагается на основе аксиом I – V доказать это утверждение как теорему по следующей схеме:

– доказать, что если отрезок с концами *A* и *B* не пересекает плоскость *p* и отрезок с концами *B* и *C* не пересекает плоскость *p*, то отрезок с концами *A* и *C* также не пересекает плоскость *p*;

– доказать, что если отрезок с концами *A* и *B* пересекает плоскость *p* и отрезок с концами *B* и *C* пересекает плоскость *p*, то отрезок с концами *A* и *C* не пересекает плоскость *p*;

– доказать, что если отрезок с концами *A* и *B* пересекает плоскость *p,* а отрезок с концами *B* и *C* не пересекает плоскость *p*, то отрезок с концами *A* и *C* пересекает плоскость *p*;

– определить полупространство как множество всех точек пространства таких, что отрезок с концами из этого полупространства не пересекает плоскость;

– доказать, что все пространство состоит из плоскости и двух задаваемых этой плоскостью полупространств.

Мини-исследование 20

Предположим, что мы взяли лист бумаги, вырезали равносторонний треугольник и согнули этот листок по средним линиям треугольника. Тогда легко убедиться в том, что при склеивании частей получается треугольная пирамида – правильный тетраэдр.

Предлагается проделать аналогичные эксперименты с треугольниками другого вида, и на основании наблюдений высказать гипотезу насчет того, в каких случаях данная конструкция позволяет сделать пирамиду, а в каких нет.

Изображение фигур

Мини-исследование 21

Как по изображениям на эпюре трёх соседних вершин правильного шестиугольника построить изображение всего шестиугольника?

Предлагается провести построение по следующей схеме:

– используя теорему о пересечении диагоналей параллелограмма, показать, как по изображениям трех вершин параллелограмма построить изображение четвертой;

– по методу, полученному в предыдущем пункте, построить центр правильного шестиугольника;

– построить изображения остальных вершин.

Перпендикулярность

Мини-исследование 22

1. Найти на заданной плоскости α точку, для которой разность расстояний от неё до двух данных точек *A* и *B* наибольшая, если:

а) точки *A* и *B* расположены по одну сторону от плоскости α;

б) точки *A* и *B* расположены по разные стороны от плоскости α.

2. В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые. Найти геометрическое место середин отрезков данной длины d, один конец которых лежит на одной из этих прямых, а другой конец – на другой.

Задачи со сферами

Мини-исследование 23

Пусть имеется идеальный деревянный шар, радиус которого, например, от 10 см до 20 см., кроме этого, есть циркуль, линейка и бумага.

1. Найти способ, с помощью которого можно точно определить радиус окружности, циркулем проведённой на шаре.

2. Установить, как можно точно найти радиус заданного шара.

Отметим, что для практического применения полученный способ позволит с любой сколь угодно высокой точностью определить радиус материального шара, если предполагать, что все необходимые измерения и вычисления выполнены с нужной точностью.

Мини-исследование 24

Нетрудно установить, что описанная сфера существует не для всякого многогранника. В связи с этим предлагается исследовать существование описанной сферы для некоторых видов многогранников.

1. Выяснить, в каких случаях вокруг призмы можно описать сферу.

2. Рассмотреть многогранники с пятью гранями, у которых две грани – треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а оставшиеся три грани – четырёхугольники. И выяснить, при каких условиях вокруг такого многогранника можно описать сферу.

Мини-исследование 25

К проблеме касания сферы с гранями двугранного угла можно подойти с общей точки зрения.

Предлагается рассмотреть две плоскости и выяснить, где может находиться центр сфер, одновременно касающихся данных плоскостей.

Отметим, что при исследовании этой задачи приходится особо выделять случай параллельных плоскостей.

Мини-исследование 26

В качестве исследования предлагается найти ответы на следующие вопросы.

Вопрос 1. Пусть прямая *a* имеет со сферой *S* единственную общую точку. Как доказать, что прямая *a* является касательной к сфере *S*?

Вопрос 2. Пусть известно, что сфера касается двух параллельных прямых. Где в этом случае может находиться центр сферы?

Вопрос 3. Пусть прямая *a* лежит в плоскости α и известна ортогональная проекция точки *P* на плоскость α. Как в этом случае провести из точки *P* перпендикуляр к прямой *a*?

Мини-исследование 27

Пусть в пространстве выбраны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D*. Соединяя эти точки отрезками *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, получаем пространственную фигуру, которую часто называют пространственным четырёхугольником.

Предлагается исследовать касание сферы со сторонами пространственного четырёхугольника.

1. Показать, что если существует сфера, касающаяся всех сторон пространственного четырёхугольника *ABCD*, то:

а) выполняется равенство

AB + CD = BC + AD;

б) точки касания сторон четырёхугольника со сферой лежат в одной плоскости.

2. На примерах проверить, что если существует сфера, касающаяся сторон пространственного четырёхугольника, то существует бесконечно много различных сфер, также касающихся всех сторон четырёхугольника.

Координаты в пространстве

Мини исследование 28

В координатном пространстве даны две точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Точка *C* расположена на отрезка *AB* так, что $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$. Доказать, что точка *C* имеет следующие координаты:

$$\left(\frac{n\cdot x_1+m\cdot x_2}{m+n};\frac{n\cdot y_1+m\cdot y_2}{m+n};\frac{n\cdot z_1+m\cdot z_2}{m+n}\right).$$

Предлагается следующая схема доказательства:

1. Доказать формулу для точек $(x_1;0;0)$ и $(x_2;0;0)$.

2. Провести плоскости α, β и γ, проходящие через точки *A, C* и *B* параллельно плоскости *Oyz*. Доказать формулу для абсцисс точек.

3. Доказать формулу для остальных координат.

Другим важным направлением применения мини-исследований в учебном процессе является формирование проблемных задач для индивидуальной работы с наиболее сильными учащимися, которые предполагают значительную степень свободы в поиске подходов к решению. Эти задачи, как правило, возникают «на стыке» между школьным курсом математики и достижениями математической науки в целом. Часть таких мини-исследований можно сформировать на основе результатов, которые были получены в древности или в средние века, другую часть – как некоторое продвижение в изучении элементов современной математики, представленных в действующих школьных программах по математике. В условиях Специализированного учебно-научного центра НГУ и некоторых других учебных заведений, где к преподаванию привлекаются научные сотрудники, отдельные мини-исследования могут формироваться как реализация фрагментов реальных научных исследований, которыми непосредственно занимается преподаватель. Приведём несколько примеров мини-исследований, которые использовались в индивидуальной работе с учащимися СУНЦ НГУ и по которым были получены результаты, достойные для представления на ежегодной Международной студенческой научной конференции НГУ.

Мини исследование 29

Выяснить, можно ли в задачах на построение с помощью линейки и циркуля обойтись только одним циркулем. Другими словами, можно ли построить конечное множество точек с помощью одного циркуля, если известно, что это множество точек можно построить с помощью линейки и циркуля.

Мини исследование 30

Пусть $0<x<\pi$ и $a_1=\sin x,\ a_{n+1}=\sin a_n$ при всех $n\geq 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}\cdot a_n)=\sqrt{3}$, независимо от выбора x из указанного промежутка.

Мини исследование 31

В задачнике журнала «Квант» опубликована следующая задача. «Имеется лента из клеток размером 1 на *m*. На ней одна клетка закрашена, на другой поставлена фишка. Бросается игральная кость, фишка перемещается к закрашенной клетке на число клеток, выпавшее на игральной кости. Если фишка не достигла закрашенной клетки, но не проскочила её, то игральная кость бросается снова. Процесс прекращается, когда фишка попала в закрашенную клетку или проскочила её. При каком начальном положении фишки вероятность попадания в закрашенную клетку будет максимальной?».

Пусть n – расстояние от начального положения фишки до закрашенной клетки, P_n – вероятность попадания в закрашенную клетку. 1) Решить предложенную задачу, вычислив значения $P_1, P_2, ..., P_6$ и выразив P_{n+1} через предшествующие при $n \geq 6$. 2) Найти $\lim_{n\to\infty} P_n$.

Мини исследование 32

Широко известны три способа представления комплексных чисел: в виде упорядоченных пар вещественных чисел; в виде векторов на плоскости; в виде матриц второго порядка особого вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Найти другие способы представления комплексных чисел в виде матриц второго порядка. ❑