Особенности работы с неявно математически одарёнными школьниками

Валерий Николаевич Клепиков,
старший научный сотрудник лаборатории воспитания нравственно-этической культуры ФГУ «ГосНИИ семьи и воспитания», заместитель директора по инновационной работе обнинского МОУ «Лицей», кандидат педагогических наук, почётный работник общего образования РФ (Klepikovvn@mail.ru)

КАК ПОКАЗЫВАЕТ НАШ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ОПЫТ, СУЩЕСТВУЮТ ДЕТИ, КОТОРЫЕ ОБНАРУЖИВАЮТ НЕЯВНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ОДАРЁННОСТЬ. ИХ ОТЛИЧАЕТ НЕОРДИНАРНОЕ ВИДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ. ДЛЯ ТАКИХ РЕБЯТ МАТЕМАТИКА ВЫСТУПАЕТ НЕ ЦЕЛЬЮ, А УНИКАЛЬНЫМ СРЕДСТВОМ ПО РАЗВИТИЮ СОБСТВЕННОГО ВНУТРЕННЕГО МИРА. ЧАСТО УЧИТЕЛЯ ИХ НЕ ЗАМЕЧАЮТ, ТАК КАК ОНИ БЫВАЮТ ИНЕРТНЫ И КОСНОЯЗЫЧНЫ. НО ИМЕННО ТАКИЕ УЧЕНИКИ ПРОЯВЛЯЮТ ПОДЛИННУЮ ЛЮБОВЬ К МАТЕМАТИКЕ.

• Детская одарённость • Личностный смысл математических понятий • Притчевые миниатюры •

Мы нередко задаёмся вопросом: все ли дети одарённые? Всё зависит от того, что понимать под одарённостью, и специфики того материала, на котором эта одарённость проявляется. Каждый предмет имеет свои особенности, свои уникальные механизмы по развитию внутреннего мира школьника. А нас, учителей математики, смеем надеяться, в первую очередь волнуют не результаты ЕГЭ, а духовно-интеллектуальное развитие юного человека.

Условно одарённых детей можно поделить на три группы:
• **ученики-прагматики**, которые одарены *видением наиболее эффективных и нестандартных путей решения задач и примеров*;
• **ученики-романтики**, которые имеют *неординарное видение* математических понятий и моделей;
• **ученики-реалисты**, которые совмещают в себе признаки первых двух групп ребят.

Первая группа ребят отличается «здоровым» прагматизмом. Такие ученики считают, что цель математики – быстро решить задачу или пример. Если им это сделать удаётся, то они чувствуют себя победителями, которые в очередной раз подтвердили свой «статус наиболее успешного ученика».

Бывает и так, что если достичь результата таким учащимся не удаётся, они начинают нервничать, суетиться, теряться и т.д. Это происходит потому, что для них математика выглядит как некая линеарная схема, как сеть переплетающихся дорожек, которые или ведут к желанной цели, или от неё уводят.

Помощь этим ребятам со стороны учителя выражается в том, что он старается с ними прорешать как можно больше, например, олимпиадных работ, чтобы освоить определённый набор умений и навыков, а также найти наиболее быстрые пути решения. Не секрет, что здесь очень важен «олимпиадный потенциал» педагога. Все мы, учителя математики, собираем материалы с городских, региональных и всероссийских олимпиад.

Ученики-прагматики не очень охотно занимаются исследовательской деятельностью. Но если готовят реферат, то, как правило, это группа примеров или задач повышенной сложности, где предлагается более продуктивная схема решения. При этом в реферате отсутствует проблема, гипотеза, актуальность, этапы исследования и весомый вывод. Для них эти составляющие исследовательской работы кажутся избыточными и несущественными. А на вопрос: «Для чего они выбрали искомую тему?» – отвечают: «Я готовлюсь к экзамену, поэтому данные примеры необходимо освоить в совершенстве».

Вторая группа – менее заметная и неявная, поэтому на её анализе мы остановимся более подробно. Ученики-романтики обладают неординарным в*и*дением математических понятий и моделей. В какой-то мере они инертны, готовы остановиться на любом месте, которое им кажется не совсем понятным, странным; на контрольных и самостоятельных работах им нередко не хватает времени.

И если ученик из первой группы возникшее затруднительное место на своей интуиции проскочит и двинется дальше, то ребёнок из второй группы «становится в стопор», начинает «кружить вокруг непонятного места». И здесь свою лепту внесёт проницательный педагог, который с помощью наводящих вопросов поможет ему уяснить возникшее затруднение.

Очень важно, чтобы ученик сам сформулировал вопрос: верно поставленный вопрос уже наталкивает на правильный ответ. Вот некоторые вопросы-проблемы со стороны учащихся, с которыми мне довелось столкнуться в своей практике:

- Можно ли подержать в руке круг или окружность?
- Чем отличаются «доля» и «часть»?
- Всегда ли «целое» и «всё» («весь», «вся» и т.д.) совпадают?
- Можно ли с точки зрения математики 1 рубль возвести в квадрат (ведь мы возводим 1 метр), и какая здесь возникает ошибка?
- Зачем нам строить перпендикуляр с помощью циркуля, когда легко можно его построить с помощью угольника?
- Почему абсцисса вершины параболы принадлежит одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания функции?
- Как это понять: человечество с развитием вычислительной техники будет вечно приближаться к точному значению какого-либо иррационального числа, но никогда его не найдёт?
- Можно ли считать число π в чём-то непредсказуемым?
- Можно ли на примере математики показать, что красота содержит в себе как рациональные, так и иррациональные составляющие?
- Если к бесконечности прибавить число или ещё бесконечность, что будет?
- Каких чисел по количеству больше: натуральных или целых?
- Что «бесконечнее»: прямая или луч?
- Если мы построим график функции $y=\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}$, то наша «прямая» окажется без точки, то есть, получается «разрыв»; однако, как могут две прямые, лежащие на одной линии и «двигаясь навстречу друг другу», не совпасть?
- Имеет ли в математике смысл скорость, равная 300 001 км/с (т.е. скорость, б*о*льшая скорости света)?

Получается так, что ученики-романтики в любой информации ищут противоречивые затруднения, которые учителю нередко кажутся надуманными. Однако именно эти затруднения и являются для них своеобразными «точками роста» или «точками отталкивания». Можно предположить, что почти в каждой математической теме для «романтиков» существуют такие «точки роста», которые проблематизируют информацию и в круге которых наблюдается более интенсивная духовно-интеллектуальная жизнь. Такие точки М.К. Мамардашвили назвал «точками интенсивности», В.С. Библер – «точками удивления», В.И. Загвязинский – «горячими точками», А.В. Хуторской – «узловыми точками».

Ученики-романтики не стремятся кому-либо что-то доказать, ни с кем не соревнуются, «варятся в собственном соку», не всегда успешны в учёбе. При этом у них существует повышенный интерес к личностным процессам: к своим чувствам, мыслям и состояниям. Складывается впечатление, что с помощью математики они решают какие-то внутренние проблемы.

Очень важно отметить, что эту категорию учащихся учителя часто не берут во внимание. Педагогам не понятны их затруднения, которые связаны не с тем, что они не способны к математике, а с тем, что ученику нужно постоянно учитывать особенности своего самобытного сознания. Вспоминается и предупреждение Рене Декарта о том, что логика и её определения – не высший суд ясности и истины. Ясность и истина покоятся на субъектном основании. А субъектные основания можно найти в особенностях духовного мира человека. Другими словами, отчуждённая истина не имеет значимого влияния на внутренний мир человека.

Такой учащийся не может «переступить через себя», через свой внутренний опыт. Он ему как бы «мешает». Важно, что через решение какой-либо задачи он ещё и пытается понять себя самого, особенности своего мышления и сознания.

Эти школьники охотно занимаются исследовательской деятельностью, когда не надо никуда спешить и есть время что-то для себя уяснить. Желание заниматься исследовательской деятельностью у них связано с тем, что, помимо математических знаний, они хотят разгадать возникшее затруднение через понимание самого себя.

Ученики-романтики более легко по сравнению с учениками-прагматиками формулируют проблему, гипотезу, выдвигают различные нестандартные идеи, оригинально интерпретируют математические тексты, интегрируют математические знания со сведениями из других предметов. Они как бы стремятся утвердиться в математике за счёт различных областей знаний.

Отсюда, может быть, и несколько неожиданные некоторые исследовательские работы учащихся «Лицея» г. Обнинска: «Софистические способы доказательств в математике», «Красота в геометрии», «Значение понятия «целое» и «образа целого» при решении математических задач», «Пропорция и гармония мира», «Смысловая выразительность числа», «Парадоксы бесконечности» и др.

Приходится констатировать, что одарённые дети – это не только те, которые от природы наделены математическими способностями, но и те, которые могут открывать посредством математики для себя новые смыслы, новые точки роста, то есть преломлять материал через свой внутренний мир и тем самым его обогащать. А для этого, как ни странно, необходимо определённое «сопротивление» изучаемого материала.

Продемонстрируем, как в процессе проблемного диалога насыщаются личностными смыслами такие понятия, как «целое», «доля», «часть».

– Уважаемые ребята! Сегодня мы в процессе диалога попробуем осмыслить понятия «целое», «доля» и «часть». Давайте вспомним, как найти *целое*, *долю* и *часть*.

– Как найти *долю* от *целого*?

– *Долю* умножаем на *целое.* Например, 1/4 от 1 часа есть 15 минут.

– Как найти *часть* от *целого*?

– *Часть* делим на *целое.* Например, 15 минут от 1 часа есть 1/4.

– Как найти *целое*, если известно, какую *долю* составляет *часть*?

– *Часть* делим на *долю*. Например, 15 минут есть 1/4 часа, значит, в часе 60 минут

– Какие понятия нам нужны, чтобы решить эти примеры?

– Понятия «целое», «доля» и «часть».

– Что в данных примерах является *целым*, *долей*, *частью*?

– 15 минут – *часть*, 1/4 – *доля*, 1 час – *целое*.

– Какое понятие связывает два других?

– Это *доля*, так как это единственное из данных чисел, которое «помнит» о других: о *целом* и *части*. Доля 1/4 «помнит» о числах 15 и 60.

– Почему «единственное»? А разве число 15/60 не «помнит» о 1 и 4?

– Да, если числа 15 и 60 составляют отношение, то они также становятся *долей*.

– А разве 1/15 не равна 4/60?

– Здесь явно проявляется свойство пластичности пропорции: в ней мы можем менять местами крайние и средние члены.

– А как *доля* связывает другие два числа?

– Она их связывает в движении, ведь чтобы связать *целое* и *часть,* их нужно непрерывно сопоставлять, соизмерять, сравнивать. Правда, когда мы уже записываем в математике числа, то они как бы «застывают».

– Да, по телевизору постоянно говорят о *доле*, связывающей по курсу рубль и доллар, рубль и евро, доллар и евро.

– Недаром древние греки были уверены в том, что существуют пластичные или фигурные числа, выражающие реальный мир.

– Если искать какое-либо число, символизирующее живую мысль, то это, конечно, *доля*. Именно живая мысль постоянно сравнивает, сопоставляет, анализирует, то есть устанавливает отношения.

– И именно благодаря числам наша мысль на уроках математики оживает.

– Числа как бы подталкивают мысль.

– Не только подталкивают, но и оформляют, делают мысль более выразительной и убедительной.

– И логичной!

– Получается так, что существуют числа более живые и менее живые?

– А что тут удивительного? Ведь в природе тоже существуют существа более и менее живые, например, животное и дерево.

– Да? Я как-то над этим не задумывался.

– А что такое *целое*?

– Это нечто самое большое.

– Это *всё*, то есть это то, что охватывает *всё*.

– *Целое* объединяет различные вещи.

– А всегда ли *целое* есть что-то самое большое?

– В математических задачах *целое* не всегда бывает самой большой величиной.

– Так что же такое *целое*?

– Это то, относительно чего мы измеряем.

– А может ли *часть* быть больше *целого*?

– В каком-то смысле может, если, например, мы измеряем пройденное расстояние с помощью 1 метра.

– В задачах часто используются проценты, большие 100%, т.е. больше *целого*.

– А можно ли *частью* измерить *целое*?

– Конечно нельзя, так как не *часть*, а именно *целое* задаёт меру. Например, если я скажу, что проехал некоторое расстояние, то без *меры-целого* невозможно определить, какое это расстояние по величине. Таким образом, без *целого часть* есть нечто неопределённое, несоизмеримое.

– Вспоминается мультфильм-притча «Тридцать восемь попугаев». Мартышка пытается сначала измерить удава с помощью самого же удава. Удав протестует, когда мартышка говорит, что он составляет две половины, и заявляет, что он *целый*.

– Да, затем приходит попугай и подсказывает, что измерить удава можно лишь с помощью того, что находится вне его, например, с помощью его самого – попугая. И тут у героев наступает прозрение: удава измеряют с помощью мартышки, потом с помощью слонёнка.

– Кстати, когда попугай измерил удава, то получилось не ровно тридцать восемь попугаев, а тридцать восемь попугаев и одно крылышко.

– А к чему вы вспомнили этот мультфильм?

– Благодаря данному мультфильму понятия «целое», «доля» и «часть» как бы оживают. Удав – это *целое*, покоящийся попугай – *часть* от *целого*, а двигающийся попугай изображает *долю*, которая приобщает *часть* к *целому* (1/38 + 2/38 + 3/38 +… 38/38 = 1).

– Здесь, кажется, возникает ещё один вопрос. Может ли *целое*-удав измерить самого себя?

– Нет, если требуется что-то измерить, нужно взять за *целое* нечто другое. Поэтому *целым* выступает уже не сам удав, а попугай, мартышка или слонёнок.

– Значит, получается так: то, что нам нужно измерить, как бы приобщается к идеальной мере, эталону, в частности, к 1 метру?

– Да, поэтому *часть* – это то, что приобщается к *целому* и благодаря этому соответствию приобретает размерность.

– Кстати, *часть* сама по себе «не помнит» о *целом*, как, впрочем, и *целое* – о *части*. Например, если у меня в кармане 5 конфет, то по данной части невозможно сказать, сколько у меня всего конфет. Однако если я скажу, что это половина всех конфет, то сразу же станет ясно, сколько я имею конфет.

– Поэтому приобщение к *целому* возможно только через посредство *доли*.

– Получается так, что без посредства *доли* *часть* и *целое* обречены на одиночество.

– Это действительно так, если не называть *целым*, например, простую сумму *частей*-отрезков его составляющих.

– А из скольких *частей*-отрезков может состоять *целое*?

– Как раз вот с этим фактом связаны древнегреческие парадоксы. В Древней Греции жил математик Зенон, который доказывал, что если *часть* «не помнит» о *целом*, то движение в принципе не может начаться, так как любой отрезок можно делить до бесконечности. Другими словами, *часть*, не приобщённая к *целому*, просто рассыпается на бесконечное множество более мелких *частей*. Поэтому *доля* как бы «закрепляет» *часть* по отношению к целому.

– Странная эта *доля*: она как бы живая, без неё невозможна никакая связь.

– А разве *целое* менее загадочно? Ведь оно может быть по размерам, каким угодно, и, несмотря на это, именно оно даёт всему меру!

– Действительно, даже если *целое* очень маленькое, то оно и тогда есть *целое*.

– Вспоминается поговорка: «Мал золотник, да дорог».

– Более того, *целое* лишний раз напоминает, что целостные явления жизни нельзя делить на части. Например, нельзя любить на четверть или дружить на треть.

– Что же касается *части*, то она также может быть какой угодно по величине.

– Однако безмерная *часть* может только озадачить или даже напугать своей неопределённостью. Представьте себе геометрическую фигуру, которая не имеет измерений.

– Значит, мы в процессе рассуждений вышли на четыре понятия «всё», «целое», «доля» и «часть». С помощью понятия «всё» мы можем попытаться «объять необъятное», с помощью понятия «целое» мы нечто измеряем, благодаря термину «доля» мы связываем *целое* и *часть*, а понятие «часть» напоминает всем предметам мира, что они должны устремиться и приобщиться к целому, чтобы получить соответствующую меру.

Осмысливать математические понятия в процессе интеграции с другими знаниями помогают и притчевые миниатюры, составленные ребятами[1]. Нижеприведённая миниатюра показывает, что в детском сознании появился своеобразный «математический механизм», который способствует пониманию некоторых явлений действительности.

[1] О притчевых миниатюрах мы уже рассказывали. См.: Клепиков В.Н. Притчевые миниатюры на уроках математики в школе // Школьные технологии. № 4. 2010. С. 147–153.

Целое – Доля – Часть. Однажды на классном часе мы столкнулись с такой ситуацией, когда нужно было математически и убедительно продемонстрировать, почему нравственно растущий человек должен дружить не только с духовно богатой личностью, но и помогать более слабому. На помощь пришла триада – *целое*, *доля*, *часть*. В чём же состоит нравственно-математический смысл данного утверждения? Почему *доля* «помнит» и о *части*, и о *целом* одновременно? Да просто потому, что без них она *не сможет существовать*: именно *часть* и *целое* конструируют *долю*. Вот так и любой человек должен помнить одновременно о слабом и сильном, то есть тянуться к более мудрому, но и помогать тем, кому он нужен. Такая вот уж у человека его «доля».

Кстати, именно на таком осмысленном погружении в материал настаивал и основоположник развивающего обучения В.В. Давыдов. Однажды он дал такую характеристику ученику, справившемуся с задачей, но внутренне не изменившемуся: «Себя, почему-то не справлявшегося с задачей, и себя, благодаря чему-то решившего задачу, он просто не заметил. Для задачи – никакого ущерба: она была решена. А для ученика?.. К экзамену школьник может прийти подготовленным. Но будет ли он готов жить в постоянно меняющемся мире, предполагающем умение постоянно менять себя?»[2].

Казалось бы, ученик быстро решил новую задачу, и очень хорошо. Но психолога насторожило то, что учащийся не заметил нового духовного приобретения, новой душевной конфигурации. А значит, по его мысли, не произошло внутреннего движения, т.е. его развития. Подлинного события, встречи с новым знанием, умением, увы, не состоялось.

Оказывается, производя те или иные содержательные преобразования при решении задачи, ученик может осмысленно не проживать и не переживать те преобразования, которые происходят внутри него самого. Задача решилась – и прекрасно! А те внутренние проблемы, которые преодолевались учащимся в переходе от незнания к знанию, от неумения к умению, так и остались им не замеченными. Ученик даже не успел осознать, что в его сознании свершилась «маленькая революция», поэтому он так и не узнал о своей личности ничего нового.

В.В. Давыдов поднял серьёзную проблему: может ли человек развиваться, если он не рефлектирует и не объективирует изменения в своём внутреннем мире? Более того, данное развитие он отмечает не по степени сложности решённых математических задач, а по изменениям во внутреннем мире учащегося. В этом мы солидарны с психологом: одарённость ученика проявляется не только по количеству решенных задач повышенной сложности, но и по способности учащегося отмечать свой духовно-интеллектуальный рост[3].

По нашему глубокому убеждению, духовно-интеллектуальное развитие школьников обеспечивают такие понятия, как «целое – доля – часть», «идеальное – реальное», «соответствие – равенство – тождество», «конечное – бесконечное», «рациональное – иррациональное», «пропорциональное – гармоничное», «интеграция – дифференциация», «логика – софистика», «моделирование – проектирование», «симметрия – асимметрия» и т.д[4].

Именно при неторопливом осмыслении данных понятий, с использованием диалоговых методик, соответствующих задач и примеров, в процессе создания образовательных продуктов (оригинальных решений задач, исследовательских работ, математических притч, стихов, афоризмов и т.д.) возникают благоприятные условия для порождения индивидуальных смыслов. Это можно делать на уроках, а также на индивидуальных консультациях, классных часах, заседаниях НОУ и т.д.

Чтобы создать благоприятные условия по активизации работы самосознания учеников и порождению ими новых смыслов, в «Лицее» г. Обнинска преимущественно используются *диалоговые ситуации*, *исследовательские работы* и *притчевые миниатюры*.

[2] **Давыдов В.В.** Теория развивающего обучения. М.: ИНТОР, 1996. С. 244.

[3] Может быть, именно поэтому ребята, легко справлявшиеся с задачами в школе и проявившие свою одарённость в детстве, в дальнейшей жизни особенно ничем себя не проявляют.

[4] Мы разрабатываем и записываем проблемные диалоги с привлечением основных математических понятий.

Для создания творческой обстановки, в первую очередь, нужна атмосфера искренней заинтересованности в результатах труда другого человека. Ученик должен быть уверен, что все оттенки его переживаний, мировосприятия вызовут неподдельный интерес у педагога и ребят, и чем пунктуальнее будет психологическая и методическая работа учителей, тем с большим желанием ученик будет стремиться создавать полновесные образовательные продукты.

Например, если для духовно-интеллектуального роста учеников мы используем притчевую миниатюру, то после её создания проводим рефлексию (коллективную или приватную) с учеником по поводу его творческого процесса с помощью следующих вопросов.

- Чем ты руководствовался, сочиняя данную притчевую миниатюру?
- Что тебе самому было интересно описать и выразить?
- Почему ты выбрал именно этот сюжет?
- С какими трудностями ты столкнулся при написании?
- Какие мысли возникли у тебя по поводу данной притчевой миниатюры?
- Какую проблему ты попытался поднять и разрешить?
- На какие новые мысли подвигла тебя созданная притчевая миниатюра?
- Какую бы притчевую миниатюру ты хотел бы написать в дальнейшем?

Таким образом, в процессе доверительного диалога, выявляя разницу между тем, чт*о* понимал школьник до написания притчевой миниатюры и после, мы создаём предпосылки для его осознанного духовно-интеллектуального роста. После такого диалога ученик постигает разницу между двумя состояниями – бывшим и актуальным.

Предлагаем расширить круг одарённых учеников за счёт тех, кто медленно, упорно и последовательно вырабатывает своё личностное понимание математических понятий и моделей. Можно сказать, что это дети, одарённые живым знанием и смыслами. Для них математика выступает не целью, а уникальным средством по развитию собственного внутреннего мира. И в этом нет ничего неожиданного – многие знаменитые математики понимали, какое значение для развития их личности имела наука. Именно из учеников-реалистов, составляющих *третью группу* одарённых детей и сочетающих в себе и прагматизм, и романтизм, на наш взгляд, и вырастают известные в дальнейшем математики. ❑